Lógica Computacional

Gabarito da Segunda Prova

Tópicos: Lógica de predicados
Semântica e Dedução

Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília
29 de Novembro de 2017
Prof. Mauricio Ayala-Rincón
Estagiário de Docência: Thiago Mendonça Ferreira Ramos

Nome:	Matrícula:

Duração: 1h40m; Início: 19:05; Fim: 20:45; Duas páginas, Três questões
Sobre respostas: as provas devem ser elaboradas em dedução natural ou *à la* Gentzen, apresentadas como árvores de derivação e devem incluir o nome de cada regra utilizada em cada passo da derivação.

1. (4 pontos) O sistema de dedução natural é equivalente ao cálculo de sequentes. Para o caso intuicionista, esta equivalência é estabelecida mostrando-se que qualquer prova em dedução natural pode ser simulada em cálculo de sequentes e vice-versa, i.e.,

$$\Gamma \vdash_N \varphi \text{ se, e somente se } \vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$$

A prova de equivalência citada acima é feita por indução na estrutura da derivação. Abaixo vemos alguns casos críticos do passo indutivo.

(a) (2 pontos) No sentido "$\Gamma \vdash_N \varphi$ se $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$", considere uma derivação que termina na aplicação da regra $(L_\rightarrow)$ (intuicionista):

$$\dfrac{\begin{matrix}\nabla_1 \\ \Gamma \Rightarrow \psi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\nabla_2 \\ \delta, \Gamma \Rightarrow \varphi\end{matrix}}{\psi \rightarrow \delta, \Gamma \Rightarrow \varphi}\ (L_\rightarrow)$$

Demonstre então que existe uma derivação correspondente no sistema de dedução natural. Para isso suponha por hipótese de indução, que existem deduções naturais ∇'_1 e ∇'_2 para $\Gamma \vdash_N \psi$ e $\delta, \Gamma \vdash_N \varphi$ como abaixo:

$$\begin{matrix}\Gamma \\ \nabla'_1 \\ \psi\end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix}[\delta]^u \quad \Gamma \\ \nabla'_2 \\ \varphi\end{matrix}$$

Combine essas deduções para obter uma dedução natural de $\psi \rightarrow \delta, \Gamma \vdash_N \varphi$.

Para obter a derivação natural desejada, todas as suposições $[\delta]^u$ em ∇'_2 são substituídas por aplicações da regra $(\rightarrow_e)$ à conclusão ψ de derivações ∇'_1 e suposições $[\psi \rightarrow \delta]^v$:

$$\dfrac{[\psi \to \delta]^v \qquad \begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla'_1\\ \psi\end{array}}{\delta}\,(\to_e)$$
$$\begin{array}{c}\nabla'_2\\ \varphi\end{array}$$

Acima, por claridade, omite-se Γ das premissas de ∇'_2.

(b) (2 pontos) No sentido "$\Gamma \vdash_N \varphi$ implica $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$", considere uma derivação natural para $\Gamma \vdash_N \varphi$ que finaliza numa aplicação de $(\exists_e)$ como abaixo:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla_1\\ [\exists_x\psi]^v\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi[x/y]]^u \;\; \Gamma\\ \nabla_2\\ \varphi\end{array}}{\varphi}\,(\exists_e)\ u$$

Demonstre que existe uma derivação no cálculo de sequentes de Gentzen para $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$.

Neste caso, por hipótese de indução, pode ser assumido que existem derivações no cálculo de sequentes ∇'_1 e ∇'_2 para $\Gamma \Rightarrow \exists_x\psi$ e $\psi[x/y], \Gamma \Rightarrow \varphi$, respectivamente. Combine essas derivações utilizando (Cut) e ($L_\exists$) para obter a prova.

Por hipótese de indução, existem derivações à la Gentzen ∇'_1 e ∇'_2 para os sequentes $\Gamma \Rightarrow \exists_x\psi$ e $\psi[x/y], \Gamma \Rightarrow \varphi$, respectivamente. A derivação é constroída como abaixo. Note que $y \notin \mathtt{fv}(\Gamma, \varphi)$ o que permite aplicação de ($L_\exists$).

$$\dfrac{\begin{array}{c}\nabla'_1\\ \Gamma \Rightarrow \exists_x\psi\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\nabla'_2\\ \psi[x/y], \Gamma \Rightarrow \varphi\end{array}}{\exists_x\psi, \Gamma \Rightarrow \varphi}\,(L_\exists)}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\,(\mathrm{Cut})$$

2. (4 pontos) Demonstre, seja em dedução natural ou no cálculo de sequentes de Gentzen o seguinte:

$$\exists x\,\phi \vdash_N \neg\forall x\,\neg\phi \qquad\qquad \neg\forall x\,\neg\,\phi \vdash_N \exists x\,\phi$$
$$\vdash_G \exists x\,\phi \Rightarrow \neg\forall x\,\neg\phi \qquad\qquad \vdash_G \neg\forall x\,\neg\,\phi \Rightarrow \exists x\,\phi$$

(a) (2.0 pontos) Construa uma derivação para $\neg\forall x\,\neg\,\phi \vdash_N \exists x\,\phi$ ou $\vdash_G \neg\forall x\,\neg\,\phi \Rightarrow \exists x\,\phi$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\exists x\,\phi]^u \qquad \dfrac{[\phi(a)]^v}{\exists x\,\phi}\,(\exists_i)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\phi(a)}\,(\mathrm{PBC})\ v}{\forall x\,\neg\phi}\,(\forall_i) \qquad \neg\forall x\,\neg\phi}{\bot}\,(\neg_e)}{\exists x\,\phi}\,(\mathrm{PBC})\ u$$

ou

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi[x/t] \Rightarrow \phi[x/t], \perp \quad (\mathrm{Ax})}{\Rightarrow \phi[x/t], \neg\phi[x/t]}\,(\mathrm{R}_\to)}{\Rightarrow \exists x\,\phi, \neg\phi[x/t]}\,(\mathrm{R}_\exists)}{\Rightarrow \exists x\,\phi, \forall x\,\neg\phi}\,(\mathrm{R}_\forall) \qquad \perp \Rightarrow \exists x\,\phi}{\neg\forall x\,\neg\phi \Rightarrow \exists x\,\phi}\,(\mathrm{L}_\to)$$

(b) (2.0 pontos) Construa uma derivação para $\exists x\,\phi \vdash_N \neg\forall x\,\neg\phi$ ou $\vdash_G \exists x\,\phi \Rightarrow \neg\forall x\,\neg\phi$.

$$\dfrac{\dfrac{\exists x\,\phi \qquad \dfrac{[\phi(a)]^u \qquad \dfrac{[\forall x\,\neg\phi]^v}{\neg\phi(a)}\,(\forall_e)}{\perp}\,(\neg_e)}{\perp}\,(\exists_e)\ u}{\neg\forall x\,\neg\phi}\,(\neg_i)\ v$$

ou

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\mathrm{Ax}) \quad \phi[x/t] \Rightarrow \perp, \phi[x/t] \qquad \perp, \phi[x/t] \Rightarrow \perp \quad (\mathrm{L}_\perp)}{\phi[x/t], \neg\phi[x/t] \Rightarrow \perp}\,(\mathrm{L}_\to)}{\phi[x/t], \forall x\,\neg\phi \Rightarrow \perp}\,(\mathrm{L}_\forall)}{\exists x\,\phi, \forall x\,\neg\phi \Rightarrow \perp}\,(\mathrm{L}_\exists)}{\exists x\,\phi \Rightarrow \neg\forall x\,\neg\phi}\,(\mathrm{R}_\to)$$

3. (2 pontos) A semântica lógica do comando de especificação `IF-THEN-ELSE` no sistema PVS, em particular, está expressa nas seguintes inferências obtidas por aplicação do comando (PROP) (que aplica repetidamente transormações proposicionais via commandos como por exemplo (FLATTEN) e/ou (SPLIT)):

$$\dfrac{\Gamma\,\texttt{|---}\,\Delta, \texttt{IF C THEN A ELSE B}}{\Gamma, \texttt{C}\,\texttt{|---}\,\Delta, \texttt{A} \qquad\qquad \Gamma\,\texttt{|---}\,\Delta, \texttt{C}, \texttt{B}}\,(\textsc{prop})$$

$$\dfrac{\texttt{IF C THEN A ELSE B}, \Gamma\,\texttt{|---}\,\Delta}{\Gamma, \texttt{C}, \texttt{A}\,\texttt{|---}\,\Delta \qquad\qquad \texttt{B}, \Gamma\,\texttt{|---}\,\Delta, \texttt{C}}\,(\textsc{prop})$$

Qual o resultado de aplicar (PROP) a um sequente da forma

$$\Gamma\,\texttt{|---}\,\Delta, \texttt{IF (A AND B) THEN C ELSE (D OR E) ENDIF}$$

Responda especificamente o seguinte:

(a) (1.0 ponto) Quantos e quais são os sub-casos (i.e., sequentes a ser demonstrados) gerados ao aplicar (PROP) ?

São gerados os três seguintes sequentes:

$$\dfrac{\Gamma\,\texttt{|---}\,\Delta, \texttt{IF (A AND B) THEN C ELSE (D OR E) ENDIF}}{\Gamma, \texttt{A}, \texttt{B}\,\texttt{|---}\,\Delta, \texttt{C}, \qquad \Gamma\,\texttt{|---}\,\Delta, \texttt{A}, \texttt{D}, \texttt{E} \qquad \Gamma\,\texttt{|---}\,\Delta, \texttt{B}, \texttt{D}, \texttt{E}}\,(\textsc{prop})$$

Do ponto de vista do cálculo de sequentes, temos a seguinte derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\nabla_1}{A, B \Rightarrow C}}{\Rightarrow A \wedge B \to C}\,(\mathrm{L}_\wedge)\ +(\mathrm{R}_\to) \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\nabla_2}{\Rightarrow A, D, E} \qquad \overset{\nabla_3}{\Rightarrow B, D, E}}{\Rightarrow A \wedge B, D, E}\,(\mathrm{R}_\wedge)}{\Rightarrow \neg(A \wedge B) \to D \vee E}\,(\mathrm{L}_\vee)\ +(\mathrm{R}_\to)\ +\textsc{c-eq}}{\Rightarrow (A \wedge B \to C) \wedge (\neg(A \wedge B) \to D \vee E)}\,(\mathrm{R}_\wedge)$$

Será, então, necessário constroir provas ∇_i, para $i = 1, 2, 3$, para completar a prova.

(b) (1.0 ponto) Suponha que queremos demonstrar o sequente Γ `|---` Δ utilizando um (case "φ"). Qual é a correspondência da aplicação desse comando com dedução do sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ no cálculo de sequentes de Gentzen?
Para responder adequadamente é necessário esboçar a dedução do sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ utilizando propriedades e regras do cálculo de sequentes.

A correspondência envolve uso de LEM para a fórmula φ, e aplicação das regras ($\mathrm{L}_\vee$) e (Cut) como ilustrado abaixo.

$$\dfrac{\Rightarrow \varphi \vee \neg\varphi\ \ \mathrm{LEM} \qquad \dfrac{\overset{\nabla_1}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \overset{\nabla_2}{\Gamma \Rightarrow \varphi, \Delta}}{\varphi \vee \neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\mathrm{L}_\vee)}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\mathrm{Cut})$$

Assim, a prova do sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$, com o uso do comando (case) será obtida obtendo provas ∇_1 e ∇_2 para os sequentes $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ e $\Gamma \Rightarrow \varphi, \Delta$, respectivamente.

Tabela 1: Regras de Dedução Natural para Lógica Proposicional (clássica)

introduction rules	elimination rules
$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge_e)$
$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i)$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{matrix}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \chi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi]^v \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}}{\chi}\ (\vee_e)\ u, v$
$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i)\ u$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to_e)$
$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi}\ (\neg_i)\ u$	$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg_e)$
	$\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg\neg_e)$
$\dfrac{\varphi\{x/x_0\}}{\forall_x \varphi}\ (\forall_i)$ where x_0 cannot occur free in any open assumption.	$\dfrac{\forall_x \varphi}{\varphi\{x/t\}}\ (\forall_e)$
$\dfrac{\varphi\{x/t\}}{\exists_x \varphi}\ (\exists_i)$	$\dfrac{\exists_x \varphi \qquad \begin{matrix}[\varphi\{x/x_0\}]^u \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}}{\chi}\ (\exists_e)\ u$ where x_0 cannot occur free in any open assumption on the right and in χ.

Tabela 2: Regras de Dedução à la Gentzen para a Lógica de Predicados

left rules	right rules
Axioms:	
$\Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta$ (Ax)	$\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta$ $(L_\bot)$
Structural rules:	
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ (LW)*eakening*	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$ (RW)*eakening*
$\dfrac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ (LC)*ontraction*	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$ (RC)*ontraction*
Logical rules:	
$\dfrac{\varphi_{i\in\{1,2\}}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $(L_\wedge)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}$ $(R_\wedge)$
$\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $(L_\vee)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_{i\in\{1,2\}}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_1 \vee \varphi_2}$ $(R_\vee)$
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $(L_\to)$	$\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi}$ $(R_\to)$
$\dfrac{\varphi[x/t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall_x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $(L_\forall)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall_x \varphi}$ $(R_\forall)$, $\quad y \notin \mathtt{fv}(\Gamma, \Delta)$
$\dfrac{\varphi[x/y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists_x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $(L_\exists)$, $\quad y \notin \mathtt{fv}(\Gamma, \Delta)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists_x \varphi}$ $(R_\exists)$

Tabela 3: Regra de Corte

$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$ (Cut)