Lógica Computacional

Gabarito da Segunda Prova

Tópicos: Lógica de predicados
Semântica e Dedução

Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília
25 de Junho de 2018
Prof. Mauricio Ayala-Rincón

Nome:	Matrícula:

Duração: 1h40m; Início: 16:05; Fim: 17:45; Três páginas, Três questões
Sobre respostas: as provas devem ser elaboradas como derivações do cálculo de dedução natural (DN) ou do cálculo de sequentes de Gentzen (CG), apresentadas como árvores de derivação, e devem incluir o nome de cada regra utilizada em cada passo da derivação.

1. (4 pontos) Demonstre, seja em dedução natural ou no cálculo de Gentzen, que $\neg\exists_x\neg\varphi \to \forall_x\varphi$ e $\neg\forall_x\neg\varphi \to \exists_x\varphi$ são teoremas da lógica clássica. Adicionalmente, demonstre que essas fórmulas não são teoremas da lógica intuicionista. Siga o roteiro abaixo.

   (a) (1.5 pontos) Costrua uma derivação, seja no cálculo de dedução natural ou de Gentzen, para $\neg\exists_x\neg\varphi \to \forall_x\varphi$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\exists x\neg\varphi]^u \qquad \dfrac{[\neg\varphi[x/y]]^v}{\exists_x\neg\varphi}\,(\exists_i)}{\bot}\,(\neg_e)}{\varphi[x/y]}\,(\text{PBC})\ v}{\forall_x\varphi}\,(\forall_i)}{\neg\exists_x\neg\varphi \to \forall_x\varphi}\,(\to_i)\ u$$

   (b) (1.5 pontos) Costrua uma derivação, seja no cálculo de dedução natural ou de Gentzen, para $\neg\forall_x\neg\varphi \to \exists_x\varphi$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\varphi[x/y]]^v$}
\RightLabel{$(\exists_i)$}
\UnaryInfC{$\exists_x\varphi$}
\AxiomC{$[\neg\exists_x\varphi]^u$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ v$}
\UnaryInfC{$\neg\varphi[x/y]$}
\RightLabel{$(\forall_i)$}
\UnaryInfC{$\forall_x\neg\varphi$}
\AxiomC{$[\neg\forall_x\neg\varphi]^w$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{(PBC) u}
\UnaryInfC{$\exists_x\varphi$}
\RightLabel{$(\to_i)\ w$}
\UnaryInfC{$\neg\forall_x\neg\varphi \to \exists_x\varphi$}
\end{prooftree}
$$

(c) (1 ponto) Prove que não existe uma derivação intuicionista para $\neg\exists_x\neg\varphi \vdash_N \forall_x\varphi$ (ou correspondentemente no cálculo de Gentzen, para $\vdash_G \neg\exists_x\neg\varphi \Rightarrow \forall_x\varphi$).

Dica: tanto para este quanto para o seguinte item, mesmo que existam derivações clássicas de ambos os sequentes, isto não implica que estes sejam estritamente clássicos, mas destes pode ser inferido o teorema estritamente clássico $\neg\neg\psi \to \psi$.

Usam-se apenas regras minimais e assume-se a existência de uma derivação para $\neg\exists_x\neg\varphi \vdash_N \forall_x\varphi$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\exists_x\neg\psi]^u$}
\AxiomC{$[\neg\psi[x/y]]^w$}
\RightLabel{$(\exists_e)\ w$}
\BinaryInfC{$\neg\psi$}
\AxiomC{$\neg\neg\psi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ u$}
\UnaryInfC{$\neg\exists_x\neg\psi$}
\RightLabel{ASS.}
\UnaryInfC{$\forall_x\psi$}
\RightLabel{$(\forall_e)$}
\UnaryInfC{ψ}
\end{prooftree}
$$

Note que a aplicação da regra $(\exists_e)$ acima é justificada sempre que a variável x pode ser escolhida de maneira que não ocorra em ψ; assim, a variável testemunha y tampoco ocorre em $\neg\psi[x/y]$.

2. (3 pontos) O sistema de dedução natural é equivalente ao cálculo de sequentes. Para o caso intuicionista, esta equivalência é estabelecida mostrando-se que qualquer prova em dedução natural pode ser simulada em cálculo de sequentes e vice-versa, i.e.,

$$\Gamma \vdash_N \varphi \text{ se, e somente se } \vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$$

A prova de equivalência citada acima é feita por indução na estrutura da derivação. Abaixo vemos alguns casos críticos do passo indutivo.

(a) (1 ponto) No sentido "$\Gamma \vdash_N \varphi$ se $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$", considere uma derivação que termina na aplicação da regra de corte (intuicionista):

$$\dfrac{\overset{\nabla_1}{\Gamma \Rightarrow \psi} \qquad \overset{\nabla_2}{\psi, \Gamma \Rightarrow \varphi}}{\Gamma \Rightarrow \varphi} \text{ (Cut)}$$

Demonstre então que existe uma derivação correspondente no sistema de dedução natural. Para isso suponha por hipótese de indução, que existem deduções naturais ∇'_1 e ∇'_2 para $\Gamma \vdash_N \psi$ e $\psi, \Gamma \vdash_N \varphi$ como abaixo:

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla'_1 \\ \psi \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} [\psi] \;\; \Gamma \\ \nabla'_2 \\ \varphi \end{array}$$

Combine essas deduções para obter uma dedução de $\Gamma \vdash_N \varphi$.

Para obter as derivações desejadas, todas as suposições de $[\psi]^u$ na derivação ∇'_2 são substituídas por derivações de ψ usando a derivação ∇'_1:

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla'_1 \\ [\psi] \;\; \Gamma \\ \nabla'_2 \\ \varphi \end{array}$$

(b) (2 pontos) No sentido "$\Gamma \vdash_N \varphi$ implica $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$", considere uma derivação natural para $\Gamma \vdash_N \varphi$ que finaliza numa aplicação de $(\exists_e)$ como abaixo:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla_1 \\ [\exists_x \psi]^v \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\psi[x/y]]^u \;\; \Gamma \\ \nabla_2 \\ \varphi \end{array}}{\varphi} \; (\exists_e)\; u$$

Demonstre que existe uma derivação *à la Gentzen para* $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$.

Neste caso, por hipótese de indução, pode ser assumido que existem derivações à la Gentzen ∇'_1 *e* ∇'_2 *para* $\Gamma \Rightarrow \exists_x \psi$ *e* $\psi[x/y], \Gamma \Rightarrow \varphi$ *como abaixo.*

$$\begin{array}{c} \nabla'_1 \\ \Gamma \Rightarrow \exists_x \psi \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \nabla'_2 \\ \psi[x/y], \Gamma \Rightarrow \varphi \end{array}$$

Combine essas derivações utilizando (Cut) *e* $(L_\exists)$ *para obter a prova.*

A derivação é constroída como abaixo. Note que $y \notin \texttt{fv}(\Gamma, \varphi)$, o que permite a aplicação da regra $(L_\exists)$.

$$\dfrac{\dfrac{\nabla'_1}{\Gamma \Rightarrow \exists_x \psi} \quad \dfrac{\dfrac{\nabla'_2}{\psi[x/y], \Gamma \Rightarrow \varphi}}{\exists_x \psi, \Gamma \Rightarrow \varphi}\,(\mathrm{L}_\exists)}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\,(\mathrm{Cut})$$

3. (3 pontos) No exercício de formalização em PVS realizado durante o semestre, comandos relacionados com a regra de corte, (Cut), foram aplicados; em particular, os comandos de prova (lemma) e (case) foram usados em diversas situações.

   Para o caso do comando de prova (lemma), se supomos que um determinado lema denominado "lemma_name" está especificado como a fórmula φ_{ln}, e aplicamos o commando (lemma "lemma_name") ao sequente Γ`|---`Δ temos a seguinte situação:

$$\begin{array}{l} \Gamma \\ \texttt{|---} \\ \Delta \end{array} \qquad \underset{\texttt{(lemma "lemma\_name")}}{\rightsquigarrow} \qquad \begin{array}{l} \varphi_{ln} \\ \Gamma \\ \texttt{|---} \\ \Delta \end{array}$$

   Do ponto de vista do cálculo de sequentes, supondo que a prova do sequente $\Rightarrow \varphi_{ln}$ é ∇, essa situação corresponde à aplicação da regra (Cut) como ilustrado a seguir:

$$\dfrac{\dfrac{\nabla}{\Rightarrow \varphi_{ln}} \qquad \varphi_{ln}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\mathrm{Cut})$$

   (a) (1 ponto) Descreva a situação se aplicarmos o comando (case "ψ") ao sequente Γ`|---`Δ:

$$\begin{array}{l} \Gamma \\ \texttt{|---} \\ \Delta \end{array} \qquad \underset{\texttt{(case "}\psi\texttt{")}}{\rightsquigarrow} \qquad ? \quad ?$$

$$\begin{array}{l} \Gamma \\ \texttt{|---} \\ \Delta \end{array} \qquad \underset{\texttt{(case "}\psi\texttt{")}}{\rightsquigarrow} \qquad \begin{array}{l} \psi \\ \Gamma \\ \texttt{|---} \\ \Delta \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Gamma \\ \texttt{|---} \\ \Delta \\ \psi \end{array}$$

(b) (2 pontos) Do ponto de vista do cálculo de sequentes, qual seria a situação correspondente?

$$\dfrac{\dfrac{\nabla_{LEM}}{\Rightarrow \psi \vee \neg\psi} \qquad \dfrac{? \qquad\qquad ?}{?, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(?)}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\mathrm{Cut})$$

$$\dfrac{\dfrac{\nabla_{LEM}}{\Rightarrow \psi \vee \neg\psi} \qquad \dfrac{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad\qquad \neg\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\psi \vee \neg\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(L_\vee)}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\mathrm{Cut})$$

Tabela 1: Regras de Dedução Natural para Lógica Proposicional (clássica)

introduction rules	elimination rules
$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge_e)$
$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i)$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \chi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\psi]^v\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\vee_e), u, v$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i), u$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to_e)$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ (\neg_i), u$	$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg_e)$ $\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg\neg_e)$
$\dfrac{\varphi[x/x_0]}{\forall_x \varphi}\ (\forall_i)$ where x_0 cannot occur free in any open assumption.	$\dfrac{\forall_x \varphi}{\varphi[x/t]}\ (\forall_e)$
$\dfrac{\varphi[x/t]}{\exists_x \varphi}\ (\exists_i)$	$\dfrac{\exists_x \varphi \quad \begin{array}{c}[\varphi[x/x_0]]^u\\ \vdots\\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\exists_e)\ u$ where x_0 cannot occur free in any open assumption on the right and in χ.

Tabela 2: Regras de Dedução à la Gentzen para a Lógica de Predicados

left rules	right rules
Axioms:	
$\Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta \ \ (Ax)$	$\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta \ \ (L_\bot)$
Structural rules:	
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (LWeakening)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\ (RWeakening)$
$\dfrac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (LContraction)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\ (RContraction)$
Logical rules:	
$\dfrac{\varphi_{i\in\{1,2\}}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\wedge)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}\ (R_\wedge)$
$\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\vee)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_{i\in\{1,2\}}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_1 \vee \varphi_2}\ (R_\vee)$
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\to)$	$\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi}\ (R_\to)$
$\dfrac{\varphi[x/t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall_x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\forall)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall_x \varphi}\ (R_\forall), \quad y \notin \mathtt{fv}(\Gamma, \Delta)$
$\dfrac{\varphi[x/y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists_x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\exists), \quad y \notin \mathtt{fv}(\Gamma, \Delta)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists_x \varphi}\ (R_\exists)$

Tabela 3: Regra de Corte

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\ (Cut)$$