Lógica Computacional 1 — Turma A
Primeira Prova (Gabarito)

Indução e Cálculo Proposicional

Prof. Mauricio Ayala Rincón
Departamento de Ciência da Computação, Instituto de Ciências Exatas
Universidade de Brasília

20 de Setembro de 2017

Duração: 110 min
Duas páginas, duas questões
Início: 19:00h - Término: 20:40h

Nome:	Matrícula:

1. (4 pontos) Prove por indução na estrutura das fórmulas bem formadas (f.b.f.) da lógica proposicional, que prefixos de f.b.f.'s tem maior ou igual número de ocorrências de parênteses esquerdos que direitos; i. e., para toda φ, f.b.f., e todo $s \sqsubseteq \varphi$, $|s|_(\geq |s|_)$.

   "$s \sqsubseteq t$" denota que s é prefixo de t e "$|s|_a$" denota o número de ocorrências do símbolo a na palavra s. A palavra vazia, denotada como ϵ, é prefixo de qualquer palavra.

   Lembre que provas indutivas nas fórmulas baseam-se na definião recursiva da sintaxe das fórmulas bem formadas:

$$\phi ::= V \ \ || \ \ \perp \ \ || \ \ \top \ \ || \ \ (\neg\phi) \ \ || \ \ (\phi \wedge \phi) \ \ || \ \ (\phi \vee \phi) \ \ || \ \ (\phi \rightarrow \phi)$$

   Solução Demonstração por indução nas f.b.f.s.

   BI Se φ for uma constante ou variável proposicional então a propriedade vale, uma vez que $s \sqsubseteq \varphi$ implica $s = \epsilon$ ou $s = \varphi$ e em ambos casos temos que $|s|_(= |s|_) = 0$.

   PI Temos dois casos a considerar, a saber,

   - $\varphi = (\neg\varphi_1)$. Analisam-se os possíveis prefixos $s \sqsubseteq \varphi$:
     * $s = \epsilon$, $|\epsilon|_(= |\epsilon|_)$;
     * $s = ($, $|(|_(= 1 > |(|_) = 0$;
     * $s = (\neg s'$, onde $s' \sqsubseteq \varphi_1$, $|(\neg s'|_(= 1 + |s'|_(\geq_{h.i.} 1 + |s'|_) > |(\neg s'|_)$, onde a h.i. é aplicada para o prefixo s' de φ_1;
     * $s = (\neg\varphi_1)$, do item precedente vale $|(\neg\varphi_1|_(> |(\neg\varphi_1|_)$, logo $|(\neg\varphi_1|_(\geq |(\neg\varphi_1|_)$.

- $\varphi = (\varphi_1 \star \varphi_2)$, onde $\star \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$. Analisam-se os possíveis prefixos $s \sqsubseteq \varphi$:
  - $s = \epsilon$, como no caso precedente;
  - $s = (s_1$, onde $s_1 \sqsubseteq \varphi_1$, $|(s_1|_(= 1 + |s_1|_(\leq_{h.i.} 1 + |s_1|_) > |s_1|_)$;
  - $s = (\varphi_1 \star s_2$, onde $s_i \sqsubseteq \varphi_i$ $(i \in \{1,2\})$, $|(\varphi_1 \star s_2|_(= 1 + |\varphi_1|_(+ |s_2|_(\leq_{h.i} 1 + |\varphi_1|_) + |s_2|_) > |(\varphi_1 \star s_2|_)$, onde a h.i. é aplicada tanto para $\varphi_1 \sqsubseteq \varphi_1$ quanto para $s_2 \sqsubseteq \varphi_2$;
  - $s = (\varphi_1 \star \varphi_2)$, do item precedente vale $|(\varphi_1 \star \varphi_2|_(> |(\varphi_1 \star \varphi_2|_)$, logo $|(\varphi_1 \star \varphi_2)|_(\geq |(\varphi_1 \star \varphi_2)|_)$

2. (6 pontos) Derivação nos cálculos minimal, intuicionista e clássico.

   (a) (2 pontos) Usando Dedução Natural (DN) ou Cálculo de Sequêntes (CS) de Gentzen *minimal* construa uma derivação para $\neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg(\phi \vee \neg\phi)]^u$}
\AxiomC{$[\neg(\phi \vee \neg\phi)]^u$}
\AxiomC{$[\phi]^v$}
\RightLabel{$(\vee_i)$}
\UnaryInfC{$(\phi \vee \neg\phi)$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ v$}
\UnaryInfC{$\neg\phi$}
\RightLabel{$(\vee_i)$}
\UnaryInfC{$\phi \vee \neg\phi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ u$}
\UnaryInfC{$\neg\neg(\phi \vee \neg\phi)$}
\end{prooftree}
$$

   (b) (2 pontos) Usando DN ou CS de Gentzen *intuicionista* construa uma derivação para $\neg\neg(\neg\neg\phi \rightarrow \phi)$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg(\neg\neg\phi \rightarrow \phi)]^u$}
\AxiomC{$[\neg(\neg\neg\phi \rightarrow \phi)]^u$}
\AxiomC{$[\phi]^x$}
\RightLabel{$(\rightarrow_i)\ \emptyset$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\phi \rightarrow \phi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ x$}
\UnaryInfC{$\neg\phi$}
\AxiomC{$[\neg\neg\phi]^y$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\bot_e)$}
\UnaryInfC{ϕ}
\RightLabel{$(\rightarrow_i)\ y$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\phi \rightarrow \phi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ u$}
\UnaryInfC{$\neg\neg(\neg\neg\phi \rightarrow \phi)$}
\end{prooftree}
$$

   (c) (2 pontos) Demonstre que a Lei de Peirce $(((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$, é um teorema estritamente clássico; para isso apresente uma derivação de $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ que supõe a Lei de Peirce e usa unicamente regras intuicionistas em DN ou CS.

   Ajuda: use a seguinte instância da Lei de Peirce: $((\varphi \rightarrow \bot) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$.

Em DN:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg\varphi = (\varphi \to \bot) \to \bot]^u \qquad [\neg\varphi = \varphi \to \bot]^v}{\bot}\,(\to_e)}{\varphi}\,(\bot_e)}{(\varphi \to \bot) \to \varphi}\,(\to_i)\ v \qquad ((\varphi \to \bot) \to \varphi) \to \varphi \ (\text{L.Peirce})}{\varphi}\,(\to_e)}{\neg\neg\varphi \to \varphi}\,(\to_i)\ u$$

No CS de Gentzen:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi \ (\text{Ax}) \qquad \bot \Rightarrow \varphi \ (\text{L}_\bot)}{\neg\neg\varphi, \varphi \to \bot \Rightarrow \varphi}\,(\text{L}_\to)}{\neg\neg\varphi \Rightarrow (\varphi \to \bot) \to \varphi}\,(\text{R}_\to) \qquad \varphi, \neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi \ (\text{Ax})}{\neg\neg\varphi, ((\varphi \to \bot) \to \varphi) \to \varphi \Rightarrow \varphi}\,(\text{L}_\to) \qquad \dfrac{\Rightarrow ((\varphi \to \bot) \to \varphi) \to \varphi \ (\text{L.Peirce})}{\neg\neg\varphi \Rightarrow ((\varphi \to \bot) \to \varphi) \to \varphi}\,(\text{LW})}{\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi}\,(\text{Cut})}{\Rightarrow \neg\neg\varphi \to \varphi}\,(\text{R}_\to)$$

Tabela 1: Regras de dedução natural para a lógica proposicional clássica

introdução	eliminação
$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge_e)$
$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i)$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{matrix}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \chi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi]^v \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}}{\chi}\ (\vee_e)\ u, v$
$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i)\ u$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to_e)$
$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi}\ (\neg_i)\ u$	$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg_e)$
	$\dfrac{\begin{matrix}[\neg\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\varphi}\ (\mathrm{PBC})\ u$