Lógica Computacional

Gabarito da Segunda Prova

Tópicos: Lógica de predicados
Semântica e Dedução

Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília
01 de Julho de 2019
Prof. Mauricio Ayala-Rincón

Nome:	Matrícula:

Duração: 1h40m; Início: 16:05; Fim: 17:45; Duas páginas, Duas questões
Sobre respostas: as provas devem ser elaboradas como derivações do cálculo de dedução natural (DN) ou do cálculo de sequentes de Gentzen (CG), apresentadas como árvores de derivação, e devem incluir o nome de cada regra utilizada em cada passo da derivação.

1. (6 pontos) Demonstre, seja em dedução natural ou no cálculo de Gentzen, que $\neg\exists_x\neg\varphi \to \forall_x\varphi$ e $\neg\forall_x\neg\varphi \to \exists_x\varphi$ são teoremas da lógica clássica. Adicionalmente, demonstre que essas fórmulas não são teoremas da lógica intuicionista. Siga o roteiro abaixo.

   (a) (2 pontos) Costrua uma derivação, seja no cálculo de dedução natural ou de Gentzen, para $\neg\exists_x\neg\varphi \to \forall_x\varphi$, i.e., para $\vdash_{DN} \neg\exists_x\neg\varphi \to \forall_x\varphi$ ou para $\vdash_{CG}\ \Rightarrow \neg\exists_x\neg\varphi \to \forall_x\varphi$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg\exists x\neg\varphi]^u$}
\AxiomC{$[\neg\varphi[x/y]]^v$}
\RightLabel{$(\exists_i)$}
\UnaryInfC{$\exists_x\neg\varphi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\perp$}
\RightLabel{(PBC) v}
\UnaryInfC{$\varphi[x/y]$}
\RightLabel{$(\forall_i)$}
\UnaryInfC{$\forall_x\varphi$}
\RightLabel{$(\to_i)$ u}
\UnaryInfC{$\neg\exists_x\neg\varphi \to \forall_x\varphi$}
\end{prooftree}
$$

   (b) (2 pontos) Costrua uma derivação, seja no cálculo de dedução natural ou de Gentzen, para $\neg\forall_x\neg\varphi \to \exists_x\varphi$, i.e., para $\vdash_{DN} \neg\forall_x\neg\varphi \to \exists_x\varphi$ ou para $\vdash_{CG}\ \Rightarrow \neg\forall_x\neg\varphi \to \exists_x\varphi$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\varphi[x/y]]^v$}
\RightLabel{$(\exists_i)$}
\UnaryInfC{$\exists_x\varphi$}
\AxiomC{$[\neg\exists_x\varphi]^u$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ v$}
\UnaryInfC{$\neg\varphi[x/y]$}
\RightLabel{$(\forall_i)$}
\UnaryInfC{$\forall_x\neg\varphi$}
\AxiomC{$[\neg\forall_x\neg\varphi]^w$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\mathrm{PBC})\ u$}
\UnaryInfC{$\exists_x\varphi$}
\RightLabel{$(\rightarrow_i)\ w$}
\UnaryInfC{$\neg\forall_x\neg\varphi \rightarrow \exists_x\varphi$}
\end{prooftree}
$$

(c) (1 ponto) Prove que não existe uma derivação intuicionista para $\neg\exists_x\neg\varphi \vdash_N \forall_x\varphi$ (ou correspondentemente no cálculo de Gentzen, para $\vdash_G \neg\exists_x\neg\varphi \Rightarrow \forall_x\varphi$).

Dica: tanto para este quanto para o seguinte item, mesmo que existam derivações clássicas de ambos os sequentes, isto não implica que estes sejam estritamente clássicos, mas destes pode ser inferido o teorema estritamente clássico $\neg\neg\psi \rightarrow \psi$. Aplique na sua derivação apenas regras intuicionistas e $\neg\exists_x\neg\psi \vdash_N \forall_x\psi$ (correspondentemente, $\vdash_G \neg\exists_x\neg\psi \Rightarrow \forall_x\psi$) , para uma variável x que não ocorra em ψ.

Usam-se apenas regras minimais e assume-se a existência de uma derivação para $\neg\exists_x\neg\varphi \vdash_N \forall_x\varphi$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\exists_x\neg\psi]^u$}
\AxiomC{$[\neg\psi[x/y]]^w$}
\RightLabel{$(\exists_e)\ w$}
\BinaryInfC{$\neg\psi$}
\AxiomC{$\neg\neg\psi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{$(\neg_i)\ u$}
\UnaryInfC{$\neg\exists_x\neg\psi$}
\RightLabel{$\textsc{ass.}$}
\UnaryInfC{$\forall_x\psi$}
\RightLabel{$(\forall_e)$}
\UnaryInfC{ψ}
\end{prooftree}
$$

Note que a aplicação da regra $(\exists_e)$ acima é justificada sempre que a variável x pode ser escolhida de maneira que não ocorra em ψ; assim, a variável testemonha y tampoco ocorre em $\neg\psi[x/y]$.

(d) (1 ponto) Prove que não existe uma derivação intuicionista para $\neg\forall_x\neg\varphi \vdash_N \exists_x\varphi$ (ou correspondentemente, no cálculo de Gentzen para $\vdash_G \neg\forall_x\neg\varphi \Rightarrow \exists_x\varphi$).

Como no item precedente, usam-se apenas regras minimais e assume-se a existência de uma derivação para $\neg\forall_x\neg\varphi \vdash \exists_x\varphi$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall_x\neg\psi]^u}{\neg\psi}\,(\forall_e)\qquad \neg\neg\psi}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\forall_x\neg\psi}\,(\neg_i)\; u}{\exists_x\psi}\,\text{ASS.}\qquad\qquad [\psi[x/y]]^w}{\psi}\,(\exists_e)\; w$$

Como no item precedente, justifica-se a aplicação da regra $(\exists_e)$ na derivação acima: x é selecionado de forma que não ocorre em ψ; assim tampoco y ocorre em $\psi[x/y]$.

2. (4 pontos) No projeto de formalização em PVS realizado durante o semestre, comandos relacionados com a regra de corte, (Cut), foram aplicados; em particular, os comandos de prova (lemma) e (case) foram usados em diversas situações.

   Para o caso do comando de prova (lemma), se supomos que um determinado lema denominado “lemma_name” está especificado como a fórmula φ_{ln}, e aplicamos o commando (lemma “lemma_name”) ao sequente Γ `|---` Δ temos a seguinte situação:

$$\begin{array}{l} \Gamma \\ \texttt{|---} \\ \Delta \end{array} \qquad \underset{\texttt{(lemma "lemma\_name")}}{\rightsquigarrow} \qquad \begin{array}{l} \varphi_{ln} \\ \Gamma \\ \texttt{|---} \\ \Delta \end{array}$$

   Do ponto de vista do cálculo de sequentes, supondo que a prova do sequente $\Rightarrow \varphi_{ln}$ é ∇, essa situação corresponde à aplicação da regra (Cut) como ilustrado a seguir:

$$\dfrac{\overset{\nabla}{\Rightarrow \varphi_{ln}} \qquad \varphi_{ln}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\text{Cut})$$

   (a) (1 ponto) Complete os detalhes da figura abaixo, para descrever a situação em PVS se aplicarmos o comando (case “ψ”) ao sequente Γ `|---` Δ:

$$\begin{array}{l} \Gamma \\ \texttt{|---} \\ \Delta \end{array} \qquad \underset{\texttt{(case "}\psi\texttt{")}}{\rightsquigarrow} \qquad ? \quad ?$$

$$\begin{array}{l} \Gamma \\ \texttt{|---} \\ \Delta \end{array} \qquad \underset{\texttt{(case "}\psi\texttt{")}}{\rightsquigarrow} \qquad \begin{array}{l} \psi \\ \Gamma \\ \texttt{|---} \\ \Delta \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Gamma \\ \texttt{|---} \\ \Delta \\ \psi \end{array}$$

(b) (2 pontos) Complete os detalhes necessários na figura abaixo, para explicar qual seria a situação correspondente do ponto de vista do cálculo de sequentes.

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\nabla_{?} \\ \Rightarrow ?\end{array} \qquad \dfrac{? \qquad\qquad ?}{?, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (?)}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\text{Cut})
$$

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\nabla_{LEM} \\ \Rightarrow \psi \vee \neg\psi\end{array} \qquad \dfrac{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \neg\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\psi \vee \neg\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_{\vee})}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\ (\text{Cut})
$$

Tabela 1: Regras de Dedução Natural para Lógica Proposicional (clássica)

introduction rules	elimination rules
$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge_e)$
$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i)$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{matrix}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \chi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi]^v \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}}{\chi}\ (\vee_e), u, v$
$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \rightarrow \psi}\ (\rightarrow_i), u$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}\ (\rightarrow_e)$
$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi}\ (\neg_i), u$	$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg_e)$
	$\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg\neg_e)$
$\dfrac{\varphi[x/x_0]}{\forall_x\varphi}\ (\forall_i)$ where x_0 cannot occur free in any open assumption.	$\dfrac{\forall_x\varphi}{\varphi[x/t]}\ (\forall_e)$
$\dfrac{\varphi[x/t]}{\exists_x\varphi}\ (\exists_i)$	$\dfrac{\exists_x\varphi \qquad \begin{matrix}[\varphi[x/x_0]]^u \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}}{\chi}\ (\exists_e)\ u$ where x_0 cannot occur free in any open assumption on the right and in χ.

Tabela 2: Regras de Dedução à la Gentzen para a Lógica de Predicados

left rules	right rules
Axioms:	
$\Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta \ \ (Ax)$	$\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta \ \ (L_\bot)$
Structural rules:	
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (LWeakening)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\ (RWeakening)$
$\dfrac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (LContraction)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\ (RContraction)$
Logical rules:	
$\dfrac{\varphi_{i\in\{1,2\}}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\wedge)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}\ (R_\wedge)$
$\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\vee)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_{i\in\{1,2\}}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_1 \vee \varphi_2}\ (R_\vee)$
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\rightarrow)$	$\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}\ (R_\rightarrow)$
$\dfrac{\varphi[x/t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall_x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\forall)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall_x \varphi}\ (R_\forall), \quad y \notin \mathtt{fv}(\Gamma, \Delta)$
$\dfrac{\varphi[x/y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists_x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (L_\exists), \quad y \notin \mathtt{fv}(\Gamma, \Delta)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists_x \varphi}\ (R_\exists)$

Tabela 3: Regra de Corte

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}\ (Cut)$$