Lógica Computacional

Gabarito da Segunda Prova

Tópicos: Lógica de predicados
Semântica e Dedução

Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília
27 de Novembro de 2019
Prof. Mauricio Ayala-Rincón

Nome:	Matrícula:

Duração: 1h40m; Início: 16:05; Fim: 15:45; Duas páginas, Quatro questões
Sobre respostas: as provas devem ser elaboradas em dedução natural ou *à la* Gentzen, apresentadas como árvores de derivação e devem incluir o nome de cada regra utilizada em cada passo da derivação.

1. (4 pontos) O sistema de dedução natural é equivalente ao cálculo de sequentes. Para o caso intuicionista, esta equivalência é estabelecida mostrando-se que qualquer prova em dedução natural pode ser simulada em cálculo de sequentes e vice-versa, i.e.,

$$\Gamma \vdash_N \varphi \text{ se, e somente se } \vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$$

A prova de equivalência citada acima é feita por indução na estrutura da derivação. Abaixo vemos alguns casos críticos do passo indutivo.

(a) (2 pontos) No sentido "$\Gamma \vdash_N \varphi$ se $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$", considere uma derivação que termina na aplicação da regra de corte (intuicionista):

$$\frac{\begin{array}{c}\nabla_1\\ \Gamma \Rightarrow \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\nabla_2\\ \psi, \Gamma \Rightarrow \varphi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\ (\text{Cut})$$

Demonstre então que existe uma derivação correspondente no sistema de dedução natural.
Ajuda: para isso suponha por hipótese de indução, que existem deduções naturais ∇'_1 e ∇'_2 para $\Gamma \vdash_N \psi$ e $\psi, \Gamma \vdash_N \varphi$ como abaixo:

$$\begin{array}{c}\Gamma\\ \nabla'_1\\ \psi\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c}[\psi]\ \ \Gamma\\ \nabla'_2\\ \varphi\end{array}$$

Combine essas deduções para obter uma dedução natural de $\Gamma \vdash_N \varphi$.

By induction hypothesis there are natural derivations ∇'_1 and ∇'_2 for $\Gamma \vdash_N \psi$ and $\psi, \Gamma \vdash_N \varphi$. To obtain the desired natural derivation, all assumptions $[\psi]^u$ in ∇'_2 are replaced by derivations of ψ using ∇'_1:

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla'_1 \\ [\psi] \;\; \Gamma \\ \nabla'_2 \\ \varphi \end{array}$$

(b) (2 pontos) No sentido "$\Gamma \vdash_N \varphi$ implica $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$", considere uma derivação natural para $\Gamma \vdash_N \varphi$ que finaliza numa aplicação de $(\exists_e)$ como abaixo:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \nabla_1 \\ [\exists_x \psi]^v \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\psi[x/y]]^u \;\; \Gamma \\ \nabla_2 \\ \varphi \end{array}}{\varphi}\ (\exists_e)\ u$$

Demonstre que existe uma derivação *à la* Gentzen para $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$.

Ajuda: neste caso, por hipótese de indução, pode ser assumido que existem derivações à la Gentzen ∇'_1 e ∇'_2 para $\Gamma \Rightarrow \exists_x \psi$ e $\psi[x/y], \Gamma \Rightarrow \varphi$:

$$\begin{array}{c} \nabla'_1 \\ \Gamma \Rightarrow \exists_x \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \nabla'_2 \\ \psi[x/y], \Gamma \Rightarrow \varphi \end{array}$$

Combine essas derivações utilizando (Cut) e $(R_\exists)$ para obter uma derivação *à la* Gentzen para $\vdash_G \Gamma \Rightarrow \varphi$.

By induction hypothesis, there are derivations à la Gentzen ∇'_1 and ∇'_2 for the sequents $\Gamma \Rightarrow \exists_x \psi$ and $\psi[x/y], \Gamma \Rightarrow \varphi$, respectively. The derivation is built as below. Notice that $y \notin \mathtt{fv}(\Gamma, \varphi)$ which allows application of $(R_\exists)$.

$$\dfrac{\begin{array}{c} \nabla'_1 \\ \Gamma \Rightarrow \exists_x \psi \end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} \nabla'_2 \\ \psi[x/y], \Gamma \Rightarrow \varphi \end{array}}{\exists_x \psi, \Gamma \Rightarrow \varphi}\ (\mathrm{R}_\exists)}{\Gamma \Rightarrow \varphi}\ (\mathrm{Cut})$$

2. (4 pontos) Demonstre, seja em dedução natural ou no cálculo de Gentzen o seguinte:

$$\begin{array}{ll} \exists x\, \phi \vdash_N \neg \forall x \neg \phi & \qquad \neg \forall x \neg \phi \vdash_N \exists x\, \phi \\ \vdash_G \exists x\, \phi \Rightarrow \neg \forall x \neg \phi & \qquad \vdash_G \neg \forall x \neg \phi \Rightarrow \exists x\, \phi \end{array}$$

(a) (2.0 pontos) Construa uma derivação para $\neg\forall x \neg \phi \vdash_N \exists x\,\phi$ ou $\vdash_G \neg\forall x \neg \phi \Rightarrow \exists x\,\phi$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\exists x\,\phi]^u \qquad \dfrac{[\phi(a)]^v}{\exists x\,\phi}\,(\exists_i)}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\phi(a)}\,(\text{PBC})\ v}{\forall x\,\neg\phi}\,(\forall_i) \qquad \neg\forall x\,\neg\phi}{\bot}\,(\neg_e)}{\exists x\,\phi}\,(\text{PBC})\ u$$

ou

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi[x/t] \Rightarrow \phi[x/t],\, \bot \quad (\text{Ax})}{\Rightarrow \phi[x/t], \neg\phi[x/t]}\,(\text{R}_{\rightarrow})}{\Rightarrow \exists x\,\phi,\, \neg\phi[x/t]}\,(\text{R}_{\exists})}{\Rightarrow \exists x\,\phi, \forall x\,\neg\phi}\,(\text{R}_{\forall}) \qquad \bot \Rightarrow \exists x\,\phi}{\neg\forall x\,\neg\phi \Rightarrow \exists x\,\phi}\,(\text{L}_{\rightarrow})$$

(b) (2.0 pontos) Construa uma derivação para $\exists x\,\phi \vdash_N \neg\forall x\,\neg\phi$ ou $\vdash_G \exists x\,\phi \Rightarrow \neg\forall x\,\neg\phi$.

$$\dfrac{\dfrac{\exists x\,\phi \qquad \dfrac{[\phi(a)]^u \qquad \dfrac{[\forall x\,\neg\phi]^v}{\neg\phi(a)}\,(\forall_e)}{\bot}\,(\neg_e)}{\bot}\,(\exists_e)\ u}{\neg\forall x\,\neg\phi}\,(\neg_i)\ v$$

ou

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\text{Ax})\quad \phi[x/t] \Rightarrow \bot, \phi[x/t] \qquad \bot, \phi[x/t] \Rightarrow \bot \quad (\text{L}_{\bot})}{\phi[x/t], \neg\phi[x/t] \Rightarrow \bot}\,(\text{L}_{\rightarrow})}{\phi[x/t], \forall x\,\neg\phi \Rightarrow \bot}\,(\text{L}_{\forall})}{\exists x\,\phi, \forall x\,\neg\phi \Rightarrow \bot}\,(\text{L}_{\exists})}{\exists x\,\phi \Rightarrow \neg\forall x\,\neg\phi}\,(\text{R}_{\rightarrow})$$

3. (2 pontos) Determine, qual a semântica operacional da instrução de ramificação `IF-THEN-ELSE` em linguagens de especificação como a de PVS. Em particular determine o resultado da aplicação do comando de prova (PROP) (que aplica repetidamente transformações proposicionais via commandos (FLATTEN) e/ou (SPLIT)).

(a) (1.0 ponto) Selecione a derivação correta e justifique em dez palavras:

i.

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \texttt{IF C THEN A ELSE B}}{\Gamma, \texttt{C} \Rightarrow \Delta, \texttt{A} \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \texttt{C}, \texttt{B}}\,(\textsc{prop})$$

ii.

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \texttt{IF C THEN A ELSE B}}{\Gamma, \texttt{C}, \texttt{A} \Rightarrow \Delta \qquad \texttt{B}, \Gamma \Rightarrow \Delta, \texttt{C}}\,(\textsc{prop})$$

(b) (1.0 ponto) Selecione a derivação correta e justifique em dez palavras:

i.

$$\frac{\texttt{IF C THEN A ELSE B}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \texttt{C}, \texttt{A} \Rightarrow \Delta \qquad \texttt{B}, \Gamma \Rightarrow \Delta, \texttt{C}} \ (\textsc{prop})$$

ii.

$$\frac{\texttt{IF C THEN A ELSE B}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \texttt{A}, \Rightarrow \Delta, \texttt{C} \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \texttt{C}, \texttt{B}} \ (\textsc{prop})$$

Em ambos casos a seleção correta é o item i).

4. (1.0 ponto) Justifique em máximo quatro linhas a escolha de indução forte para demonstração do teorema de preservação de informação do algoritmo merge-sort.

O algoritmo merge-sort divide o problema de ordenar uma lista de n elementos em ordenação de duas sub-listas de $n/2$ elementos. Dessa maneira, indução forte permite aplicação da hipótese de indução, o que não seria possível aplicando indução na estrutura das listas.

Tabela 1: Regras de Dedução Natural para Lógica Proposicional (clássica)

introduction rules	elimination rules
$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge_e)$
$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i)$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]^v \\ \vdots \\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\vee_e), u, v$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i), u$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to_e)$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ (\neg_i), u$	$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg_e)$
	$\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg\neg_e)$
$\dfrac{\varphi\{x/x_0\}}{\forall_x \varphi}\ (\forall_i)$ where x_0 cannot occur free in any open assumption.	$\dfrac{\forall_x \varphi}{\varphi\{x/t\}}\ (\forall_e)$
$\dfrac{\varphi\{x/t\}}{\exists_x \varphi}\ (\exists_i)$	$\dfrac{\exists_x \varphi \qquad \begin{array}{c}[\varphi\{x/x_0\}]^u \\ \vdots \\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\exists_e)\ u$ where x_0 cannot occur free in any open assumption on the right and in χ.

Tabela 2: Regras de Dedução à la Gentzen para a Lógica de Predicados

left rules	right rules
Axioms:	
$\Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta \ \ (Ax)$	$\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta \ \ (L_\bot)$
Structural rules:	
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (LWeakening)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi} \ (RWeakening)$
$\dfrac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (LContraction)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi} \ (RContraction)$
Logical rules:	
$\dfrac{\varphi_{i\in\{1,2\}}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (L_\wedge)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi} \ (R_\wedge)$
$\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (L_\vee)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_{i\in\{1,2\}}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_1 \vee \varphi_2} \ (R_\vee)$
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (L_\to)$	$\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi} \ (R_\to)$
$\dfrac{\varphi[x/t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall_x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (L_\forall)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall_x \varphi} \ (R_\forall), \quad y \notin \mathtt{fv}(\Gamma, \Delta)$
$\dfrac{\varphi[x/y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists_x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (L_\exists), \quad y \notin \mathtt{fv}(\Gamma, \Delta)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists_x \varphi} \ (R_\exists)$

Tabela 3: Regra de Corte

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \ (Cut)$$