Lógica Computacional
Segunda Prova

Tópicos: Lógica de Predicados, Dedução e Semântica

Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília
12 de janeiro de 2011
Prof. Mauricio Ayala Rincón
Monitor: André Figueira Lourenço

Nome:	Matrícula:

Duração: 100 min.
Início: 16:00; Fim: 17:45
Duas Páginas, três questões

DEDUÇÃO NATURAL

1. (4.0 pontos) A lógica de primeira ordem diferencia-se da lógica proposicional principalmente devido à presença dos predicados (e não mais proposições) e dos quantificadores. Tais elementos dão um poder de expressão maior a esse tipo de linguagem lógica. Isso acaba gerando, como em toda linguagem expressiva, diversas maneiras equivalentes de se expressar um determinado fato.

   Exemplo: *"Nem todo sistema operacional é veloz."*

   - A afirmação acima é equivalente a dizer: Existe um sistema operacional que não é veloz.
   - Seja um predicado ϕ interpretado como: "x é um sistema operacional veloz", podemos expressar a expressão equivalente como

   $$\exists x\, \neg\phi \equiv \neg\forall x\, \phi$$

   Prove os seguintes sequentes utilizando árvores de dedução natural e indicando em cada passo da derivação qual a regra de dedução utilizada:

   (a) (2.0 pontos) $\neg\forall x\, \phi \vdash \exists x\, \neg\phi$
   (b) (2.0 pontos) $\exists x\, \neg\phi \vdash \neg\forall x\, \phi$

R/

(a) $\neg\forall x\,\phi \vdash \exists x\,\neg\phi$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\phi[x/x_0]\,]^u}{\exists x\,\neg\phi}\,\exists x\, i \qquad [\neg\exists x\,\neg\phi]^v}{\bot}\,\neg e}{\phi[x/x_0]}\,PBC, u}{\forall x\,\phi}\,\forall x\, i \qquad \neg\forall x\,\phi}{\bot}\,\neg e}{\exists x\,\neg\phi}\,PBC, v$$

(b) $\exists x\,\neg\phi \vdash \neg\forall x\,\phi$

$$\dfrac{\exists x\,\neg\phi \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\phi[x/x_0]\,]^u \qquad \dfrac{[\forall x\,\phi]^v}{\phi[x/x_0]}\,\forall x\, e}{\bot}\,\neg e}{\neg\forall x\,\phi}\,\neg i, v}{\neg\forall x\,\phi}\,\exists x\, e, u$$

2. (4.0 pontos) Prove os seguintes sequentes considerando que x não ocorre livre em ψ:

   (a) (2.0 pontos) $(\exists x\,\phi) \vee \psi \;\vdash\; \exists x\,(\phi \vee \psi)$

   (b) (2.0 pontos) $\exists x\,(\phi \vee \psi) \;\vdash\; (\exists x\,\phi) \vee \psi$

R/

$$\dfrac{(\exists x\,\phi)\vee\psi \qquad \dfrac{[\exists x\,\phi]^u \qquad \dfrac{\dfrac{[\,\phi[x/x_0]\,]^a}{\phi[x/x_0]\vee\psi \equiv (\phi\vee\psi)[x/x_0]}\,\vee i}{\exists x\,(\phi\vee\psi)}\,\exists x\, i}{\exists x\,(\phi\vee\psi)}\,\exists x\, e, a \qquad \dfrac{\dfrac{[\psi]^v}{\phi[x/x_1]\vee\psi \equiv (\phi\vee\psi)[x/x_1]}\,\vee i}{\exists x\,(\phi\vee\psi)}\,\exists x\, i}{\exists x\,(\phi\vee\psi)}\,\vee e, u, v$$

$$\dfrac{\exists x\,(\phi\vee\psi) \qquad \dfrac{[\,(\phi\vee\psi)[x/x_0]\,]^u \equiv \phi[x/x_0]\vee\psi \qquad \dfrac{\dfrac{[\,\phi[x/x_0]\,]^a}{(\exists x\,\phi)}\,\exists x\, i}{(\exists x\,\phi)\vee\psi}\,\vee i \qquad \dfrac{[\psi]^b}{(\exists x\,\phi)\vee\psi}\,\vee i}{(\exists x\,\phi)\vee\psi}\,\vee e, a, b}{(\exists x\,\phi)\vee\psi}\,\exists x\, e, u$$

SEMÂNTICA

3. (2.0 pontos) A lógica de predicados é mais expressiva que a lógica proposicional, mas também tem suas limitações. Neste sentido, os teoremas de Löwenheim-Skolem e de compacidade jogam um rôle importante e caraterizam a semântica das linguagens de primeira ordem. Em particular não é possível expressar a noção de finito e contável infinito na linguagem desta lógica.

   Enuncie e demonstre o teorema de Löwenheim-Skolem.

   Ajuda: O teorema estabelece que para qualquer sentência da lógica de predicados ψ que tenha modelos de cardinalidade pelo menos n, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existem modelos inifinitos. Considere o conjunto de fórmulas

$$\Gamma := \{\psi\} \cup \{\phi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

   onde

$$\phi_n := \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{1\leq i<j\leq n} \neg(x_i = x_j)$$

   e utilize o teorema de compacidade.

   R/ A fórmula

$$\phi_n := \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{1\leq i<j\leq n} \neg(x_i = x_j)$$

especifica a existência de pelo menos n elementos.

Observe primeiro que qualquer subconjunto finito $\Gamma_0 \subset \Gamma$ é satisfazível:

Seja k maior que o índice de qualquer ϕ_n em Γ_0. São dois casos a considerar.

- Caso ψ não está em Γ_0, selecione qualquer modelo de cardinalidade k. Este satisfará Γ_0.
- Caso ψ está em Γ_0, selecione um modelo de ψ de cardinalidade maior ou igual que k. Este satisfará Γ_0.

Dessa forma, conclui-se que qualquer subconjunto finito de Γ é satisfazível, o que implica, pelo teorema de compacidade, que Γ o é.

Mas um modelo de Γ deve ter cardinalidade infinita, sempre que todas as fórmulas ϕ_n para $n \in \mathbb{N}$, valem nesse modelo. Dessa forma (como ψ também está em Γ), esse modelo infinito é também modelo da fórmula ϕ.