Lógica Computacional

Gabarito da Segunda Prova

Tópicos: Lógica de predicados
Semântica e Dedução

Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília
11 de Dezembro de 2013
Prof. Mauricio Ayala-Rincón
Estagiária de Docência: Ana Cristina Rocha Oliveira Valverde

Nome:	Matrícula:

Duração: 1h40m; Início: 16:05; Fim: 15:45; Duas páginas, Três questões
Sobre respostas: as provas devem ser elaboradas em dedução natural ou *à la Gentzen, apresentadas como árvores de derivação e devem incluir o nome de cada regra utilizada em cada passo da derivação.*

1. *(4 pontos) O sistema de dedução natural é equivalente ao cálculo de sequentes. Para o caso intuicionista, esta equivalência é estabelecida mostrando-se que qualquer prova em dedução natural pode ser simulada em cálculo de sequentes e vice-versa, i.e.,*

$$\Gamma \vdash_N \varphi \text{ se, e somente se } \vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$$

A prova de equivalência citada acima é feita por indução na estrutura da derivação. Abaixo vemos algumas provas críticas do passo indutivo.

(a) *(2 pontos) No sentido $\Gamma \vdash_N \varphi$ se $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$, demonstre que uma derivação que termina na aplicação da regra de corte (intuicionista) pode ser indutivamente transformada numa derivação no sistema de dedução natural:*

$$\frac{\begin{array}{c}\bigtriangledown_1\\ \Gamma \Rightarrow \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\bigtriangledown_2\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \varphi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\ (Cut)$$

By induction hypothesis there are natural derivations $\bigtriangledown_1'$ and $\bigtriangledown_2'$ for $\Gamma \vdash_N \psi$ and $\psi, \Gamma \vdash_N \varphi$. To obtain the desired natural derivation, all assumptions $[\psi]^u$ in $\bigtriangledown_2'$ are replaced by derivations of ψ using $\bigtriangledown_1'$:

$$\begin{array}{c}\bigtriangledown_1'\\ \psi\\ \bigtriangledown_2'\\ \varphi\end{array}$$

(b) *(2 pontos) No sentido $\Gamma \vdash_N \varphi$ implica $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$, demonstre que uma derivação natural para $\Gamma \vdash_N \varphi$ que finaliza numa aplicação de $(\exists_e)$ como abaixo pode ser indutivamente transformada numa derivação à la Gentzen.*

$$\dfrac{\begin{array}{c}\nabla_1 \\ [\exists_x \psi]^v\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi[x/y]]^u \\ \nabla_2 \\ \varphi\end{array}}{\varphi}\ (\exists_e)\ u$$

By induction hypothesis, there are derivations à la Gentzen ∇_1' and ∇_2' for the sequents $\Gamma \Rightarrow \exists_x \psi$ and $\psi[x/y], \Gamma \Rightarrow \varphi$, respectively. The derivation is built as below. Notice that $y \notin \mathtt{fv}(()\Gamma, \varphi)$ which allows application of $(R_\exists)$.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\nabla_1' \\ \Gamma \Rightarrow \exists_x \psi\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\nabla_2' \\ \psi[x/y], \Gamma \Rightarrow \varphi\end{array}}{\exists_x \psi, \Gamma \Rightarrow \varphi}\ (R_\exists)}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\ (Cut)$$

2. *(4 pontos) Para demonstrar a equivalência entre dedução natural e à la Gentzen no caso clássico, um passo chave é a demonstração de c-equivalência:*

   (a) *(2 pontos) Demonstre $\vdash_G \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ se e somente se $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi$;*

   (b) *(2 pontos) Demonstre $\vdash_G \neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ se e somente se $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$.*

We consider the derivations below.

(a) **Necessity**:

$$\dfrac{\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \bot}\ (\mathrm{RW})}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}\ (\mathrm{R}_\to)$$

Sufficiency:

$$\dfrac{(\mathrm{LW})\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi} \qquad \dfrac{(Ax)\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \bot, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta\ (L_\bot)}{\neg\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\mathrm{L}_\to)}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\textsc{Cut})$$

Observe that in both cases, when Δ is the empty sequence we have an intuitionistic proof.

(b) **Necessity***:*

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{(Ax)\ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi, \perp}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi, \neg\varphi}\,(\mathrm{R}_\to)
\qquad
\perp, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi\ (L_\perp)
}{\neg\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}\,(\mathrm{L}_\to)
}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \neg\neg\varphi \to \varphi}\,(\mathrm{R}_\to)
\qquad
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \perp}\,(\mathrm{RW})}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \neg\neg\varphi}\,(\mathrm{R}_\to)
\qquad
\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\ (Ax)
}{\neg\neg\varphi \to \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\,(\mathrm{L}_\to)
}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\,(\mathrm{Cut})
$$

Observe that this case is strictly calssic because the left premisse of (Cut) is essentially a proof of the sequent $\Rightarrow \neg\neg\varphi \to \varphi$ *(Also, see Exercise* **??***).*

Sufficiency*:*

$$
\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \perp, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\mathrm{L}_\to)
$$

Observe that in this case, when Δ *is the empty sequence we have an intuitionistic proof.*

3. *(2 pontos) Marque com "×" na seguinte tabela a relação entre comandos de demonstração do assistente PVS, utilizado no projeto da disciplina, e as regras dedutivas do cálculo de Gentzen para a lógica clássica.*

	(flatten)	*(split)*	*(inst)*	*(skolem)*
$(L_\vee)$		×		
$(R_\vee)$	×			
$(L_\wedge)$	×			
$(R_\wedge)$		×		
$(L_\to)$		×		
$(R_\to)$	×			
$(L_\forall)$			×	
$(R_\forall)$				×
$(L_\exists)$				×
$(R_\exists)$			×	

Tabela 1: Regras de Dedução Natural para Lógica Proposicional (clássica)

introduction rules	elimination rules
$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge_e)$
$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i)$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]^v\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\vee_e), u, v$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i), u$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to_e)$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ (\neg_i), u$	$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg_e)$
	$\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg\neg_e)$
$\dfrac{\varphi\{x/x_0\}}{\forall_x\varphi}\ (\forall_i)$ where x_0 cannot occur free in any open assumption.	$\dfrac{\forall_x\varphi}{\varphi\{x/t\}}\ (\forall_e)$
$\dfrac{\varphi\{x/t\}}{\exists_x\varphi}\ (\exists_i)$	$\dfrac{\exists_x\varphi \qquad \begin{array}{c}[\varphi\{x/x_0\}]^u\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\exists_e)\ u$ where x_0 cannot occur free in any open assumption on the right and in χ.

Tabela 2: Regras de Dedução à la Gentzen para a Lógica de Predicados

left rules	right rules
Axioms:	
$\Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta \ (Ax)$	$\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta \ (L_\bot)$
Structural rules:	
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (LWeakening)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi} \ (RWeakening)$
$\dfrac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (LContraction)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi} \ (RContraction)$
Logical rules:	
$\dfrac{\varphi_{i\in\{1,2\}}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (L_\wedge)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi} \ (R_\wedge)$
$\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (L_\vee)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_{i\in\{1,2\}}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_1 \vee \varphi_2} \ (R_\vee)$
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (L_\to)$	$\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi} \ (R_\to)$
$\dfrac{\varphi[x/t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall_x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (L_\forall)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall_x \varphi} \ (R_\forall), \quad y \notin \texttt{fv}(\Gamma, \Delta)$
$\dfrac{\varphi[x/y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists_x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (L_\exists), \quad y \notin \texttt{fv}(\Gamma, \Delta)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists_x \varphi} \ (R_\exists)$

Tabela 3: Regra de Corte

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \ (Cut)$$