Lógica Computacional
Gabarito Primeira Prova

Tópicos: Lógica de predicados
Semântica e Dedução

Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília
02 de dezembro de 2009
Prof. Mauricio Ayala-Rincón

Dedução natural

1. (6.0 pontos) Considere as seguintes duas derivações no cálculo de dedução natural para a lógica de predicados:

- $$\Delta_1 \;=\; \left\{ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi[x/y]]^v}{\exists x\neg\varphi}\,(\exists i) \quad [\neg\exists x\neg\varphi]^u}{\bot}\,(\neg e)}{\varphi[x/y]}\,(PBC), v}{\forall x\,\varphi}\,(\forall i) \quad [\neg\forall x\,\varphi]^w}{\bot}\,(\neg e)}{\exists x\,\neg\varphi}\,(PBC), u}{\neg\forall x\,\varphi \to \exists x\,\neg\varphi}\,(\to i), w \right.$$

- $$\Delta_2 \;=\; \left\{ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x\,\varphi]^v}{\varphi[x/y]}\,(\forall e) \quad [\neg\varphi[x/y]]^w}{\bot}\,(\neg e) \quad [\exists x\,\neg\varphi]^u}{\bot}\,(\exists e), w}{\neg\forall x\,\varphi}\,(\neg i), v}{\exists x\,\neg\varphi \to \neg\forall x\,\varphi}\,(\to i), u \right.$$

Utilize as derivações precedentes, conjuntamente com a derivação natural da propriedade de contra-recíproco na lógica proposicional, apresentada embaixo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \to B]^u \quad [A]^v}{B}\,(\to e) \quad [\neg B]^w}{\bot}\,(\neg e)}{\neg A}\,(\neg i), v}{\neg B \to \neg A}\,(\to i), w}{(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}\,(\to i), u$$

para apresentar derivações de:

(a) (3.0 pontos) $\forall x\,\varphi \dashv\vdash \neg\exists x\,\neg\varphi$

(b) (3.0 pontos) $\exists x\,\varphi \dashv\vdash \neg\forall x\,\neg\varphi$

R/

(a) $\vdash \forall x\,\varphi \to \neg\exists x\,\neg\varphi$:

$$
\dfrac{\overset{\Delta_2}{\exists x\,\neg\varphi \to \neg\forall x\,\varphi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x\,\neg\varphi \to \neg\forall x\,\varphi]^u \quad [\exists x\,\neg\varphi]^v}{\neg\forall x\,\varphi}\,(\to e) \qquad [\forall x\,\varphi]^w}{\bot}\,(\neg e)}{\neg\exists x\,\neg\varphi}\,(\neg i), v}{\forall x\,\varphi \to \neg\exists x\,\neg\varphi}\,(\to i), w}{(\exists x\,\neg\varphi \to \neg\forall x\,\varphi) \to (\forall x\,\varphi \to \neg\exists x\,\neg\varphi)}\,(\to i), u}{\forall x\,\varphi \to \neg\exists x\,\neg\varphi}\,(\to e)
$$

$\vdash \neg\exists x\,\neg\varphi \to \forall x\,\varphi$:

$$
\dfrac{\overset{\Delta_1}{\neg\forall x\,\varphi \to \exists x\,\neg\varphi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\forall x\,\varphi \to \exists x\,\neg\varphi]^u \quad [\neg\forall x\,\varphi]^v}{\exists x\,\neg\varphi}\,(\to e) \qquad [\neg\exists x\,\neg\varphi]^w}{\bot}\,(\neg e)}{\forall x\,\varphi}\,PBC, v}{\neg\exists x\,\neg\varphi \to \forall x\,\varphi}\,(\to i), w}{(\neg\forall x\,\varphi \to \exists x\,\neg\varphi) \to (\neg\exists x\,\neg\varphi \to \forall x\,\varphi)}\,(\to i), u}{\neg\exists x\,\neg\varphi \to \forall x\,\varphi}\,(\to e)
$$

(b) $\exists x\,\varphi \dashv \neg\forall x\,\neg\varphi$:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi[x/y]]^v}{\exists x\varphi}\,(\exists i) \quad [\neg\exists x\varphi]^u}{\bot}\,(\neg e)}{\neg\varphi[x/y]}\,(\neg i), v}{\forall x\,\neg\varphi}\,(\forall i) \qquad [\neg\forall x\,\neg\varphi]^w}{\bot}\,(\neg e)}{\exists x\,\varphi}\,(PBC), u}{\neg\forall x\,\neg\varphi \to \exists x\,\varphi}\,(\to i), w
$$

$\exists x\,\varphi \vdash \neg\forall x\,\neg\varphi$:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x\,\neg\varphi]^v}{\neg\varphi[x/y]}\,(\forall e) \quad [\varphi[x/y]]^w}{\bot}\,(\neg e) \quad [\exists x\,\varphi]^u}{\bot}\,(\exists e), w}{\neg\forall x\,\neg\varphi}\,(\neg i), v}{\exists x\,\varphi \to \neg\forall x\,\neg\varphi}\,(\to i), u
$$

2. (4.0 pontos) Considere as seguintes derivações no cálculo de dedução natural para a lógica de predicados, onde ϕ e ψ são fórmulas:

- $$
\Gamma_1 \;=\; \left\{ \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi[x/x_0]]^w}{\phi[x/x_0] \vee \psi[x/x_0] \equiv (\phi \vee \psi)[x/x_0]}\,(\vee\, i)}{\exists x(\phi \vee \psi)}\,(\exists\, i) \qquad [\exists x\phi]^v}{\exists x(\phi \vee \psi)}\,(_?_\,,\ _?_) \right.
$$

•
$$\Gamma_2 = \left\{ \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\psi[x/x_0]]^{w'}}{\phi[x/x_0] \vee \psi[x/x_0] \equiv (\phi \vee \psi)[x/x_0]}\,(\vee i)}{\exists x(\phi \vee \psi)}\,(\exists i) \qquad [\exists x \psi]^{v'}}{\exists x(\phi \vee \psi)}\,(\_?\_,\ \_?\_) \right.$$

(a) (1.0 ponto) Qual a regra e fórmula descarregadas no último passo das derivações precedentes: ($\_?\_$, $\_?\_$)?

(b) (3.0 pontos) Utilize as derivações Γ_1 e Γ_2 para provar que $\exists x\phi \vee \exists x\psi \vdash \exists x(\phi \vee \psi)$.

R/

(a) $(\exists e, w)$ e $(\exists e, w')$, respectivamente.

(b)

$$\dfrac{[\exists x\phi \vee \exists x\psi]^u \qquad \begin{array}{c}[\exists x\phi]^v\\ \Gamma_1\\ \exists x(\phi \vee \psi)\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\exists x\psi]^{v'}\\ \Gamma_2\\ \exists x(\phi \vee \psi)\end{array}}{\exists x(\phi \vee \psi)}\,(\vee e, v, v')$$

Semântica e indecidibilidade

3. (2.0 pontos) Uma instância do problema de correspondência de Post consiste de duas sequências de igual comprimento de palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$:

$$s_1, s_2, \ldots s_k$$

$$t_1, t_2, \ldots t_k$$

O problema é determinar se existe uma sequência finita de índices $i_1, i_2, \ldots, i_n$, $1 \leq i_j \leq k$, tais que

$$s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_n} \equiv t_{i_1} t_{i_2} \cdots t_{i_n}$$

Explique a utilização do problema de correspondência de Post para demonstrar que a lógica de predicados é indecidível. Siga estritamente o seguinte roteiro:

(a) (1.0 ponto) Descreva em dez linhas como instâncias do problema de correspondência de Post podem ser reduzidas a problemas de decidibilidade de fórmulas lógicas.

(b) (1.0 Ponto) Indique como a existência de essas reduções de instâncias do problema de correspondência de Post em instâncias do problema de decidibilidade de fórmulas lógicas permitem concluir a indecidibilidade da lógica de predicados.

R/

1. Instâncias do PCP são transformadas em fórmulas da forma:

$$\begin{array}{l}\Phi_1 := \bigwedge_{i=1}^{k} P(f_{s_i}(e), f_{t_i}(e))\\ \Phi_2 := \forall v \forall w (P(v, w) \rightarrow \bigwedge_{i=1}^{k} P(f_{s_i}(v), f_{t_i}(w))\\ \Phi_3 := \exists z P(z, z)\end{array}$$

e representa a palavra vazia sobre Σ; f_0 e f_1 são funções unárias que representam os símbolos 0 e 1, respectivamente; f_s abrevia a composição destas funções segundo os símbolos da palavra s. Assim, Φ_1 expressa que é possível construir sequências unitárias s_i t_i; Φ_2, que se u e v são sequências construíveis, então pode ser concatenadas com s_i t_i; e Φ_3 somente será verdadeira se existem sequências que gerem uma mesma palavra z.

2. Sempre que para uma instância do PCP a fórmula Φ_3 é verdadeira se e somente se existe solução da instância do problema, se fosse possível decidir a validade na lógica de predicados, seria possível decidir se Φ_3 é verdadeira, o que contradiz o fato de que PCP é um problema indecidível. Logo a lógica de predicados não pode ser decidível.

Veja também o livro-texto (Seção 2.5, M. Huth & M. Ryan, *Logic in Computer Science*, CUP, 2004).