Lógica Computacional
Gabarito da Segunda Prova

Tópicos: Lógica de Predicados, Dedução e Semântica

Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília
21 de julho de 2010
Prof. Mauricio Ayala Rincón
Monitor: André Figueira Lourenço

Nome:	Matrícula:

Duração: 100 min.
Início: 16:00; Fim: 17:45
Duas Páginas, três questões

DEDUÇÃO NATURAL

1. (4.0 pontos) Na lógica proposicional, definimos as Leis de De Morgan como sendo:

   $i.\quad \neg(\phi\vee\psi)\equiv(\neg\phi)\wedge(\neg\psi)$ $\qquad\qquad ii.\quad \neg(\phi\wedge\psi)\equiv(\neg\phi)\vee(\neg\psi)$

   Na lógica de predicados essas duas leis são válidas existencial e universalmente.

   Prove o caso existencial utilizando árvores de dedução natural e indicando em cada passo da derivação a regra utilizada:

   (a) (2.0 pontos) $\exists x\,(\neg(\phi\vee\psi))\vdash\exists x\,((\neg\phi)\wedge(\neg\psi))$
   (b) (2.0 pontos) $\exists x\,((\neg\phi)\wedge(\neg\psi))\vdash\exists x\,(\neg(\phi\vee\psi))$

   R/

   (a) $\exists x\,(\neg(\phi\vee\psi))\vdash\exists x\,(\neg\phi\wedge\neg\psi)$

$$\dfrac{\exists x\,(\neg(\phi\vee\psi)) \qquad \dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\phi\vee\psi)[x/x_0]]^a \quad \begin{matrix}\dfrac{[\phi[x/x_0]]^u}{\phi[x/x_0]\vee\psi[x/x_0]}\,\vee i\\ \equiv\\ (\phi\vee\psi)[x/x_0]\end{matrix}}{\bot}\,\neg e}{\neg\phi[x/x_0]}\,\neg i,u \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(\phi\vee\psi)[x/x_0]]^a \quad \begin{matrix}\dfrac{[\psi[x/x_0]]^v}{\phi[x/x_0]\vee\psi[x/x_0]}\,\vee i\\ \equiv\\ (\phi\vee\psi)[x/x_0]\end{matrix}}{\bot}\,\neg e}{\neg\psi[x/x_0]}\,\neg i,v}{\neg\phi[x/x_0]\wedge\neg\psi[x/x_0]}\,\wedge i\\ \equiv\\ (\neg\phi\wedge\neg\psi)[x/x_0]\end{matrix}}{\exists x\,(\neg\phi\wedge\neg\psi)}\,\exists x\, i}{\exists x\,(\neg\phi\wedge\neg\psi)}\,\exists x\, e,a$$

(b) $\exists x\,(\neg\phi \wedge \neg\psi) \vdash \exists x\,(\neg(\phi \vee \psi))$

$$\dfrac{\exists x\,(\neg\phi\wedge\neg\psi) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\,(\phi\vee\psi)[x/x_0]\,]^b\\ \equiv \\ \phi[x/x_0]\vee\psi[x/x_0]\end{matrix} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\,(\neg\phi\wedge\neg\psi)[x/x_0]\,]^a\\ \equiv\\ \neg\phi[x/x_0]\wedge\neg\psi[x/x_0]\end{matrix}}{\neg\phi[x/x_0]}\,\wedge e_1 \quad [\,\phi[x/x_0]\,]^u}{\bot}\,\neg e \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\,(\neg\phi\wedge\neg\psi)[x/x_0]\,]^a\\ \equiv\\ \neg\phi[x/x_0]\wedge\neg\psi[x/x_0]\end{matrix}}{\neg\psi[x/x_0]}\,\wedge e_2 \quad [\,\psi[x/x_0]\,]^v}{\bot}\,\neg e}{\bot}\,\vee e, u, v}{\neg(\phi\vee\psi)[x/x_0]}\,\neg i, b}{\exists x\,(\neg(\phi\vee\psi))}\,\exists x\, i}{\exists x\,(\neg(\phi\vee\psi))}\,\exists x\, e, a$$

2. (4.0 pontos) A lógica de primeira ordem diferencia-se da lógica proposicional principalmente devido à presença dos predicados (e não mais proposições) e dos quantificadores. Tais elementos dão um poder de expressão maior a esse tipo de linguagem lógica. Isso acaba gerando, como em toda linguagem expressiva, diversas maneiras equivalentes de se expressar um determinado fato.

   Exemplo: *"Não existe um objeto que não sofra ação da força gravitacional."*

   - A afirmação acima é equivalente a dizer: Todos os objetos sofrem ação da força gravitacional.
   - Seja um predicado ϕ interpretado como: "x sofre ação da força gravitacional" podemos expressar a expressão equivalente como $\neg\exists x\,\neg\phi \equiv \forall x\,\phi$.

   Prove os seguintes sequentes utilizando árvores de dedução natural e indicando em cada derivação o nome da regra utilizada:

   (a) (2.0 pontos) $\forall x\,\phi \vdash \neg\exists x\,\neg\phi$

   (b) (2.0 pontos) $\neg\exists x\,\neg\phi \vdash \forall x\,\phi$

R/

(a) $\forall x\,\phi \vdash \neg\exists x\,\neg\phi$

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x\,\neg\phi]^u \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x\,\phi}{\phi[x/x_0]}\,\forall x\, e \quad [\,\neg\phi[x/x_0]\,]^v}{\bot}\,\neg e}{\bot}\,\exists x\, e, v}{\neg\exists x\neg\phi}\,\neg i, u$$

(b) $\neg\exists x\,\neg\phi \vdash \forall x\,\phi$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\,\neg\phi[x/x_0]\,]^u}{\exists x\,\neg\phi}\,\exists x\, i \quad \neg\exists x\,\neg\phi}{\bot}\,\neg e}{\phi[x/x_0]}\,PBC, u}{\forall x\,\phi}\,\forall x\, i$$

SEMÂNTICA

3. (2.0 pontos) A lógica de predicados é mais expressiva que a lógica proposicional, mas também tem suas limitações. Neste sentido, os teoremas de Löwenheim-Skolem e de compacidade jogam um rôle importante e caraterizam a semântica das linguagens de primeira ordem. Em particular não é possível expressar a noção de finito e contável infinito na linguagem desta lógica.

   Demonstre, utilizando o teorema de compacidade que não é possível expressar em lógica de predicados a noção de *alcanzabilidade* em grafos: não existe uma fórmula da lógica de predicados ϕ com u e v como suas únicas variáveis livres e R como seu único símbolo de predicado (binário) tal que

ϕ seja verdadeiro em grafos dirigidos se, e somente se existe um caminho entre os nós asssociados com as variáveis u e v.

Ajuda: Para uma demonstração por contradição, suponha existe uma fórmula ϕ que expresse *alcanzabilidade*. Sejam c e d símbolos de constante e considere as fórmulas $\phi_n, n \in \mathbb{N}$, definidas por:

$$\phi_n := \begin{cases} c = d, & \text{se } n = 0; \\ \exists x_1 \ldots \exists x_{n-1}(R(c, x_1) \wedge \cdots \wedge R(x_{n-1}, d)) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Observe então, que o conjunto de fórmulas $\Phi := \{\phi\} \cup \{\neg\phi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ contradiz o teorema de compacidade.

R/ Todo subconjunto finito $\Phi_0 \subset \Phi$ é satisfazível:

Seja k o máximo índice tal que $\neg\phi_k$ está em Φ_0. Se ϕ não está em Φ_0 um grafo sem caminhos entre os nós associados com c e d é modelo de Φ_0. Caso ϕ está em Φ_0, basta considerar como modelo de Φ_0 um grafo que contenha um caminho de comprimento maior que k entre os nós associados com c e d, mas não caminhos de comprimento menor que k.

Dessa forma, demonstra-se que todo subconjunto finto de Φ é satisfazível.

Pelo teorema de compacidade Φ deve ser satisfazível, mas isso é contraditório, conforme Φ é claramente insatisfazível. Dessa forma a existência da fórmula ϕ é impossível.