Lógica Computacional 1
Segunda Prova

Tópicos: Lógica de Predicados - dedução e semântica
Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília
Departamento de Ciência da Computação

1 de julho de 2013
Prof. Mauricio Ayala Rincón

Duração: 100 min
Início: 16:00h - Término: 17:45h

Nome:	Matrícula:

1. (6 pontos) Completar-se-ão derivações utilizando o cálculo de Gentzen e o cálculo de dedução natural para demonstrar que $\neg\forall x\phi$ e $\exists x\neg\phi$ são equivalentes; i.e.,

$$\vdash_G \neg\forall x\phi \Leftrightarrow \exists x\neg\phi \text{ e}$$

$$\neg\forall x\,\phi \;\dashv\vdash_N\; \exists x\,\neg\phi.$$

   (a) (2 pontos) Embaixo é apresentada uma derivação à la Gentzen do sequente $\neg\forall x\phi \Rightarrow \exists x\neg\phi$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\phi[x/x_0] \Rightarrow \bot, \phi[x/x_0]}(Ax)}{\Rightarrow \phi[x/x_0] \to \bot, \phi[x/x_0]}(R_\to)}{\Rightarrow \exists x(\phi \to \bot), \phi[x/x_0]}(R_\exists)}{\Rightarrow \exists x(\phi \to \bot), \forall x\phi}(R_\forall) \qquad \dfrac{}{\bot \Rightarrow \exists x(\phi \to \bot)}(L_\bot)}{\forall x\phi \to \bot \Rightarrow \exists x(\phi \to \bot)}(L_\to)$$

   Construa uma derivação utilizando o cálculo de dedução natural para $\neg\forall x\phi \vdash \exists x\neg\phi$.

   R/

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg\phi[x/x_0]]^u$}
\RightLabel{$(\exists_i)$}
\UnaryInfC{$\exists_x\neg\phi$}
\AxiomC{$[\neg\exists_x\neg\phi]^v$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{(PBC) u}
\UnaryInfC{$\phi[x/x_0]$}
\RightLabel{$(\forall_i)$}
\UnaryInfC{$\forall_x\phi$}
\AxiomC{$\neg\forall_x\phi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{(PBC) v}
\UnaryInfC{$\exists_x\neg\phi$}
\end{prooftree}
$$

(b) (2 pontos) Embaixo é apresentada uma derivação utilizando o cálculo de dedução natural para $\exists x\, \neg\phi \vdash \neg\forall x\, \phi$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\exists_x\neg\phi$}
\AxiomC{$[\forall_x\phi]^v$}
\RightLabel{$(\forall_i)$}
\UnaryInfC{$\phi[x/x_0]$}
\AxiomC{$[\neg\phi[x/x_0]]^u$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ v$}
\UnaryInfC{$\neg\forall_x\phi$}
\RightLabel{$(\exists_e)\ u$}
\BinaryInfC{$\neg\forall_x\phi$}
\end{prooftree}
$$

Construa uma derivação à la Gentzen para o sequente $\exists x\neg\phi \Rightarrow \neg\forall x\phi$.

R/

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\phi[x/x_0] \Rightarrow \phi[x/x_0]\ \ (Ax)$}
\AxiomC{$\bot, \phi[x/x_0] \Rightarrow\ \ (L_\bot)$}
\RightLabel{$(L_\to)$}
\BinaryInfC{$\neg\phi[x/x_0], \phi[x/x_0] \Rightarrow$}
\RightLabel{$(R_\forall)$}
\UnaryInfC{$\neg\phi[x/x_0], \forall\phi \Rightarrow$}
\RightLabel{$(R_\exists)$}
\UnaryInfC{$\exists x\neg\phi,\ \forall x\phi \Rightarrow$}
\RightLabel{(RW)}
\UnaryInfC{$\exists x\neg\phi,\ \forall x\phi \Rightarrow \bot$}
\RightLabel{$(R_\to)$}
\UnaryInfC{$\exists x(\neg\phi) \Rightarrow \neg\forall x(\phi)$}
\end{prooftree}
$$

(c) (2 pontos) Das provas precedentes, pode-se inferir que uma das fórmulas:

$\neg\forall x\phi \ \to\ \exists x\neg\phi$ ou

$\exists x\, \neg\phi \ \to\ \neg\forall x\, \phi$

é um teorema intuicionista.

- Indique qual das fórmulas é intuicionista. Justifique sua resposta.

R/ a fórmula $\exists x\, \neg\phi \ \to\ \neg\forall x\, \phi$, sempre que na derivação de $\exists x\, \neg\phi \vdash \neg\forall x\, \phi$ são somente utilizadas regras do cálculo intuicionista.

2. (4 pontos)

(a) (3 pontos) Apresente uma prova de que *Modus Tollens* é um teorema da lógica intuicionista. Basta apresentar uma derivação intuicionista de MT seja no cálculo de dedução natural ou à la Gentzen; i.e., uma derivação intuicionista no cálculo de Gentzen para o sequente $\varphi \to \psi, \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$ ou uma derivação intuicionista no cálculo de dedução natural para $\varphi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi$.

R/

Em dedução natural:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi]^x \qquad (\phi \to \psi)}{\psi}\,(\to_e) \qquad (\neg\psi)}{\perp}\,(\neg_e)}{(\neg\phi)}\,(\neg_i)\; x$$

À la Gentzen:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(Ax)\ \ \varphi \Rightarrow \varphi \qquad \psi \Rightarrow \psi\ \ (Ax)}{\varphi \to \psi, \varphi \Rightarrow \psi}\,(L_\to) \qquad \perp, \varphi \to \psi, \varphi \Rightarrow \ \ (L_\perp)}{\varphi \to \psi, \neg\psi, \varphi \Rightarrow}\,(L_\to)}{\varphi \to \psi, \neg\psi, \varphi \Rightarrow \perp}\,(RW)}{\varphi \to \psi, \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi}\,(R_\to)$$

(b) (1 ponto) É a seguinte versão de Modus Tollens intuicionista? Justifique sua resposta.

$$\dfrac{\neg\psi \to \varphi, \quad \neg\varphi}{\psi}$$

R/ Denote a nova regra como (MT'). Ela pode ser facilmente derivada utilizando (PBC):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\psi]^u \quad \neg\psi \to \varphi}{\varphi}\,(\to_e) \qquad \neg\varphi}{\perp}\,(\neg_e)}{\psi}\,(\text{PBC})\; u$$

Mas ainda que a regra possa ser derivada utilizando (PBC) isso não implica que não seja intuicionista, conforme não elimina a possibilidade de existência de uma prova intuicionista.

A seguinte derivação permite inferir o sequente $\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$, que é estritamente clássico. Assim (MT') é uma regra não intuicionista.

Em dedução natural, temos a seguinte derivação:

$$\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]^u}{\neg\varphi \to \neg\varphi}\ (\to_i)\ u \qquad \neg\neg\varphi}{\varphi}\ \text{(MT')}$$

À la Gentzen, temos a seguinte derivação:

$$\dfrac{\dfrac{(Ax)\ \ \neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi}{\Rightarrow \neg\varphi \to \neg\varphi}\ (R_{\to}) \qquad \neg\varphi \to \neg\varphi,\ \neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi\ \text{(MT')}}{\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi}\ (\textsc{Cut})$$

Tabela 1: Regras do cálculo de Gentzen para a lógica de predicados

left rules	right rules
Axioms:	
$\Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta \ \ (Ax)$	$\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta \ \ (L_\bot)$
Structural rules:	
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (LWeakening)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\ (RWeakening)$
$\dfrac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (LContraction)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\ (RContraction)$
Logical rules:	
$\dfrac{\varphi_{i\in\{1,2\}}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\wedge)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}\ (R_\wedge)$
$\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\vee)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_{i\in\{1,2\}}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_1 \vee \varphi_2}\ (R_\vee)$
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\to)$	$\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi}\ (R_\to)$
$\dfrac{\varphi[x/t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall_x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\forall)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall_x \varphi}\ (R_\forall), \quad y \notin FV(\Gamma, \Delta)$
$\dfrac{\varphi[x/y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists_x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\exists), \quad y \notin FV(\Gamma, \Delta)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists_x \varphi}\ (R_\exists)$

Tabela 2: Regras de dedução natural para a lógica de predicados

introduction rules	elimination rules
$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge_e)$
$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i)$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]^v \\ \vdots \\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\vee_e)\ u, v$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i)\ u$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to_e)$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ (\neg_i)\ u$	$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg_e)$
$\dfrac{\varphi[x/x_0]}{\forall_x \varphi}\ (\forall_i)$	$\dfrac{\forall_x \varphi}{\varphi[x/t]}\ (\forall_e)$
$\dfrac{\varphi[x/t]}{\exists_x \varphi}\ (\exists_i)$	$\dfrac{\exists_x \varphi \qquad \begin{array}{c}[\varphi[x/x_0]]^u \\ \vdots \\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\exists_e)\ u$
	$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\varphi}\ (\text{PBC})\ u$