Lógica Computacional 1 — Turma B
Primeira Prova (Gabarito)

Indução e Dedução no Cálculo Proposicional

Prof. Mauricio Ayala-Rincón
Departamento de Ciência da Computação, Instituto de Ciências Exatas
Universidade de Brasília

19 de Setembro de 2018

Duração: 110 min
Início: 19:00h - Término: 20:50h
Três páginas, três questões

Nome:	Matrícula:

Usar-se-á $\vdash_M$, $\vdash_I$ e $\vdash_C$ para denotar derivações utilizando o cálculo de dedução natural minimal, intuicionista e clássico, respectivamente.

1. Uma fórmula proposicional ϕ pertence ao *fragmento negativo* se não contém disjunções e todas as suas variáveis proposicionais ocorrem precedidas de negação, segundo a sintaxe abaixo.

$$\phi ::= (\neg v) \;\|\; \bot \;\|\; (\neg\phi) \;\|\; (\phi \wedge \phi) \;\|\; (\phi \to \phi), \quad \text{for } v \in V$$

Deseja-se provar por indução na estrutura das fórmulas, que para qualquer fórmula do fragmento negativo, ϕ, existe uma derivação minimal para:

$$\vdash_M \phi \leftrightarrow \neg\neg\phi$$

I.e., provar que $\vdash_M \phi \to \neg\neg\phi$ e $\vdash_M \neg\neg\phi \to \phi$.

O sentido $\vdash_M \phi \to \neg\neg\phi$ é fácil. Para o sentido $\vdash_M \neg\neg\phi \to \phi$ é que se aplica indução em ϕ.

(Base da Indução) procede como a seguir, para fórmulas da forma $\neg v$ e $\bot$:

- $\vdash_M \neg\neg\neg v \to \neg v$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg\neg v]^y \qquad \dfrac{[v]^x}{\neg\neg v}\,(\neg\neg_i)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg v}\,(\neg_i)\; x}{\neg\neg\neg v \to \neg v}\,(\to_i)\; y$$

- $\vdash_M \neg\neg\bot \to \bot$:

$$\dfrac{\dfrac{[\neg\neg\bot]^y \qquad \dfrac{[\bot]^x}{\neg\bot}\,(\neg_i)\ x}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg\bot \to \bot}\,(\to_i)\ y$$

(Passo Indutivo) considera fórmulas da forma ϕ do fragmento negativo, das formas: $\neg\psi$, $\psi \wedge \varphi$, e $\psi \to \varphi$. O caso $\phi \equiv \neg\psi$ demonstra-se da mesma forma que o caso $\neg v$. A questão consiste em demonstrar os casos $\phi \equiv \psi \wedge \varphi$ e $\phi \equiv \psi \to \varphi$.

(a) (3 pontos) **Caso** $\phi \equiv \psi \wedge \varphi$. Deve-se demonstrar que $\vdash_M \neg\neg(\psi \wedge \varphi) \to (\psi \wedge \varphi)$. Para isso suponha a existência de uma derivação ∇_0 para $\neg\neg(\psi \wedge \varphi) \vdash_M \neg\neg\psi \wedge \neg\neg\varphi$. Neste caso, por hipótese de indução existem derivações ∇_1 e ∇_2 para $\vdash_M \neg\neg\psi \to \psi$ e $\vdash_M \neg\neg\varphi \to \varphi$, respectivamente. **Usando $\boldsymbol{\nabla_0}$, $\boldsymbol{\nabla_1}$ e $\boldsymbol{\nabla_2}$ construa a derivação minimal para $\boldsymbol{\vdash_M \neg\neg(\psi \wedge \varphi) \to (\psi \wedge \varphi)}$.**

(b) (3 pontos) **Caso** $\phi \equiv \psi \to \varphi$. Deve-se demonstrar que $\vdash_M \neg\neg(\psi \to \varphi) \to (\psi \to \varphi)$. Para isso suponha a existência de uma derivação ∇_0 para $\neg\neg(\psi \to \varphi) \vdash_M (\neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi)$. Neste caso, como no anterior, existem derivações ∇_1 e ∇_2 para $\vdash_M \neg\neg\psi \to \psi$ e $\vdash_M \neg\neg\varphi \to \varphi$, respectivamente. **Usando $\boldsymbol{\nabla_0}$ e (apenas) $\boldsymbol{\nabla_2}$ construa a derivação minimal para $\boldsymbol{\vdash_M \neg\neg(\psi \to \varphi) \to (\psi \to \varphi)}$.**

(a) **Caso** $\phi \equiv (\psi \wedge \varphi)$.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\neg(\psi \wedge \varphi)]^z \\ \nabla_0 \\ \neg\neg\psi \wedge \neg\neg\varphi\end{array}}{\neg\neg\psi}\,(\wedge_e) \\ \nabla_{1\,(\text{h.i.})} \\ \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\neg(\psi \wedge \varphi)]^z \\ \nabla_0 \\ \neg\neg\psi \wedge \neg\neg\varphi\end{array}}{\neg\neg\varphi}\,(\wedge_e) \\ \nabla_{2\,(\text{h.i.})} \\ \varphi\end{array}}{\psi \wedge \varphi}\,(\wedge_i)}{\neg\neg(\psi \wedge \varphi) \to (\psi \wedge \varphi)}\,(\to_i)\ z$$

(b) **Caso** $\phi \equiv (\psi \to \varphi)$.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\neg(\psi \to \varphi)]^z \\ \nabla_0 \\ \neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi\end{array} \qquad \dfrac{[\psi]^x}{\neg\neg\psi}\,(\neg\neg_i)}{\neg\neg\varphi}\,(\to_e) \\ \nabla_{2\,(\text{h.i.})} \\ \varphi\end{array}}{(\psi \to \varphi)}\,(\to_i)\ x}{\neg\neg(\psi \to \varphi) \to (\psi \to \varphi)}\,(\to_i)\ z$$

2. (2 pontos) Demonstre que a Lei de Peirce $(((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi)$, é um teorema estritamente clássico; para isso apresente uma derivação de $\neg\neg\varphi \to \varphi$ que supõe a Lei de Peirce e usa unicamente regras intuicionistas.

   Ajuda: suponha a seguinte instância da Lei de Peirce: $((\varphi \to \bot) \to \varphi) \to \varphi$. Note também que de $\neg\varphi = \varphi \to \bot$ e $\neg\neg\varphi = (\varphi \to \bot) \to \bot$ pode ser derivada intuicionistamente a premissa $((\varphi \to \bot) \to \varphi)$ dessa instância da Lei de Peirce, descarregando apenas $\varphi \to \bot$; i.e., $\neg\neg\varphi \vdash_I (\varphi \to \bot) \to \varphi$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg\varphi = (\varphi \to \bot) \to \bot]^u \qquad [\neg\varphi = \varphi \to \bot]^v}{\bot}\,(\to_e)}{\varphi}\,(\bot_e)}{(\varphi \to \bot) \to \varphi}\,(\to_i)\, v \qquad ((\varphi \to \bot) \to \varphi) \to \varphi \text{ (L.Peirce)}}{\varphi}\,(\to_e)}{\neg\neg\varphi \to \varphi}\,(\to_i)\, u$$

3. Sejam Γ e φ um conjunto e uma fórmula da lógica proposicional, respectivamente. Deseja-se demonstrar o teorema de Glivenko: $\Gamma \vdash_C \varphi$ implica $\Gamma \vdash_I \neg\neg\varphi$. A demonstração usa indução na derivação de $\Gamma \vdash_C \varphi$. Os casos considerados no passo indutivo da demonstração analizam a regra do cálculo utilizada no último passo da derivação. Assim, por exemplo, se o último passo é uma aplicação da regra $(\to_e)$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \nabla \\ \varphi_1 \to \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma \\ \nabla \\ \varphi_1\end{array}}{\varphi}\,(\to_e)$$

   Então, por hipótese de indução, tem-se $\Gamma \vdash_I \neg\neg\varphi_1$ e $\Gamma \vdash_I \neg\neg(\varphi_1 \to \varphi)$, e se pode concluir como segue:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \nabla_{\text{(i.h.)}} \\ \neg\neg(\varphi_1 \to \varphi)\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \nabla_{\text{(i.h.)}} \\ \neg\neg\varphi_1\end{array} \qquad \dfrac{[\varphi_1 \to \varphi]^x \qquad [\neg\varphi]^y}{\neg\varphi_1}\,\text{MT}}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg(\varphi_1 \to \varphi)}\,(\neg_i)\, x}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\neg\varphi}\,(\neg_i)\, y$$

   (a) (2 pontos) Prove o caso da análise indutiva em que a derivação $\Gamma \vdash_C \varphi$ finaliza numa aplicação da regra (PBC) :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \quad [\neg\varphi]^x \\ \nabla \\ \bot\end{array}}{\varphi}\ (\text{PBC})\ x$$

Ajuda: note que por hipótese de indução tem-se uma derivação intuicionista ∇ para $\Gamma, \neg\varphi \vdash_I \neg\neg\bot$.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\ [\neg\varphi]^y\\ \nabla_{\text{(i.h.)}}\\ \neg\neg\bot\end{array} \qquad \dfrac{[\bot]^x}{\neg\bot}\ (\neg_i)\ x}{\bot}\ (\neg_e)}{\neg\neg\varphi}\ (\neg_i)\ y$$

Tabela 1: Cálculo de dedução natural para a lógica proposicional

$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge_e) \qquad \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ (\wedge_e)$
$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i) \qquad \dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i)$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]^v\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\vee_e)\ u, v$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i)\ u$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to_e)$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ (\neg_i)\ u$	$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg_e)$
$\dfrac{\bot}{\varphi}\ (\bot_e)$	$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^u\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\varphi}\ (\text{PBC})\ u$