Lógica Computacional

Gabarito da Segunda Prova

Tópicos: Lógica de predicados
Semântica e Dedução

Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília
1 de Julho de 2015
Prof. Mauricio Ayala-Rincón
Estagiário de Docência: Lucas Ângelo da Silveira

Nome:	Matrícula:

Duração: 1h40m; Início: 10:00; Fim: 11:45; Duas páginas, Três questões
Sobre respostas: as provas devem ser elaboradas em dedução natural ou *à la Gentzen, apresentadas como árvores de derivação e devem incluir o nome de cada regra utilizada em cada passo da derivação.*

1. *(3 pontos) Demonstre respectivamente por dedução natural e à la Gentzen, supondo que não existem ocorrências das variáveis x e y em ϕ e ψ, respectivamente ($x \notin \psi$ e $y \notin \phi$), que*

   (a) *(1.5 pontos)* $(\exists x\phi) \to (\forall y\psi) \vdash_N \forall x\forall y(\phi \to \psi)$;

   (b) *(1.5 pontos)* $\vdash_G (\exists x\phi) \to (\forall y\psi) \Rightarrow \forall x\forall y(\phi \to \psi)$.

Solução:

(a) $(\exists x\phi) \to (\forall y\psi) \vdash_N \forall x\forall y(\phi \to \psi)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\phi[x/x_0]]^u}{\exists x\phi}(\exists i) \qquad (\exists x\phi) \to (\forall y\psi)}{\forall y\psi}(\to e)}{\psi[y/y_0]}(\forall e)}{\phi[x/x_0] \to \psi[y/y_0]}(\to i)\, u}{\forall y(\phi[x/x_0] \to \psi)}(\forall i)}{\forall x\forall y(\phi \to \psi)}(\forall i)$$

(b) $\vdash_G (\exists x\phi) \to (\forall y\psi) \Rightarrow \forall x\forall y(\phi \to \psi)$:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(R_\exists)\ \dfrac{(Ax)\ \ \phi[x_0] \Rightarrow \psi[y_0], \phi[x_0]}{\phi[x_0] \Rightarrow \psi[y_0], \exists x \phi} \qquad \dfrac{\psi[y_0], \phi[x_0] \Rightarrow \psi[y_0]\ \ (Ax)}{\forall y \psi, \phi[x_0] \Rightarrow \psi[y_0]}\ (L_\forall)}{(\exists x \phi) \to (\forall y \psi), \phi[x_0] \Rightarrow \psi[y_0]}\ (L_\to)}{(\exists x \phi) \to (\forall y \psi) \Rightarrow (\phi[x_0] \to \psi[y_0])}\ (R_\to)}{(\exists x \phi) \to (\forall y \psi) \Rightarrow \forall y(\phi[x_0] \to \psi)}\ (R_\forall)}{(\exists x \phi) \to (\forall y \psi) \Rightarrow \forall x \forall y(\phi \to \psi)}\ (R_\forall)
$$

2. *(4 pontos) Demonstre que se $\Gamma \cup \{\exists_x \varphi \to \varphi[x/y_0]\}$ é inconsistente, onde y_0 é uma variável que não ocorre livre em $\Gamma \cup \{\varphi\}$, então Γ é inconsistente também.*

   Lembre que um conjunto de fórmulas Ψ é inconsistente se existe uma fórmula ψ tal que $\Psi \vdash \psi$ e $\Psi \vdash \neg\psi$, ou equivalentemente se toda fórmula é derivável de Ψ.

   Nesta questão a hipótese é que qualquer fórmula ψ pode ser derivada de $\Gamma \cup \{\exists_x \varphi \to \varphi[x/y_0]\}$:

$$
\dfrac{\dfrac{\Gamma \qquad\qquad [\exists_x \varphi \to \varphi[x/y_0]]^k}{\vdots}}{\psi}
$$

   Siga o seguinte roteiro, no qual a última regra aplicada é a regra $(\vee e)$ para (LEM) $\exists_x \varphi \vee \neg \exists_x \varphi$:

   (a) *(1 ponto) Use a hipótese de inconsistência de $\Gamma \cup \{\exists_x \varphi \to \varphi[x/y_0]\}$ para derivar uma fórmula arbitrária ψ de Γ e $[\exists_x \varphi]^u$: $\Gamma, \exists_x \varphi \vdash \psi$.*

       Ajuda: neste caso, a suposição $[\exists_x \varphi \to \varphi[x/y_0]]^k$ na derivação de ψ, é sustituída por uma derivação de $\exists_x \varphi \to \varphi[x/y_0]$ da suposição $[\varphi[x/y_0]]^w$, que será descarregada com uma aplicação da regra $(\exists e)$ com suposição $[\exists_x \varphi]^u$.

   (b) *(1 ponto) Use a hipótese de inconsistência de $\Gamma \cup \{\exists_x \varphi \to \varphi[x/y_0]\}$ para derivar ψ de Γ e $[\neg \exists_x \varphi]^v$: $\Gamma, \neg \exists_x \varphi \vdash \psi$.*

       Ajuda: neste caso, a suposição $[\exists_x \varphi \to \varphi[x/y_0]]^k$ na derivação de ψ, é sustituída por uma derivação de $\exists_x \varphi \to \varphi[x/y_0]$ da suposição $[\neg \exists_x \varphi]^v$, para o qual basta aplicar $(\to i)$ vacuamente e (CP), contraposição.

   (c) *(1 ponto) Finalmente aplique a regra $(\vee e)$ descarregando u e v com (LEM) $\exists_x \varphi \vee \neg \exists_x \varphi$, para concluir $\Gamma \vdash \psi$.*

   (d) *(1 ponto) Faça o mesmo de (a)(b) e (c) para derivar a fórmula $\neg\psi$ e conclua então a inconsistência de Γ.*

   (a) $\Gamma, \exists_x \varphi \vdash \psi$:

$$\nabla_1 : \quad \dfrac{[\exists_x\varphi]^u \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \qquad \dfrac{[\varphi[y_0]]^w}{\exists_x\varphi \to \varphi[x/y_0]}\,(\to i)\emptyset}{\vdots}}{\psi}}{\psi}\,(\exists e)w$$

(b) $\Gamma, \neg\exists_x \vdash \psi$*:*

$$\nabla_2 : \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\exists_x\varphi]^v}{\neg\varphi[x/y_0] \to \neg\exists_x\varphi}\,(\to i)\emptyset}{\exists_x\varphi \to \varphi[x/y_0]}\,(\mathrm{CP})}{\vdots}}{\psi}$$

(c) $\Gamma \vdash \psi$*:*

$$\dfrac{(LEM)\ \exists_x\varphi \vee \neg\exists_x\varphi \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \qquad [\exists_x\varphi]^u}{\nabla_1}}{\varphi} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \qquad [\neg\exists_x\varphi]^v}{\nabla_2}}{\varphi}}{\psi}\,(\vee e)\,u\,v$$

(d) $\Gamma \vdash \neg\psi$*: sustitua a fórmula* ψ *por* $\neg\psi$ *em (a), (b) e (c).*

3. *(3 pontos)*

   (a) *(1 pontos) Marque com "×" na seguinte tabela a relação entre comandos de demonstração do assistente PVS, utilizado no projeto da disciplina, e as regras dedutivas do cálculo de Gentzen para a lógica clássica.*

	(FLATTEN)	(SPLIT)	(INST)	(SKOLEM)
$(L_\wedge)$	×			
$(R_\wedge)$		×		
$(L_\vee)$		×		
$(R_\vee)$	×			
$(L_\to)$		×		
$(R_\to)$	×			
$(L_\exists)$				×
$(R_\exists)$			×	
$(L_\forall)$			×	
$(R_\forall)$				×

(b) *(2 pontos) A semântica lógica do comando de especificação* `IF-THEN-ELSE` *no sistema PVS, em particular, está expressa nas seguintes inferências obtidas por aplicação do comando* (PROP) *(que aplica repetidamente transormações proposicionais via commandos* (FLATTEN) *e/ou* (SPLIT)*):*

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \texttt{IF C THEN A ELSE B}}{\Gamma, \texttt{C} \Rightarrow \Delta, \texttt{A} \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \texttt{C}, \texttt{B}}\ (\textsc{prop})$$

$$\frac{\texttt{IF C THEN A ELSE B}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \texttt{C}, \texttt{A} \Rightarrow \Delta \qquad \texttt{B}, \Gamma \Rightarrow \Delta, \texttt{C}}\ (\textsc{prop})$$

Qual o resultado de aplicar (PROP) *a um sequente da forma*

$$\Gamma \Rightarrow \Delta, \texttt{IF C1 THEN IF C2 THEN A ELSE B ELSE IF C3 THEN D ELSE E}$$

Responda especificamente:

i. *(0.5 pontos) Quantos sub-casos, i.e., sequentes a demonstrar, são gerados?*

ii. *(1.5 pontos) Quais são esses sub-casos?*

São gerados quatro casos:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \texttt{IF C1 THEN IF C2 THEN A ELSE B ELSE IF C3 THEN D ELSE E}}{\Gamma, \texttt{C1, C2} \Rightarrow \Delta, \texttt{A} \qquad \Gamma, \texttt{C1} \Rightarrow \texttt{C2, B}, \Delta \qquad \Gamma, \texttt{C3} \Rightarrow \texttt{C1, D}, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow \texttt{C1, C3, E}, \Delta}\ (\textsc{prop})$$

Tabela 1: Regras de Dedução Natural para Lógica Proposicional (clássica)

introduction rules	elimination rules
$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge_e)$
$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i)$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{matrix}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \chi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi]^v \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}}{\chi}\ (\vee_e), u, v$
$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i), u$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to_e)$
$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi}\ (\neg_i), u$	$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg_e)$
	$\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg\neg_e)$
$\dfrac{\varphi\{x/x_0\}}{\forall_x \varphi}\ (\forall_i)$ where x_0 cannot occur free in any open assumption.	$\dfrac{\forall_x \varphi}{\varphi\{x/t\}}\ (\forall_e)$
$\dfrac{\varphi\{x/t\}}{\exists_x \varphi}\ (\exists_i)$	$\dfrac{\exists_x \varphi \qquad \begin{matrix}[\varphi\{x/x_0\}]^u \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}}{\chi}\ (\exists_e)\ u$ where x_0 cannot occur free in any open assumption on the right and in χ.

Tabela 2: Regras de Dedução à la Gentzen para a Lógica de Predicados

left rules	right rules
Axioms:	
$\Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta \;\; (Ax)$	$\perp, \Gamma \Rightarrow \Delta \;\; (L_\perp)$
Structural rules:	
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \; (LWeakening)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi} \; (RWeakening)$
$\dfrac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \; (LContraction)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi} \; (RContraction)$
Logical rules:	
$\dfrac{\varphi_{i \in \{1,2\}}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \Gamma \Rightarrow \Delta} \; (L_\wedge)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi} \; (R_\wedge)$
$\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \; (L_\vee)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_{i \in \{1,2\}}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_1 \vee \varphi_2} \; (R_\vee)$
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \; (L_\rightarrow)$	$\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \; (R_\rightarrow)$
$\dfrac{\varphi[x/t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall_x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \; (L_\forall)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall_x \varphi} \; (R_\forall), \quad y \notin \mathtt{fv}(\Gamma, \Delta)$
$\dfrac{\varphi[x/y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists_x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \; (L_\exists), \quad y \notin \mathtt{fv}(\Gamma, \Delta)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists_x \varphi} \; (R_\exists)$

Tabela 3: Regra de Corte

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \; (Cut)$$