Lógica Computacional 1
Segunda Prova

Tópicos: Lógica de Predicados - dedução e semântica
Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília
Departamento de Ciência da Computação

27 de fevereiro de 2013
Prof. Mauricio Ayala Rincón

Duração: 100 min
Início: 16:00h - Término: 17:45h

1. (5 pontos) Completar-se-ão derivações utilizando o cálculo de Gentzen e o cálculo de dedução natural para demonstrar que $\neg\forall x\phi$ e $\exists x\neg\phi$ são equivalentes; i.e.,

$$\vdash_G \neg\forall x\phi \Leftrightarrow \exists x\neg\phi \text{ e}$$

$$\neg\forall x\,\phi \;\dashv\vdash_N\; \exists x\,\neg\phi.$$

   (a) (2 pontos) Embaixo é apresentada uma derivação à la Gentzen do sequente $\neg\forall x\phi \Rightarrow \exists x\neg\phi$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{(Ax)}
\UnaryInfC{$\phi[x/x_0] \Rightarrow \bot, \phi[x/x_0]$}
\RightLabel{$(R_\to)$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \phi[x/x_0] \to \bot, \phi[x/x_0]$}
\RightLabel{$(R_\exists)$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \exists x(\phi \to \bot), \phi[x/x_0]$}
\RightLabel{$(R_\forall)$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \exists x(\phi \to \bot), \forall x\phi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{$(L_\bot)$}
\UnaryInfC{$\bot \Rightarrow \exists x(\phi \to \bot)$}
\RightLabel{$(L_\to)$}
\BinaryInfC{$\forall x\phi \to \bot \Rightarrow \exists x(\phi \to \bot)$}
\end{prooftree}
$$

   Construa uma derivação utilizando o cálculo de dedução natural para $\neg\forall x\phi \vdash \exists x\neg\phi$.
   R/

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg\phi[x/x_0]]^u$}
\RightLabel{$(\exists_i)$}
\UnaryInfC{$\exists_x\neg\phi$}
\AxiomC{$[\neg\exists_x\neg\phi]^v$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{(PBC) u}
\UnaryInfC{$\phi[x/x_0]$}
\RightLabel{$(\forall_i)$}
\UnaryInfC{$\forall_x\phi$}
\AxiomC{$\neg\forall_x\phi$}
\RightLabel{$(\neg_e)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{(PBC) v}
\UnaryInfC{$\exists_x\neg\phi$}
\end{prooftree}
$$

(b) (2 pontos) Embaixo é apresentada uma derivação utilizando o cálculo de dedução natural para $\exists x\, \neg\phi \vdash \neg\forall x\, \phi$:

$$\dfrac{\exists_x\neg\phi \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall_x\phi]^v}{\phi[x/x_0]}\,(\forall_i) \qquad [\neg\phi[x/x_0]]^u}{\bot}\,(\neg_e)}{\neg\forall_x\phi}\,(\neg_i)\ v}{\neg\forall_x\phi}\,(\exists_e)\ u$$

Construa uma derivação à la Gentzen para o sequente $\exists x\neg\phi \Rightarrow \neg\forall x\phi$.

R/

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi[x/x_0] \Rightarrow \phi[x/x_0]\ \ (Ax) \qquad \bot, \phi[x/x_0] \Rightarrow\ \ (L_\bot)}{\neg\phi[x/x_0], \phi[x/x_0] \Rightarrow}\,(L_\to)}{\neg\phi[x/x_0], \forall\phi \Rightarrow}\,(R_\forall)}{\exists x\neg\phi,\ \forall x\phi \Rightarrow}\,(R_\exists)}{\exists x\neg\phi,\ \forall x\phi \Rightarrow \bot}\,(RW)}{\exists x(\neg\phi) \Rightarrow \neg\forall x(\phi)}\,(R_\to)$$

(c) (1 ponto) Das provas precedentes, pode-se inferir que uma das fórmulas:

$\neg\forall x\phi \ \to\ \exists x\neg\phi$ ou

$\exists x\, \neg\phi \ \to\ \neg\forall x\, \phi$

é um teorema intuicionista.

- Indique qual das fórmulas é intuicionista. Justifique sua resposta.

R/ a fórmula $\exists x\, \neg\phi \ \to\ \neg\forall x\, \phi$, sempre que na derivação de $\exists x\, \neg\phi \vdash \neg\forall x\, \phi$ são somente utilizadas regras do cálculo intuicionista.

2. (3 pontos) Apresente uma prova de que *Modus Tollens* é um teorema da lógica intuicionista. Basta apresentar uma derivação intuicionista de MT seja no cálculo de dedução natural ou à la Gentzen; i.e., uma derivação intuicionista no cálculo de Gentzen para o sequente $\varphi \to \psi, \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$ ou uma derivação intuicionista no cálculo de dedução natural para $\varphi \to \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi$.

R/

Em dedução natural:

$$\dfrac{\dfrac{(\to_e)\ \dfrac{[\phi]^x \qquad (\phi \to \psi)}{\psi} \qquad (\neg\psi)}{\bot}\,(\neg_e)}{(\neg\phi)}\,(\neg_i)\ x$$

À la Gentzen:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(Ax)\ \ \varphi \Rightarrow \varphi \qquad \psi \Rightarrow \psi\ \ (Ax)}{\varphi \to \psi, \varphi \Rightarrow \psi}\,(L_\to) \qquad \bot, \varphi \to \psi, \varphi \Rightarrow\ \ (L_\bot)}{\varphi \to \psi, \neg\psi, \varphi \Rightarrow}\,(L_\to)}{\varphi \to \psi, \neg\psi, \varphi \Rightarrow \bot}\,(RW)}{\varphi \to \psi, \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi}\,(R_\to)$$

3. (2 pontos) A lógica de predicados é mais expressiva que a lógica proposicional, mas também tem suas limitações. Neste sentido, o teoremas de Löwenheim-Skolem e o teorema de compacidade têm um papel importante e caraterizam a semântica das linguagens de primeira ordem. Em particular, não é possível expressar a noção de *finito* e *contável infinito* na linguagem desta lógica.

   - Enuncie e demonstre o teorema de Löwenheim-Skolem.

   Ajuda: O teorema estabelece que para qualquer sentença da lógica de predicados que tenha modelos de cardinalidade pelo menos n, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existem modelos infinitos. Considere o conjunto de fórmulas

$$\Gamma := \{\psi\} \cup \{\phi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

   onde $\phi_n := \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{1 \le i < j \le n} \neg(x_i = x_j)$ e utilize o teorema da compacidade.

   Solução: A fórmula $\phi_n := \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{1 \le i < j \le n} \neg(x_i = x_j)$ especifica a existência de pelo menos n elementos. Observe primeiro que qualquer subconjunto finito $\Gamma_0 \subset \Gamma$ é satisfatível: Seja k maior que o índice de qualquer ϕ_n em Γ_0. São dois casos a considerar.

   - $\psi \notin \Gamma_0$, selecione qualquer modelo de cardinalidade k. Este satisfará Γ_0.
   - $\psi \in \Gamma_0$, selecione um modelo de ψ de cardinalidade maior ou igual que k. Este satisfará Γ_0.

   Dessa forma, conclui-se que qualquer subconjunto finito de Γ é satisfatível, o que implica, pelo teorema de compacidade, que o é. Mas um modelo de Γ deve ter cardinalidade infinita, uma vez que todas as fórmulas ϕ_n para $n \in \mathbb{N}$, valem nesse modelo. Dessa forma (como ψ também está em Γ), esse modelo infinito é também modelo da fórmula ψ.

Tabela 1: Regras do cálculo de Gentzen para a lógica de predicados

left rules	right rules
Axioms:	
$\Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta \ \ (Ax)$	$\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta \ \ (L_\bot)$
Structural rules:	
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (LWeakening)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi} \ (RWeakening)$
$\dfrac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (LContraction)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi} \ (RContraction)$
Logical rules:	
$\dfrac{\varphi_{i\in\{1,2\}}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (L_\wedge)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \ \ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi} \ (R_\wedge)$
$\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \ \ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (L_\vee)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_{i\in\{1,2\}}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_1 \vee \varphi_2} \ (R_\vee)$
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \ \ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (L_\to)$	$\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi} \ (R_\to)$
$\dfrac{\varphi[x/t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall_x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (L_\forall)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/y]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall_x \varphi} \ (R_\forall), \quad y \notin FV(\Gamma, \Delta)$
$\dfrac{\varphi[x/y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists_x \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \ (L_\exists), \quad y \notin FV(\Gamma, \Delta)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists_x \varphi} \ (R_\exists)$

Tabela 2: Regras de dedução natural para a lógica de predicados

introduction rules	elimination rules
$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge_i)$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge_e)$
$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee_i)$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \chi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]^v \\ \vdots \\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\vee_e)\ u, v$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\ (\to_i)\ u$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to_e)$
$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ (\neg_i)\ u$	$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg_e)$
$\dfrac{\varphi[x/x_0]}{\forall_x \varphi}\ (\forall_i)$	$\dfrac{\forall_x \varphi}{\varphi[x/t]}\ (\forall_e)$
$\dfrac{\varphi[x/t]}{\exists_x \varphi}\ (\exists_i)$	$\dfrac{\exists_x \varphi \qquad \begin{array}{c}[\varphi[x/x_0]]^u \\ \vdots \\ \chi\end{array}}{\chi}\ (\exists_e)\ u$
	$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^u \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\varphi}\ (\text{PBC})\ u$