Lógica Computacional — Turma A

Gabarito da Primeira Prova

Tópicos: Lógica proposicional
Semântica e Dedução

Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília
16 de Abril de 2014
Prof. Mauricio Ayala-Rincón
Estagiário de Docência: José Luis Soncco Álvarez
Monitor: Thiago Mendonça Ferreira Ramos

Nome:	Matrícula:

Duração: 1h40m; Início: 16:05; Fim: 15:45; Duas páginas, Três questões
Sobre respostas: as provas devem ser elaboradas em dedução natural e apresentadas como árvores de derivação e devem incluir o nome de cada regra utilizada em cada passo da derivação.

Indução Estrutural e semântica

1. (3.0 pontos) Considere o seguinte operador T utilizado para transformar fórmulas da lógica de predicados sem disjunção nem implicação.

$T(p) = p$	$T(\neg\phi) = \neg T(\phi)$
$T(\phi_1 \wedge \phi_2) = T(\phi_1) \wedge T(\phi_2)$	$T(\phi_1 \vee \phi_2) = \neg(\neg T(\phi_1) \wedge \neg T(\phi_2))$
$T(\phi_1 \to \phi_2) = \neg(T(\phi_1) \wedge \neg T(\phi_2))$	

Deseja-se demonstrar que este operador é correto; i.e., que para qualquer fórmula φ,

$$\phi \equiv T(\varphi)$$

ou, em outras palavras, que para qualquer designação de valores de verdade das variáveis que ocorrem em φ, o valor de verdade de φ e de $T(\varphi)$ é o mesmo.

Para isto é necessário completar a demonstração por indução na estrutura dos termos embaixo.

Prova indutiva de que T é uma transformação correta: para toda φ, $\varphi \equiv T(\varphi)$.

Base da Indução. $\boldsymbol{\varphi = p}$, uma variável proposicional. Por definição $T(p) = p$. Dessa forma, $p \equiv T(p)$.

Tabela 1: Regras de Dedução Natural para Lógica Proposicional (clássica)

introduction rules	elimination rules
$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge_e)$
$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i)$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \quad \begin{matrix}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \chi\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\psi]^v \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}}{\chi}\ (\vee_e)\ u, v$
$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i)\ u$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to_e)$
$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi}\ (\neg_i)\ u$	$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg_e)$
	$\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg\neg_e)$

Passo da Indução.

Caso negação: $\boldsymbol{\varphi = \neg\varphi_1}$. Por hipótese de indução, $\varphi_1 \equiv T(\varphi_1)$, já que φ_1 é sub fórmula de φ. Assim, $\neg\varphi_1 \equiv \neg T(\varphi_1)$, mas por definição $T(\neg\varphi_1) = \neg T(\varphi_1)$. Logo, $\neg\varphi_1 \equiv T(\neg\varphi_1)$.

(a) (1.0 ponto) Caso conjunção: $\boldsymbol{\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2}$. Por hipótese de indução, $\varphi_1 \equiv T(\varphi_1)$ e $\varphi_2 \equiv T(\varphi_2)$, já que φ_i e φ_2 são sub fórmulas de φ. Sempre que $T(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = T(\varphi_1) \wedge T(\varphi_2)$, obtem-se $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv T(\varphi_1) \wedge T(\varphi_2)$.

(b) (1.0 ponto) Caso disjunção: $\boldsymbol{\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2}$. Provar $\varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv T(\varphi_1 \vee \varphi_2)$.
Por hipótese de indução, $\varphi_1 \equiv T(\varphi_1)$ e $\varphi_2 \equiv T(\varphi_2)$, já que φ_i e φ_2 são sub fórmulas de φ. Por definição

$$T(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \neg(\neg T(\varphi_1) \wedge \neg T(\varphi_2))$$

Para qualquer designação de valores de verdade das variáveis em φ, φ_1 e φ_2 tem valor de verdade T ou F, e esses valores coincidem, respectivamente, com os valores de $T(\varphi_1)$ e $T(\varphi_2)$, por hipótese de indução. Dessa forma, basta comparar uma tabela de valores de verdade para as fórmulas φ e $T(\varphi)$:

$\varphi_1 = T(\varphi_1)$	$\varphi_2 = T(\varphi_2)$	$\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$	$\neg T(\varphi_1)$	$\neg T(\varphi_2)$	$T(\varphi) = \neg(\neg T(\varphi_1) \wedge \neg T(\varphi_2))$
T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T
F	T	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T

Assim, $\varphi \equiv T(\varphi)$.

(c) (1.0 ponto) Caso implicação: $\boldsymbol{\varphi = \varphi_1 \to \varphi_2}$. Provar $\varphi_1 \to \varphi_2 \equiv T(\varphi_1 \to \varphi_2)$.
Por hipótese de indução, $\varphi_1 \equiv T(\varphi_1)$ e $\varphi_2 \equiv T(\varphi_2)$, já que φ_i e φ_2 são sub fórmulas de φ. Por definição

$$T(\varphi_1 \to \varphi_2) = \neg(T(\varphi_1) \wedge \neg T(\varphi_2))$$

$\varphi_1 = T(\varphi_1)$	$\varphi_2 = T(\varphi_2)$	$\varphi = \varphi_1 \to \varphi_2$	$\neg T(\varphi_2)$	$T(\varphi) = \neg(T(\varphi_1) \wedge \neg T(\varphi_2))$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

Assim, $\varphi \equiv T(\varphi)$.

Observe que para completar a prova dos últimos dois itens, pode-se supor a hipótese de indução (i.e., $\varphi_1 \equiv T(\varphi_1)$ e $\varphi_2 \equiv T(\varphi_2)$) e trabalhar com tabelas de verdade.

Dedução natural

2. (7.0 pontos) Deseja-se constroir uma árvore de dedução natural para o sequente

$$\boldsymbol{(p \to q) \to r, \quad r \to p \vdash p \wedge (q \to r)}$$

Além das regras de derivação usuais, pode ser utilizada (PBC) e as seguintes regras derivadas para *contraposição*:

$$\frac{\neg\psi \to \neg\varphi}{\varphi \to \psi}\ (\text{Ctrp}) \qquad\qquad \frac{\psi \to \varphi}{\neg\varphi \to \neg\psi}\ (\text{Ctrp})$$

Aplique regras de eliminação da disjunção para $r \vee \neg r$, $q \vee \neg q$ e $p \vee \neg p$, conforme o esquema embaixo:

$$
\dfrac{
\dfrac{\Gamma_0}{(r \lor \neg r)}
\quad
\dfrac{\begin{array}{c}[r]^x\\ \Gamma_1\end{array}}{p \land (q \to r)}
\quad
\dfrac{
\dfrac{\Gamma_0}{(q \lor \neg q)}
\quad
\dfrac{\begin{array}{c}[\neg r]^y, [q]^u\\ \Gamma_2\end{array}}{p \land (q \to r)}
\quad
\dfrac{
\dfrac{\Gamma_0}{(p \lor \neg p)}
\quad
\dfrac{\begin{array}{c}[\neg r]^y, [\neg q]^u, [p]^l\\ \Gamma_3\end{array}}{p \land (q \to r)}
\quad
\dfrac{\begin{array}{c}[\neg r]^y, [\neg q]^u, [\neg p]^l\\ \Gamma_4\end{array}}{p \land (q \to r)}
}{p \land (q \to r)}\ (\lor_e)\ m, l
}{p \land (q \to r)}\ (\lor_e)\ u, v
}{p \land (q \to r)}\ (\lor_e)\ x, y
$$

(a) (2.0 ponto) Apresente uma árvore de dedução natural para Γ_0, i.e., (LEM):

$$\vdash \varphi \lor \neg\varphi$$

(b) (1.0 ponto) Apresente uma árvore de dedução natural para Γ_1; i.e., para

$$(p \to q) \to r, \quad r \to p, \quad r \vdash p \land (q \to r).$$

(c) (1.0 ponto) Da mesma forma, apresente uma árvore de dedução natural para Γ_2.

(d) (1.0 ponto) Apresente então uma árvore de dedução natural para Γ_3.

(e) (2.0 ponto) Finalmente, para completar a árvore, apresente uma árvore de dedução natural para Γ_4.

(a) Γ_0:

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{[p]^x}{p \lor \neg p}\ (\lor_i)
\quad [\neg(p \lor \neg p)]^z
}{\bot}\ (\neg_e)
}{\neg p}\ (\neg_i)\ x
}{r \lor \neg r}\ (\lor_i)
\quad [\neg(p \lor \neg p)]^z
}{
\dfrac{\bot}{p \lor \neg p}\ (\text{PBC})\ z
}\ (\neg_e)
$$

(b) Γ_1:

$$
\dfrac{
\dfrac{[r]^x}{q \to r}\ (\to_i)\ \emptyset
\qquad
\dfrac{[r]^x \quad r \to p}{p}\ (\to_e)
}{p \land (q \to r)}\ (\land_i)
$$

(c) Γ_2:

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{[q]^u}{p \to q}\ (\to_i)\ \emptyset
\quad (p \to q) \to r
}{r}\ (\to_e)
\quad [\neg r]^y
}{\bot}\ (\neg_e)
}{p \land (q \to r)}\ (\bot_e)
$$

(d) Γ_3:

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{[\neg q]^v}{\neg r \to \neg q}\ (\to_i)\ \emptyset
}{q \to r}\ (\text{Ctrp})
\quad [p]^l
}{p \land (q \to r)}\ (\land_i)
$$

(e) Γ_4:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg p]^m}{\neg q \to \neg p}\,(\to_i)\ \emptyset}{p \to q}\,(\text{Ctrp}) \quad (p \to q) \to r}{r}\,\to_e \quad [\neg r]^y}{\bot}\,(\neg_e)}{p \wedge (q \to r)}\,(\bot_e)$$