Lógica Computacional
Gabarito
Segunda Prova

Tópicos: Lógica de Predicados, Dedução e Semântica

Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília

15 de junho de 2011

Prof. Mauricio Ayala-Rincón

Duração: 100 min.
Início: 16:00; Fim: 17:45
Duas Páginas, três questões

DEDUÇÃO NATURAL

1. (4.0 pontos) Na lógica proposicional, definimos as Leis de De Morgan como sendo:

$$i.\quad \neg(\phi \vee \psi) \equiv (\neg\phi) \wedge (\neg\psi) \qquad\qquad ii.\quad \neg(\phi \wedge \psi) \equiv (\neg\phi) \vee (\neg\psi)$$

Na lógica de predicados essas duas leis são válidas existencial e universalmente.

Prove o caso existencial utilizando árvores de dedução natural e indicando em cada passo da derivação a regra utilizada:

(a) (2.0 pontos) $\exists x\,(\neg(\phi \vee \psi)) \vdash \exists x\,((\neg\phi) \wedge (\neg\psi))$

(b) (2.0 pontos) $\exists x\,((\neg\phi) \wedge (\neg\psi)) \vdash \exists x\,(\neg(\phi \vee \psi))$

R/

(a) $\exists x\,(\neg(\phi \vee \psi)) \vdash \exists x\,(\neg\phi \wedge \neg\psi)$

$$\dfrac{\exists x\,(\neg(\phi\vee\psi)) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\phi\vee\psi)[x/x_0]]^a \quad \begin{array}{c}\dfrac{[\phi[x/x_0]]^u}{\phi[x/x_0]\vee\psi[x/x_0]}\,\vee i \\ \equiv \\ (\phi\vee\psi)[x/x_0]\end{array}}{\bot}\,\neg e}{\neg\phi[x/x_0]}\,\neg i, u \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(\phi\vee\psi)[x/x_0]]^a \quad \begin{array}{c}\dfrac{[\psi[x/x_0]]^v}{\phi[x/x_0]\vee\psi[x/x_0]}\,\vee i \\ \equiv \\ (\phi\vee\psi)[x/x_0]\end{array}}{\bot}\,\neg e}{\neg\psi[x/x_0]}\,\neg i, v}{\neg\phi[x/x_0]\wedge\neg\psi[x/x_0]}\,\wedge i \\ \equiv \\ (\neg\phi\wedge\neg\psi)[x/x_0]\end{array}}{\exists x\,(\neg\phi\wedge\neg\psi)}\,\exists x\, i}{\exists x\,(\neg\phi\wedge\neg\psi)}\,\exists x\, e, a$$

(b) $\exists x\,(\neg\phi \wedge \neg\psi) \vdash \exists x\,(\neg(\phi \vee \psi))$

$$\dfrac{\exists x\,(\neg\phi \wedge \neg\psi) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\,(\phi \vee \psi)[x/x_0]\,]^b\\ \equiv\\ \phi[x/x_0] \vee \psi[x/x_0]\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\,(\neg\phi \wedge \neg\psi)[x/x_0]\,]^a\\ \equiv\\ \neg\phi[x/x_0] \wedge \neg\psi[x/x_0]\end{array}}{\neg\phi[x/x_0]}\,\wedge e_1 \qquad [\,\phi[x/x_0]\,]^u}{\bot}\,\neg e \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\,(\neg\phi \wedge \neg\psi)[x/x_0]\,]^a\\ \equiv\\ \neg\phi[x/x_0] \wedge \neg\psi[x/x_0]\end{array}}{\neg\psi[x/x_0]}\,\wedge e_2 \qquad [\,\psi[x/x_0]\,]^v}{\bot}\,\neg e}{\bot}\,\vee e, u, v}{\neg(\phi \vee \psi)[x/x_0]}\,\neg i, b}{\exists x\,(\neg(\phi \vee \psi))}\,\exists x\, i}{\exists x\,(\neg(\phi \vee \psi))}\,\exists x\, e, a$$

2. (4.0 pontos) A lógica de primeira ordem diferencia-se da lógica proposicional principalmente devido à presença dos predicados (e não mais variáveis proposicionais) e dos quantificadores existencial e universal. Tais elementos dão um poder expressivo maior a esse tipo de linguagem lógica. Isso acaba permitindo diversas maneiras equivalentes de se expressar um determinado fato.

   Exemplo: *"Não existe um objeto que não sofra ação da força gravitacional."*

   - A afirmação acima é equivalente a dizer: Todos os objetos sofrem ação da força gravitacional.
   - Seja um predicado unário ϕ, de forma que $\phi(x)$ seja interpretado como: "x sofre ação da força gravitacional" . Assim, as sentenças precedentes podem-se expressar como $\neg\exists x\,\neg\phi \equiv \forall x\,\phi$.

   Prove os seguintes sequentes utilizando árvores de dedução natural e indicando em cada derivação o nome da regra utilizada:

   (a) (2.0 pontos) $\forall x\,\phi \vdash \neg\exists x\,\neg\phi$

   (b) (2.0 pontos) $\neg\exists x\,\neg\phi \vdash \forall x\,\phi$

   R/

   (a) $\forall x\,\phi \vdash \neg\exists x\,\neg\phi$

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x\,\neg\phi]^u \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x\,\phi}{\phi[x/x_0]}\,\forall x\, e \qquad [\,\neg\phi[x/x_0]\,]^v}{\bot}\,\neg e}{\bot}\,\exists x\, e, v}{\neg\exists x \neg\phi}\,\neg i, u$$

   (b) $\neg\exists x\,\neg\phi \vdash \forall x\,\phi$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\,\neg\phi[x/x_0]\,]^u}{\exists x\,\neg\phi}\,\exists x\, i \qquad \neg\exists x\,\neg\phi}{\bot}\,\neg e}{\phi[x/x_0]}\,PBC, u}{\forall x\,\phi}\,\forall x\, i$$

SEMÂNTICA

3. (2.0 pontos) A lógica de predicados é mais expressiva que a lógica proposicional, mas também tem suas limitações. Neste sentido, os teoremas de Löwenheim-Skolem e de compacidade jogam um rôle importante e caraterizam a semântica das linguagens de primeira ordem. Em particular não é possível expressar a noção de finito e contável infinito na linguagem desta lógica.

   Enuncie e demonstre o teorema de Löwenheim-Skolem.

   Ajuda: O teorema estabelece que para qualquer sentência da lógica de predicados ψ que tenha modelos de cardinalidade pelo menos n, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existem modelos inifinitos. Considere o conjunto de fórmulas

$$\Gamma := \{\psi\} \cup \{\phi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

onde

$$\phi_n := \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j)$$

e utilize o teorema de compacidade.

R/ A fórmula

$$\phi_n := \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j)$$

especifica a existência de pelo menos n elementos.

Observe primeiro que qualquer subconjunto finito $\Gamma_0 \subset \Gamma$ é satisfazível:

Seja k maior que o índice de qualquer ϕ_n em Γ_0. São dois casos a considerar.

- Caso ψ não está em Γ_0, selecione qualquer modelo de cardinalidade k. Este satisfará Γ_0.
- Caso ψ está em Γ_0, selecione um modelo de ψ de cardinalidade maior ou igual que k. Este satisfará Γ_0.

Dessa forma, conclui-se que qualquer subconjunto finito de Γ é satisfazível, o que implica, pelo teorema de compacidade, que Γ o é.

Mas um modelo de Γ deve ter cardinalidade infinita, sempre que todas as fórmulas ϕ_n para $n \in \mathbb{N}$, valem nesse modelo. Dessa forma (como ψ também está em Γ), esse modelo infinito é também modelo da fórmula ϕ.