

LÓGICA COMPUTACIONAL
GABARITO DA PRIMEIRA PROVA
 TÓPICOS: LÓGICA PROPOSICIONAL
 SEMÂNTICA E DEDUÇÃO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS, UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
 18 DE SETEMBRO DE 2019
 PROF. MAURICIO AYALA-RINCÓN

Nome:	Matrícula:
-------	------------

Duração: 1h40m; Início: 19:05; Fim: 20:45; Duas páginas, Três questões

Sobre respostas: as provas devem ser elaboradas em dedução natural, apresentadas como árvores de derivação e devem incluir o nome de cada regra utilizada em cada passo da derivação.

Considere em todas suas derivações o cálculo da lógica proposicional clássica, **exatamente** como apresentado na Tabela 1, utilizando a regra clássica ($\neg\neg_e$) de eliminação da dupla negação.

Table 1: REGRAS DE DEDUÇÃO NATURAL PARA LÓGICA PROPOSICIONAL (CLÁSSICA)

introduction rules	elimination rules
$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} (\wedge_i)$	$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} (\wedge_e)$
$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} (\vee_i)$	$\frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{c} [\varphi]^u \\ \vdots \\ \chi \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi]^v \\ \vdots \\ \chi \end{array}}{\chi} (\vee_e) u, v$
$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i) u$	$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} (\rightarrow_e)$
$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^u \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg\varphi} (\neg_i) u$	$\frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\perp} (\neg_e)$
	$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi} (\neg\neg_e)$

1. (3.0 pontos)

Construa deduções para demonstrar que as seguintes regras são deriváveis:

(a) (1.5 ponto) Prova por contradição ou $\boxed{\frac{[\neg\varphi]^u}{\frac{\perp}{\varphi}} \text{ (PBC) } u}$

$$\frac{[\neg\varphi]^u}{\frac{\perp}{\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}} \text{ } (\neg_i), u \text{ } (\neg\neg_e)}$$

(b) (1.5 ponto) Lei do meio (ou do terceiro) excluído ou $\boxed{\frac{}{(\varphi \vee \neg\varphi)} \text{ LEM}}$

$$\frac{\frac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^u}{\frac{\perp}{\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)} \text{ } (\neg_e)}{\frac{[\varphi]^v}{(\varphi \vee \neg\varphi)} \text{ } (\vee_i)} \text{ } (\neg_i), v \text{ } (\vee_i)}{\frac{[\neg(\varphi \vee \neg\varphi)]^u}{\frac{\perp}{\varphi \vee \neg\varphi} \text{ } (\neg_e)}{\frac{\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)}{\varphi \vee \neg\varphi} \text{ } (\neg\neg_e)} \text{ } (\neg_i) u \text{ } (\neg_e)$$

2. (4.0 pontos) Construa derivações para a seguinte versão da Lei de De Morgan

$$\boxed{(\varphi \wedge \psi) \dashv\vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)}$$

(a) (2.0 pontos) $(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

$$\frac{[\neg\varphi \vee \neg\psi]^u}{\frac{\frac{\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \text{ } (\wedge_e) \text{ } [\neg\varphi]^x \text{ } (\neg_e)}{\perp} \text{ } (\vee_e) \text{ } x, y}{\frac{\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \text{ } (\wedge_e) \text{ } [\neg\psi]^y \text{ } (\neg_e)}{\perp} \text{ } (\vee_e) \text{ } x, y} \text{ } (\neg_i), u} \text{ } (\neg_e)$$

(b) (2.0 pontos) $(\varphi \wedge \psi) \dashv\vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

$$\frac{\frac{\frac{\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)}{\frac{\perp}{\neg\neg\varphi} \text{ } (\neg_i) \text{ } x}{\varphi} \text{ } (\neg\neg_e)}{\frac{[\neg\varphi]^x}{(\neg\varphi \vee \neg\psi)} \text{ } (\vee_i)} \text{ } (\neg_e) \text{ } \frac{\frac{\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)}{\frac{\perp}{\neg\neg\psi} \text{ } (\neg_i) \text{ } y}{\psi} \text{ } (\neg\neg_e)}{\frac{[\neg\psi]^y}{(\neg\varphi \vee \neg\psi)} \text{ } (\vee_i)} \text{ } (\neg_e)}{\frac{}{(\varphi \wedge \psi)} \text{ } (\wedge_i)}$$

3. (3.0 pontos) Demonstre de duas maneiras que a Lei de Peirce

$$\boxed{((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi}$$

é válida.

(a) (1.0 ponto) Semanticamente.

φ	ψ	$(\varphi \rightarrow \psi)$	$((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$	$((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

(b) (2.0 ponto) Por dedução natural, utilizando o cálculo fornecido.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{[\neg\phi]^u}{\neg\psi \rightarrow \neg\phi} (\rightarrow_i) \emptyset \quad [\neg\psi]^v}{\neg\phi} (\rightarrow_e)}{\perp} (\neg_e) \quad \frac{[\phi]^w}{\neg\neg\psi} (\neg_e)}{\psi} (\neg_i) v \\
 \frac{\psi}{\phi \rightarrow \psi} (\rightarrow_i) w \\
 \frac{[\neg\phi]^u \quad \frac{[\!(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi]\!]^x}{\phi} (\rightarrow_e)}{\perp} (\neg_e) \\
 \frac{\perp}{\neg\neg\phi} (\neg_i) u \\
 \frac{\neg\neg\phi}{\phi} (\neg\neg_e) \\
 \frac{\phi}{((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \phi) \rightarrow \phi} (\rightarrow_i) x
 \end{array}$$