Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Notas de EDP2
(Versão 2.0 - Maio/2023)

por

Marcelo Furtado

Brasília

2023

Sumário

Prefácio

Este trabalho teve como origem as notas de aula de um curso de Equações Diferenciais Parcias 2 ministrado no primeiro semestre de 2007. O texto está baseado fundamentalmente nos livros de deFigueiredo [6], Evans [5], Gilbarg-Trudinger [7] e Ponce [15]. Os assuntos aqui tratados estão relacionados somente com equações elípticas de segunda ordem. Uma parte dos exercícios ao final de cada capítulo foram retirados de listas encontradas na Internet. Alguns deles são resultados clássicos que vêm acompanhado de referências com o intuito de não tornar o texto muito extenso. Acreditamos que o material aqui apresentado pode ser coberto em um curso de 60 horas.

A existência dessas notas não teria sido possível sem a ajuda dos alunos, de modo que nos coube somente uma porção menor de digitação, revisão e homogenização do texto. Sendo assim, não poderíamos deixar de registrar aqui nossos agradecimentos a todos que ajudaram na tarefa de digitação, quais sejam: Adriana Flores, Anyelle Nogueira, Janete Carvalho, Jefferson Abrantes, Laura Lobato, Manuela Rezende, Mariana Reis, Maxwell Lizete, Miguel Cezana, Nilton Barroso, Pablo Pinheiro, Ricardo Ruviaro. Agradecemos ainda Walter Batista e Gilberto Vieira que forneceram as anotações manuscritas das aulas.

Como é comum nesse tipo de material, o texto está ainda incompleto. Pretendemos incluir várias aplicações que terão origem em seminários de cursos posteriores. Algumas dessas aplicações estão digitadas mais não foram ainda revisadas. Por isso, preferimos não incluí-las nessa versão. Desde já peço desculpas àqueles que digitaram algum seminário e ainda não o encontraram nessa versão das notas.

Tendo em vista o cárater dinâmico que gostaríamos de dar a essas notas convido a todos que tenham sugestões ou correções que as envie para o endereço eletrônico mfurtado@unb.br.

Marcelo Fernandes Furtado
Dep. de Matemática - UnB

Notações

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ será sempre um aberto
- $B_r(y) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$ é a bola aberta de centro $y \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$
- $\omega_n = \int_{B_1(0)} 1 \mathrm{d}x$ é o volume da bola unitária $B_1(0)$
- $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ indica que $\overline{\Omega_0}$ é um compacto contido no aberto Ω
- $C^k(\Omega)$ é o conjunto de todas as funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que possuem derivadas até ordem k contínuas em Ω
- $C^{k,\gamma}(\Omega)$ é o conjunto de todas as funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ cujas derivadas até ordem k são Hölder contínuas com expoente γ
- $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$, $u^-(x) = \max\{-u(x), 0\}$

Introdução

Estamos interessados em estudar a equação diferencial parcial

$$Lu = f \quad \text{em } \Omega,$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, o operador diferencial L atua sobre funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciáveis e tem uma das seguintes formas

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

ou

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$

com $a^{ij}, b^i, c : \Omega \to \mathbb{R}$ tendo algum tipo de regularidade que especificaremos no momento oportuno e

$$u_{x_i} := \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_{x_i x_j} := \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j}$$

denotam as derivadas parciais de ordem da função u.

Um exemplo importante do problema acima é o caso em que $b^1 \equiv \cdots \equiv b^n \equiv c \equiv 0$ e

$$a^{ij}(x) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j, \\ 0, \text{ se } i \neq j. \end{cases}$$

Neste caso, temos a conhecida *equação de Poisson*.

$$-\Delta u = -\sum_{i=1}^{j} u_{x_i x_i} = f \quad \text{em } \Omega.$$

No caso em que $f \equiv 0$ temos a *equação de Laplace*

$$\Delta u = 0 \quad \text{em } \Omega.$$

As equações acima são importante por seu forte apelo físico. Por exemplo, se a dimensão n é igual a 3, $E = (E_x, E_y, E_z)$ é um campo vetorial elétrico de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ e $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma distribuição de cargas, prova-se que

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho \quad \text{em } \Omega,$$

onde $\operatorname{div} E$ é a divergência do campo E, isto é,

$$\operatorname{div} E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Em particular, quando o campo E é um campo potencial, existe uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$E = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right).$$

Temos então, divE = div(∇u) = Δu, e portanto a função u satisfaz a seguinte equação de Poisson

$$\Delta u(x, y, z) = 4\pi\rho(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Omega.$$

No caso bidimensional, $n = 2$, verifica-se que, se $u(x, y)$ é a temperatura de uma chapa metálica em equilíbrio térmico, então u satisfaz a equação de Laplace

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é uma região do plano que representa a chapa metálica.

Observe que se uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é tal que $\Delta u = f$ em Ω então, para toda constante $\gamma \in \mathbb{R}$, a função $v(x) = u(x) + \gamma$ ainda satisfaz a mesma equação. Sendo assim, cabe a seguinte pergunta: que tipo de imposição precisamos fazer para obter unicidade de soluções para o problema prático com o qual estamos trabalhando?

Uma idéia seria ter algum controle do que acontece com a solução na fronteira do conjunto Ω. Isso nos leva à formulação do seguinte problema: dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ suficientemente regular e uma função contínua $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, encontrar uma função $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ contínua e duas vezes derivável em Ω tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u & = & 0 & \text{em } \Omega, \\ u & = & g & \text{em } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

O problema acima é conhecido como *Problema de Dirichlet*. Podemos fazer a mesma formulação para a equação de Poisson. Nesse caso o problema é

$$\begin{cases} \Delta u &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= g \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω e g são como antes e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é contínua.

O objetivo principal dessas notas é estudar as seguintes questões relativas a problemas como os acima mencionados:

1. existência de solução;
2. unicidade da solução;
3. como a solução varia quando variamos os dados de fronteira.

Nos casos em que houver existência de solução vamos ainda estabelecer algumas propriedades qualitativas dessas soluções.

A fim de estabelecer de uma maneira mais clara alguns problemas a serem estudados vamos no que segue fixar algumas notações.

Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ denotamos o conjunto das funções reais contínuas definidas em Ω por

$$C(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ é contínua em } \Omega\}.$$

Se $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ é um inteiro não negativo, um *multi-índice α de ordem k* é uma n-upla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tal que

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k,$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. O número $|\alpha|$ acima é chamado *ordem do multi-índice α*. Se $|\alpha| \geq 1$ e $u \in C(\Omega)$, denotamos

$$D^\alpha u := \frac{\partial^k u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n},$$

quando a derivada mista do lado direito acima existe. A fim de facilitar a notação escrevemos ainda $D^\alpha u = u$ quando $|\alpha| = 0$.

Observe que $D^\alpha u$ é uma função definida em Ω que toma valores em $\mathbb{R}$. Quando u possui todas as derivadas mistas de ordem k escrevemos

$$D^k u(x) := \{D^\alpha u(x) : \alpha \text{ é um multi-índice de ordem } k\}.$$

Estabelecendo algum tipo de ordem para as derivadas mistas acima, $D^k u(x)$ pode ser visto como um vetor de $\mathbb{R}^{n^k}$. Casos particulares importantes são aqueles em que $k = 1$, quando podemos identificar a derivada com o vetor gradiente

$$D^1u(x) \cong \nabla u(x) := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x)\right),$$

bem como o caso $k = 2$, quando identificamos a derivada com a matriz Hessiana

$$D^2u(x) \cong \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{bmatrix}.$$

Com relação à derivadas de ordem superior vamos definir, para $k \in \mathbb{N}$, os seguintes conjuntos

$$C^k(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} : \begin{array}{c} D^\alpha u \text{ existe e é contínua para todo} \\ \text{multi-índice } \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq k \end{array} \right\}$$

e

$$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} C^k(\Omega).$$

Escrevemos ainda $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Note que uma função $u \in C(\Omega)$ pode ser ilimitada. No entanto, se ela for limitada e uniformemente contínua em Ω, podemos estendê-la continuamente (e de maneira única) até o fecho de Ω. Desse modo, podemos falar dos valores da função u na fronteira do conjunto Ω. Definimos então, para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, o conjunto

$$C^k(\overline{\Omega}) := \left\{ u \in C^k(\Omega) : \begin{array}{c} D^\alpha u \text{ é limitada e uniformemente contínua} \\ \text{para todo multi-índice } \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq k \end{array} \right\}.$$

Não é difícil mostrar que, com as definições usuais de soma entre funções e multiplicação de uma função por um número real, os conjuntos $C^k(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$ e $C^k(\overline{\Omega})$ são espaços vetoriais reais.

Utilizando as notações introduzidas acima podemos reformular alguns dos problemas mencionados anteriormente como segue.

Problema de Dirichlet: Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ contínua, encontrar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Problema de Poisson: Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e funções contínuas $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, encontrar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Vamos introduzir um outro problema que será também de nosso interesse fazendo algumas modificações na condição de fronteira. Para isso, vamos supor que a fronteira $\partial\Omega$ é suave, em um sentido que ficará claro mais tarde, e denotar por $\eta = \eta(x)$ o vetor normal exterior a Ω no ponto $x \in \partial\Omega$. Se $u \in C(\overline{\Omega})$ e $x \in \partial\Omega$ a derivada normal de u no ponto x, quando existe, será denotada por

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) := \nabla u(x) \cdot \eta(x).$$

Estamos prontos para apresentar o outro modelo básico de problema a ser tratado nessas notas.

Problema de Neumann: Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com fronteira suave e funções contínuas $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, encontrar $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Capítulo 1

Funções harmônicas

Começamos esse capítulo com a seguinte definição.

Definição 1.1. *Uma função $u \in C^2(\Omega)$ é harmônica em Ω se ela satisfaz a equação*

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

em que $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$ é o operador Laplaciano.

O exemplo mais simples de função harmônica é uma função constante. De uma maneira mais geral, qualquer função da forma

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto a_0 + \sum_{i=1,\ldots,n} b_i x_i + \sum_{i,j=1..n,\, i \neq j} a_{ij} x_i x_j,$$

com a_0, b_i $a_{ij} \in \mathbb{R}$ é também harmônica. Outro exemplo importante de função harmônica é a chamada solução fundamental da equação de Laplace $\Gamma : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por (cf. Exercício 1.1)

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln |x|, & \text{se } n = 2, \\ \dfrac{1}{n(2-n)\omega_n} |x|^{2-n}, & \text{se } n \geq 3, \end{cases}$$

Veremos no capítulo seguinte que, para uma classe especial de funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a solução fundamental está intimamente ligada com a solução da equação $\Delta u = f$ em $\mathbb{R}^n$.

O objetivo deste capítulo é estudar algumas propriedades básicas das funções harmônicas.

1.1 A Propriedade da Média

Se $u \in C(\Omega)$ e $B_r(x_0) \subset \Omega$ é uma bola aberta, então a *média de u em $\partial B_r(x_0)$* e a *média de u em $B_r(x_0)$* são definidas, respectivamente, por

$$\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x, , \qquad \frac{1}{\omega_n r^n} \int_\Omega u(x) \mathrm{d}x,$$

onde ω_n é o volume da bola unitária $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que a função u satisfaz a Propriedade da Média se

$$u(x_0) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x \tag{1.1}$$

e

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}x, \tag{1.2}$$

para toda bola $B_r(x_0) \subset \Omega$.

Não é difícil mostrar que as duas igualdades acima são equivalentes. De fato, suponha que $u \in C(\Omega)$ satisfaz (1.1), de modo que para todo $0 < s \leq r$ vale

$$u(x_0) n s^{n-1} = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_s(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x.$$

Integrando no intervalo $[0, r]$ com relação à variável s, obtemos

$$r^n u(x_0) = \int_0^r u(x_0) n s^{n-1}\, \mathrm{d}s = \frac{1}{\omega_n} \int_0^r \left(\int_{\partial B_s(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x \right) \mathrm{d}s = \frac{1}{\omega_n} \int_{B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}x,$$

e portanto a equação (1.2) é satisfeita. Reciprocamente, suponha que

$$r^n u(x_0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\omega_n} \int_0^r \left(\int_{\partial B_s(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x \right) \mathrm{d}s.$$

Derivando com respeito à variável r, observando que a função $s \mapsto \int_{\partial B_s(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x$ é contínua e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$n r^{n-1} u(x_0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x)\, \mathrm{d}\sigma_x,$$

que é exatamente a equação (1.1).

Para motivar o nosso primeiro resultado observe que, se $u : (a, b) \to \mathbb{R}$ é contínua, podemos facilmente utilizar o Teorema do Valor Intermediário para garantir a existência de $x_0 \in (a, b)$

tal que

$$u(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x,$$

isto é, a média de u em (a, b) é atingida em algum ponto do intervalo. Se, além disso, soubermos que a função u é harmônica, então por integração básica concluímos que $u(x) = c_1 x + c_2$, para constante c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. Desse modo,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b (c_1 x + c_2)\mathrm{d}x = c_1\left(\frac{b+a}{2}\right) + c_2 = u\left(\frac{b+a}{2}\right),$$

o que mostra que a média é atingida exatamente no centro do intervalo (a, b) e, por conseguinte, u satisfaz a Propriedade da Média.

O resultado principal dessa seção mostra que o mesmo vale em dimensões maiores.

Teorema 1.2. *Uma função $u \in C^2(\Omega)$ é harmônica em Ω se, e somente se, ela satisfaz a Propriedade da Média, isto é, as igualdades (1.1) e (1.1) se verificam para toda bola $B_r(x_0) \subset \Omega$.*

Para provar o resultado acima, vamos nos valer de um importante resultado da Teoria de Integração. Como ele será usado várias vezes ao longo dessas notas, convém enunciá-lo. Considere então $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado cuja fronteira $\partial\Omega$ é uma hiperfície de classe C^1 e $F = (F_1, \ldots, F_n)$ um campo vetorial tal que cada função coordenada $F^i \in C^1(\overline{\Omega})$, $i = 1, \ldots, n$. Então o Teorema da Divergência nos garante que

$$\int_\Omega \operatorname{div} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} F(x)\cdot\eta(x)\,\mathrm{d}\sigma_x,$$

onde $\operatorname{div}F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$ é a divergência do campo F e $\eta(x)$ é o vetor normal exterior no ponto $x \in \partial\Omega$. As condições de regularidade podem ser enfraquecidas sem afetar a validade do teorema. Podemos supor somente que $F^i \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e que o divergente seja integrável. As condições sobre a regularidade de $\partial\Omega$ também podem ser mais fracas (cf. [18]).

A expressão acima tem uma série de consequências importantes que enunciamos abaixo:

Teorema 1.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado cuja fronteira $\partial\Omega$ é uma hiperfície de classe C^1, $\eta(x) = (\eta^1(x), \ldots, \eta^n(x))$ o vetor unitário normal exterior em um ponto $x \in \partial\Omega$ e $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Então*

(a) $\displaystyle\int_\Omega u_{x_i}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\eta^i\,\mathrm{d}\sigma_x$;

(b) $\displaystyle\int_\Omega u_{x_i} v\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u v_{x_i}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} uv\eta^i\,\mathrm{d}\sigma_x$;

(c) $\displaystyle\int_\Omega \Delta u\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\eta}\,\mathrm{d}\sigma_x$;

(d) $\displaystyle\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u\Delta v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \eta}\,\mathrm{d}\sigma_x;$

(e) $\displaystyle\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \eta} - v\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\mathrm{d}\sigma_x,$

Demonstração. O item (a) é uma consequência imediata da aplicação do Teorema da Divergência ao campo $F = (F_1, \ldots, F_n)$ definido por $F_i(x) = u(x)$ e $F_j(x) =$, se $i \neq j$. As demais afirmações podem ser provadas de maneira análoga e deixamos este trabalho para o leitor (cf. Exercício 1.2). □

Estamos prontos para apresentar a prova do nosso resultado principal.

Demonstração do Teorema 1.2. Seja $u \in C^2(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$ e $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset \Omega$. Defina a função

$$\varphi(s) := \frac{1}{n\omega_n s^{n-1}} \int_{\partial B_s(x_0)} u(x)\,\mathrm{d}\sigma_x, \quad s \in (0, r],$$

que nada mais é do que a média da função u na esfera $\partial B_s(x_0)$. Vamos inicialmente verificar que, se u é harmônica, então a função acima é constante. Para tanto, fazemos a mudança de variáveis $x \mapsto x_0 + sz$, obtendo

$$\varphi(s) = \frac{1}{n\omega_n s^{n-1}} \int_{\partial B_1(0)} u(x_0 + sz)s^{n-1}\,\mathrm{d}\sigma_z = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} u(x_0 + sz)\,\mathrm{d}\sigma_z.$$

Considere agora, para $s \in (0, r)$ fixo,

$$\psi(h) := \frac{\varphi(s+h) - \varphi(s)}{h} - \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x_0 + sz) \cdot z\,\mathrm{d}\sigma_z$$

e note que, pelo Teorema do Valor Médio,

$$\begin{aligned}
\psi(h) &= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \left(\frac{u(x_0 + sz + hz) - u(x_0 + sz)}{h} - \nabla u(x_0 + sz) \cdot z\right)\mathrm{d}\sigma_z \\
&= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \Big([\nabla u(x_0 + sz + \theta hz) - \nabla u(x_0 + sz)] \cdot z\Big)\mathrm{d}\sigma_z
\end{aligned}$$

com $\theta(z) \in [0, 1]$. Logo,

$$|\psi(h)| \leq \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \Big|\nabla u(x_0 + sz + \theta hz) - \nabla u(x_0 + sz)\Big|\mathrm{d}\sigma_z.$$

O integrando acima é contínuo e $\partial B_1(0)$ é compacto, e portanto esse mesmo integrando é uniformemente contínuo. Assim, dado $\varepsilon > 0$, podemos obter $\delta > 0$ tal que

$$\Big|\nabla u(x_0 + sz + \theta hz) - \nabla u(x_0 + sz)\Big| < \varepsilon, \quad \text{se } |h| < \delta,$$

de onde se concluir que $|\psi(h)| < \varepsilon$, sempre que $|h| < \delta$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que

$$\varphi'(s) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x_0 + sz) \cdot z \, \mathrm{d}\sigma_z, \quad s \in (0, r). \tag{1.3}$$

Aplicando novamente uma mudança de variáveis, obtemos

$$\begin{aligned} \varphi'(s) &= \frac{1}{n\omega_n s^{n-1}} \int_{\partial B_s(x_0)} \nabla u(x) \cdot \left(\frac{x - x_0}{s} \right) \mathrm{d}\sigma_x \\ &= \frac{1}{n\omega_n s^{n-1}} \int_{\partial B_s(x_0)} \nabla u(x) \cdot \eta(x) \, \mathrm{d}\sigma_x, \end{aligned}$$

em que usamos também o fato de que o vetor normal exterior no ponto $x \in \partial B_s(x_0)$ é exatamente $(x - x_0)/s$. A expressão acima e o Teorema da Divergência aplicado ao campo $F = \nabla u$ implicam que

$$\varphi'(s) = \frac{1}{n\omega_n s^{n-1}} \int_{B_s(x_0)} \operatorname{div}(\nabla u(x)) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n\omega_n s^{n-1}} \int_{B_s(x_0)} \Delta u(x) \, \mathrm{d}x. \tag{1.4}$$

Supondo agora que u é harmônica, a igualdade acima implica que $\varphi'(s) = 0$ para todo $s \in (0, r)$, isto é, φ é constante em $(0, r)$. Uma vez que φ é contínua em $(0, r]$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) \, \mathrm{d}\sigma_x &= \varphi(r) \\ &= \lim_{s \to 0^+} \varphi(s) \\ &= \lim_{s \to 0^+} \frac{1}{n\omega_n s^{n-1}} \int_{\partial B_s(x_0)} u(x) \, \mathrm{d}\sigma_x \\ &= u(x_0), \end{aligned}$$

em que usamos na última igualdade o fato da função u ser contínua no ponto x_0 (cf. Exercício 1.3). Isso prova a veracidade de (1.1) e, equivalentemente, de (1.2).

A recíproca pode ser provada da seguinte maneira. Suponha, por contradição, que u satisfaz a Propriedade da Média mas não é harmônica. Então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\Delta u(x_0) \neq 0$, digamos $\Delta u(x_0) > 0$. Como $u \in C^2(\Omega)$, o laplaciano de u é uma função contínua. Logo, existe $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset\subset \Omega$ e $\Delta u > 0$ em $B_r(x_0)$. Como a equação (1.1) se verifica, temos que φ é constante em $(0, r)$. Por outro lado, usando a expressão (1.4), concluímos que

$$0 = \varphi'(s) = \frac{1}{n\omega_n s^{n-1}} \int_{B_s(x_0)} \Delta u(x) \, \mathrm{d}x > 0,$$

o que é absurdo. □

Nas próximas seções, discutimos algumas consequências importantes do Teorema 1.2. Conforme será notado, a demonstração de muitas dessas consequências utiliza somente as equações (1.1) e (1.2), sendo portanto válidas não só para funções harmônicas mas também para qualquer função contínua que satisfaça a Propriedade da Média.

1.2 Regularidade

A primeira propriedade interessante que veremos está relacionada com a regularidade das funções harmônicas. Lembremos que, por definição, as funções harmônicas que tratamos aqui tem pelo menos todas as derivadas de ordem 2 contínuas. Contudo, vale o seguinte resultado de regulariade.

Teorema 1.4. *Se $u \in C(\Omega)$ satisfaz a Propriedade da Média, então $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Na demonstração do resultado acima, vamos usar as funções regularizantes ou *mollifiers*. A fim de introduzir esse importante conceito, lembremos inicialmente que o suporte de uma função contínua $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é definido por

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

Considere agora uma função $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\int_{\mathbb{R}} \eta(t)dt = 1$ e cujo suporte esteja contido no intervalo $(-1, 1)$. Uma escolha possível para essa função é

$$\eta(t) := \begin{cases} c \cdot \exp\left(\dfrac{1}{(2t)^2 - 1}\right), & \text{se } |t| < 1/2, \\ 0, & \text{se } |t| \geq 1/2, \end{cases}$$

com $c := \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(1/((2t)^2 - 1))\, dt\right)^{-1}$.

Dado $\varepsilon > 0$, definimos

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Usando as propriedades η mostra-se facilmente que:

(i) $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x) \mathrm{d}x = 1$;

(iii) $\operatorname{supp} \eta_\varepsilon \subset B_\varepsilon(0)$.

Suponha agora que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é contínua, considere $\varepsilon > 0$ e defina

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Denote por $f^\varepsilon := (\eta_\varepsilon * f)$ a convolução de η_ε com f, isto é, a função $f^\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ definida por

$$f^\varepsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \Omega_\varepsilon.$$

Observe que, pela definição de Ω_ε, se $x \in \Omega_\varepsilon$ e $y \in B_\varepsilon(x)$, então $x-y \in \Omega$, de modo que as duas integrais acima fazem sentido. Além disso, usando uma mudanças de variáveis concluímos que f^ε também pode ser escrita como

$$f^\varepsilon(x) = \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \Omega_\varepsilon.$$

Fixado $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, seja $e_i = (0,\ldots,1,\ldots,0)$, com o 1 estando na i-ésima entrada, e considere $h \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno de modo que $x + he_i \in \Omega_\varepsilon$. Nestas condições, temos que

$$\frac{f^\varepsilon(x+he_i) - f^\varepsilon(x)}{h} = \int_{\widetilde{\Omega}} \left(\frac{\eta_\varepsilon(x+he_i-y) - \eta_\varepsilon(x-y)}{h} \right) f(y)\,\mathrm{d}y,$$

em que $\widetilde{\Omega}$ é um conjunto compacto totalmente contido em Ω. Usando agora a regularidade de η_ε, a compacidade de $\tilde{\Omega}$ e o mesmo argumento da prova de (1.3), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i}(x) &= \lim_{h\to 0} \int_{\widetilde{\Omega}} \left(\frac{\eta_\varepsilon(x+he_i-y) - \eta_\varepsilon(x-y)}{h} \right) f(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\widetilde{\Omega}} \lim_{h\to 0} \left(\frac{\eta_\varepsilon(x+he_i-y) - \eta_\varepsilon(x-y)}{h} \right) f(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\widetilde{\Omega}} \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i} * f \right)(x).
\end{aligned}$$

Um processo simples de indução mostra então que, se f é contínua e α é um multi-índice qualquer, vale

$$D^\alpha f^\varepsilon = f * D^\alpha \eta_\varepsilon.$$

Em particular, $f^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Essa conclusão justifica o nome de núcleo regularizante para a função η_ε.

Feitas essas considerações podemos apresentar a prova do nosso resultado de regularidade.

Demonstração do Teorema 1.4. Seja $u \in C(\Omega)$ satisfazendo a Propriedade da Média e considere, para $\varepsilon > 0$ pequeno,

$$u^\varepsilon(x) := (\eta_\varepsilon * u)(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y) u(y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in \Omega_\varepsilon.$$

Vamos mostrar que $u_{|\Omega_\varepsilon} \equiv u^\varepsilon$ e portanto, das considerações acima, segue que $u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Feito isso, basta agora notar que, qualquer que seja $x \in \Omega$, devemos ter $x \in \Omega_\varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Seja então $x \in \Omega_\varepsilon$ fixado e observe que, usando a definição de η_ε e (1.1), obtemos

$$\begin{aligned}
u^\varepsilon(x) &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B_\varepsilon(x)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B_r(x)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y)\,dS_y\right)\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\left(\int_{\partial B_r(x)} u(y)\,dS_y\right)\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\left(u(x) n\omega_n r^{n-1}\right)\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
u^\varepsilon(x) &= \frac{u(x)}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\left(\int_{\partial B_r(x)} 1\,dS_y\right)\mathrm{d}r \\
&= u(x)\int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B_r(x)} \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) dS_y\right)\mathrm{d}r \\
&= u(x)\int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B_r(x)} \eta_\varepsilon(x-y)dS_y\right)\mathrm{d}r \\
&= u(x)\int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Fazendo agora a mudança de variáveis $x - y \mapsto z$ e usando as propriedades (ii) e (iii) da função regularizante, obtemos

$$u^\varepsilon(x) = u(x)\int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(z)\,\mathrm{d}z = u(x),$$

o que conclui a demonstração. □

Observação 1.5. *O teorema acima se aplica, em particular, para funções harmônicas. Contudo, quando a função u é harmônica, vale um resultado mais forte do que o do teorema acima. Pode-se provar que uma função $u \in C^2(\Omega)$ harmônica é de fato analítica em Ω (cf. Exercício 1.7).*

1.3 O Princípio do Máximo

Suponha que $u : (a,b) \to \mathbb{R}$ é harmônica, de modo que

$$u(t) = c_1 + c_2 t,$$

para constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Como o gráfico de u é um segmento de reta vemos que, qualquer que sejam os valores das constantes, o máximo (mínimo) de u é sempre assumido na fronteira de $[a, b]$, que é exatamente o conjunto $\{a, b\}$. Além disso se o máximo (mínimo) de u for assumido em algum ponto interior $x_0 \in (a, b)$, então necessariamente $c_2 = 0$ e portanto u é constante em $[a, b]$.

O resultado a seguir mostra que a propriedade acima permanece válida em dimensões maiores.

Teorema 1.6. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é limitado e $u \in C(\overline{\Omega})$ satisfaz a Propriedade da Média. Então*

(i) $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$;

(ii) *se Ω é conexo e existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, então u é constante em Ω.*

Demonstração. Vamos provar primeiro o item (ii). Seja então $x_0 \in \Omega$ tal que $M := \max_{\overline{\Omega}} u = u(x_0)$, e considere o conjunto

$$\Omega_M := \{x \in \Omega : u(x) = M\}.$$

Como $x_0 \in \Omega_M$, este conjunto é não vazio. Além disso, a continuidade de u garante que $\Omega_M = u^{-1}(\{M\})$ é fechado em Ω. Vamos mostrar que Ω_M é aberto em Ω. Feito isso, segue da conexidade de Ω que $\Omega_M = \Omega$ e portanto u é constante em Ω.

Seja $y \in \Omega_M$ um ponto qualquer e $r > 0$ tal que $B_r(y) \subset\subset \Omega$. Então

$$\frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(y)} M \, \mathrm{d}x = M = u(y) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(y)} u(x) \, \mathrm{d}x,$$

donde se conclui que

$$\int_{B_r(y)} (M - u(x)) \, \mathrm{d}x = 0.$$

Como o integrando acima é não negativo e contínuo devemos ter $u \equiv M$ em $B_r(y)$ e portanto $B_r(y) \subset \Omega_M$. Logo Ω_M é aberto em Ω e o item (ii) está provado. O item (i) é uma consequência simples de (ii) e sua prova ficará a cargo do leitor (cf. Exercício 1.9). $\square$

Observação 1.7. *O teorema acima continua válido se substituirmos o máximo pelo mínimo da função u. Outro fato importante é que a conclusão do item (ii) pode ser falsa se Ω não for conexo (cf. Exercício 1.9).*

Uma aplicação interessante do Teorema 1.6 está relacionada com a unicidade de solução do problema de Poisson

$$\begin{cases} \Delta u &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= g \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Suponha que Ω é limitado e que u_1 e u_2 são duas soluções do problema acima. Então a função $v := u_1 - u_2$ é tal que

$$\begin{cases} \Delta v &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ v &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo item (i) do teorema acima temos que $v \leq 0$ em Ω. Por outro lado, aplicando o mesmo raciocínio para a função $-v$ concluímos que $v \geq 0$ em Ω. Logo v se anula em todo o conjunto Ω, isto é, as funções u_1 e u_2 coincidem em Ω. Logo, vale o seguinte resultado.

Teorema 1.8. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é limitado, então o problema*

$$\begin{cases} \Delta u &= f \quad \textit{em } \Omega, \\ u &= g \quad \textit{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

possui no máximo uma solução em $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

É importante salientar que a conclusão do teorema acima pode ser falsa se Ω não for limitado. De fato, basta considerar $\Omega = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ e observar que, nesse caso, o problema

$$\Delta u = 0 \ \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \ \text{ em } \partial\Omega$$

admite, além da solução trivial $u \equiv 0$, a função $u(x_1, \ldots, x_n) = x_n$ como solução.

1.4 Exercícios

Atenção: Nos exercícios abaixo, a menos que se diga o contrário, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado com fronteira suave.

1.1. Mostre que a função $\Gamma : \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dada por

$$\Gamma(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln |x|, & \text{se } n = 2, \\ \dfrac{1}{n(2-n)\omega_n} |x|^{2-n}, & \text{se } n \geq 3, \end{cases}$$

é harmônica e fica ilimitada quando $|x| \to 0$.

1.2. Complete a demonstração do Teorema 1.3.

1.3. Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in \Omega$, então

$$u(x_0) = \lim_{s \to 0^+} \frac{1}{n\omega_n s^{n-1}} \int_{\partial B_s(x_0)} u(x) \, \mathrm{d}\sigma_x.$$

Sugestão: Note que $u(x_0) = [n\omega_n s^{n-1}]^{-1} \int_{\partial B_s(x_0)} u(x_0) \mathrm{d}\sigma_x$.

1.4. Modifique a prova do Teorema 1.2 para mostrar que

$$u(0) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(0)} g(x)\,\mathrm{d}\sigma_x + \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_{B_r(0)} \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}} \right) f(x)\,\mathrm{d}x,$$

sempre que $n \geq 3$ e $u \in C^2(B_r(0)) \cap C(\overline{B_r(0)})$ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{em } B_r(0), \\ \quad u &= g \quad \text{em } \partial B_r(0). \end{cases}$$

1.5. Se $u \in C^2(\Omega)$ é harmônica então, para todo $x_0 \in \Omega$ e $i \in \{1, \ldots, \}$, temos que

$$|u_{x_i}(x_0)| \leq \frac{n}{d_{x_0}} \max_{x \in \partial B_{d_{x_0}}(x_0)} |u(x)|,$$

onde $d_{x_0} = \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$.

1.6. (Teorema de Liouville) Se u é harmônica e limitada inferiormente (ou superiormente) em $\mathbb{R}^n$, então u é constante.
Sugestão: Use o exercício anterior.

1.7. Se u é harmônica em Ω, então u é analítica em Ω.
Sugestão: cf. [5, Teorema 2.2.10].

1.8. (Desigualdade de Harnack) Se u é harmônica e não-negativa, e $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ é conexo, então existe uma constante $C = C(\Omega, \Omega_0) > 0$ tal que

$$\max_{\overline{\Omega_0}} u \leq C \inf_{\overline{\Omega_0}} u.$$

Sugestão: cf. [5, Teorema 2.2.11].

1.9. Mostre que, no enunciado do Teorema 1.6, a afirmação (ii) implica em (i). Em seguida, dê um exemplo mostrando que a conexidade em (ii) é essencial.

1.10. Mostre que $u \in C(\Omega)$ é harmônica se, e somente se,

$$\int_\Omega u \Delta\phi \,\mathrm{d}x = 0, \quad \forall\, \phi \in C_0^2(\Omega).$$

Sugestão: cf. [8, Teorema 1.16].

1.11. Dizemos que uma função $u \in C^2(\Omega)$ é subharmônica se

$$-\Delta u \leq 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Prove que se u é subharmônica então, para todo bola $B_r(x) \subset\subset \Omega$, vale

$$u(x) \leq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u(y)\,\mathrm{d}y.$$

Conclua que, se Ω é limitado, então $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.

1.12. Sejam u, v funções harmônicas e subharmônicas em Ω, respectivamente. Se $u \equiv v$ em $\partial\Omega$, então $v \leq u$ em Ω.

1.13. Dizemos que uma função $u \in C^2(\Omega)$ é superharmônica se

$$-\Delta u \geq 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Enuncie e prove resultados análogos aos dos dois exercícios acima para funções superharmônicas.

1.14. Se $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ é convexa e $u \in C^2(\Omega)$ é harmônica, então a função v definida por $v(x) = \phi(u(x))$ é subharmônica.

1.15. Se u é harmônica então a função v definida por $v(x) = |\nabla u(x)|^2$ é subharmônica.

1.16. Sejam $B := B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C(\overline{B})$, $g : \partial B \to \mathbb{R}$ contínua,

$$F := \max_{x \in \overline{B}} |f(x)| \quad \text{e} \quad \Phi := \max_{x \in \partial B} |g(x)|.$$

Supondo que $u \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$ é tal que $\Delta u \equiv f$ em B, $u \equiv g$ em ∂B, resolva os itens abaixo.

(a) Defina $w^{\pm} : \overline{B} \to \mathbb{R}$ por

$$w^{\pm}(x) := \frac{F}{2n}|x|^2 \pm u(x)$$

e verifique que $\Delta w^{\pm} \geq 0$ em B.

(b) Verifique que, se $x \in \partial B$, então $w^{\pm}(x) \leq \dfrac{F}{2n} + \Phi$.

(c) Conclua que existe $C > 0$, independente de u, tal que

$$\max_{x \in \overline{B}} |u(x)| \leq C \left(\max_{x \in \overline{B}} |f(x)| + \max_{x \in \partial B} |g(x)| \right).$$

1.17. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é conexo e u satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $g : \partial\Omega \to [0, \infty)$ é tal que $g(x_0) > 0$ para algum $x_0 \in \partial\Omega$, então $u(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$.

Capítulo 2

O problema de Poisson

O objetivo deste capítulo é estudar a existência de solução para o problema de Poisson

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P}$$

As hipóteses sobre Ω, f e g serão colocadas no decorrer da discussão. A ideia básica e estudar separadamente os problemas

$$\Delta u = f \ \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \ \text{ em } \partial\Omega, \tag{2.1}$$

e

$$\Delta u = 0 \ \text{ em } \Omega, \quad u = g \ \text{ em } \partial\Omega, \tag{2.2}$$

e observar que, se u_1 é solução de (2.1) e u_2 é solução de (2.2), então a função $u := u_1 + u_2$ é uma solução do problema (P).

Na próxima seção, vamos nos concentrar na solução de um caso particular do segundo problema acima.

2.1 A solução fundamental e o Potencial Newtoniano

Vamos no que segue considerar o seguinte problema

$$\Delta u = 0 \ \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Observe que, se $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ satisfaz a equação acima e $A = A_{n\times n}$ é uma matriz ortogonal, então a função $v(x) := u(Ax)$ também satisfaz a equação (cf. Exercício 2.1). Por conta disso, vamos tentar simplificar o problema procurando uma solução radial da equação, isto é, uma solução que é constante ao longo de esferas centrada na origem.

Supondo então que u é uma solução radial, vamos denotar por $v : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ a função que satisfaz

$$v(r) = u(x), \quad r = |x|.$$

Como a função v só depende da variável radial r, podemos reescrever a equação de Laplace em coordenadas radias, obtendo assim um equação diferencial ordinária. A fim de obter essa EDO note que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, podemos usar a regra da cadeia para obter

$$u_{x_i} = v'(r) r_{x_i}, \qquad u_{x_i x_i} = v''(r) r_{x_i}^2 + v'(r) r_{x_i x_i}.$$

Agora $r = |x| = (|x|^2)^{1/2}$, e portanto

$$r_{x_i} = \frac{1}{2}\left(|x|^2\right)^{-1/2} 2x_i = \frac{x_i}{|x|} = \frac{x_i}{r}.$$

Logo

$$r_{x_i x_i} = \left(\frac{x_i}{r}\right)_{x_i} = \frac{1}{r} + x_i(-1)r^{-2} r_{x_i} = \frac{1}{r} - \frac{x_i}{r^2}\frac{x_i}{r} = \frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \Delta u &= \sum_{i}^{n} u_{x_i x_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(v''(r) r_{x_i}^2 + v'(r) r_{x_i x_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + \sum_{i=1}^{n} v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right), \end{aligned}$$

ou ainda

$$\Delta u = v''(r) + v'(r)\left(\frac{n}{r} - \frac{1}{r}\right).$$

Logo a equação $-\Delta u = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é equivalente a

$$v''(r) + v'(r)\left(\frac{n-1}{r}\right) = 0, \quad r > 0.$$

Supondo $v'(r) \neq 0$, podemos reescrever a equação acima na forma

$$(\ln v'(r))' = \frac{v''(r)}{v'(r)} = \frac{1-n}{r}$$

e integrar para obter

$$\ln v'(r) = (1-n)\ln r + c_1 = \ln r^{1-n} + c_1,$$

ou ainda

$$v'(r) = c_2 r^{1-n},$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ são constantes. Integrando novamente obtemos

$$v(r) = \begin{cases} c_3 \ln r + c_4, & \text{se } n = 2, \\ c_3 r^{2-n} + c_4, & \text{se } n \geq 3, \end{cases}$$

para constantes $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

Vamos agora definir a solução fundamental do Laplaciano por

$$\Gamma(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln |x|, & \text{se } n = 2, \\ \dfrac{1}{n(2-n)\omega_n} |x|^{2-n}, & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Embora essa função fique ilimitada Conforme vimos no Exercício 1.1, a função Γ é harmônica e fica ilimitada quando $x \to 0$. Porém, ela é localmente integrável. De fato, para ver isso basta mostrar que a integral em bolas é finita. Considerando primeiro o caso 2-dimensional temos que,

$$\int_{B_\varepsilon(0)} \Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B_r(0)} \ln |x| \,\mathrm{d}\sigma_x \right) dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^\varepsilon \ln r \cdot 2\pi r \,\mathrm{d}r,$$

para qualquer $\varepsilon > 0$. Assim, e portanto

$$\int_{B_\varepsilon(0)} \Gamma(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\varepsilon^2}{4} \left(1 - 2\ln \varepsilon\right), \quad \text{se } n = 2. \tag{2.3}$$

No caso de dimensões maiores, podemos proceder como acima para obter

$$\int_{B_\varepsilon(0)} \Gamma(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\varepsilon^2}{2(n-2)}, \quad \text{se } n \geq 3. \tag{2.4}$$

É interessante ainda notar que, se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é continua, um cálculo direto mostra que a função $x \mapsto \Gamma(x-y)f(y)$ é harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$. Da mesma forma, se $\{y^1, \ldots, y^k\} \subset \mathbb{R}^n$ é uma família finita de pontos, então a função $x \mapsto \sum_{i=1}^k \Gamma(x-y^i) f(y^i)$ é harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus \{y^1, \ldots, y^k\}$. Suponha que f é tal que podemos fazer a soma acima sobre todos os pontos de $\mathbb{R}^n$, isto é, a função $\omega_f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\omega_f(x) := (\Gamma * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y,$$

está bem definida. Se fosse possível derivar sob o sinal da integral teríamos

$$\Delta\omega_f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x \Gamma(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Contudo, uma conta simples mostra que $D^2\Gamma(x)$ se comporta como $|x|^{-n}$ perto da origem. Como essa última função não é localmente integrável, não há como justificar a passagem da derivada para dentro da integral. De fato, a igualdade acima não é correta, conforme podemos ver pelo próximo resultado:

Lema 2.1. *Suponha que $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ tem suporte compacto. Então o Potencial Newtoniano gerado por f*

$$\omega_f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y$$

está bem definido, $\omega_f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e $\Delta\omega_f = f$.

Demonstração. Observe que $\omega_f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y$ e portanto, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixado, temos que

$$\frac{\omega_f(x+he_i) - \omega_f(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h} \right) \Gamma(y)\,\mathrm{d}y.$$

O termo entre parêntesis acima converge para para $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)$, quando $h \to 0$. Além disso, usando a desigualdade do Valor Médio concluímos que ele é limitado no suporte (compacto) de f. Uma vez que Γ é localmente integrável, podemos passar a igualdade acima ao limite e usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para concluir que

$$\frac{\partial \omega_f}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)\Gamma(y)\,\mathrm{d}y = \left(\Gamma * \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(x).$$

De maneira completamente análoga, mostra-se que

$$D^\alpha \omega_f = (\Gamma * D^\alpha f),$$

sem preque α é um multi-índice qualquer de ordem menor ou igual a 2. A expressão acima nos permite concluir que $\omega_f \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

Para calcular $\Delta\omega_f(x)$ vamos tomar $0 < \varepsilon < 1$ e usar a igualdade acima para escrever

$$\Delta\omega_f(x) = A_\varepsilon + C_\varepsilon \tag{2.5}$$

com

$$A_\varepsilon := \int_{B_\varepsilon(0)} \Gamma(y)\Delta f(x-y)\,\mathrm{d}y, \qquad C_\varepsilon := \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Gamma(y)\Delta f(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Como Δf é limitado, podemos usar (2.3) e (2.4) para estimar

$$|A_\varepsilon| \le \|\Delta f\|_\infty \int_{B_\varepsilon(0)} |\Gamma(y)|\,\mathrm{d}y = \|\Delta f\|_\infty \times \begin{cases} \dfrac{\varepsilon^2(1-2\ln\varepsilon)}{4}, & \text{se } n=2, \\ \dfrac{\varepsilon^2}{2(n-2)}, & \text{se } n \ge 3. \end{cases}$$

Usando a regra de L'Hopital, concluímos que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} A_\varepsilon = 0$.

Para estimar o termo C_ε, vamos inicialmente usar o Teorema 1.3(d) para obter

$$C_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon(0)} \Gamma(y)\Delta f(x-y)\,\mathrm{d}y = D_\varepsilon + E_\varepsilon$$

com

$$D_\varepsilon := \int_{\partial(\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon(0))} \Gamma(y)\frac{\partial f}{\partial\eta}(x-y)\,\mathrm{d}\sigma_y, \qquad E_\varepsilon := -\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon(0)} \nabla\Gamma(y)\cdot\nabla f(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Para estimar a primeira quantidade podemos usar (2.3) e (2.4) e proceder como antes, obtendo assim

$$|D_\varepsilon| \le \|\nabla f\|_\infty \int_{\partial(\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon(0))} |\Gamma(y)|\,\mathrm{d}\sigma_y = \|\nabla f\|_\infty \times \begin{cases} (-\varepsilon\ln\varepsilon), & \text{se } n=2, \\ \dfrac{\varepsilon}{(n-2)}, & \text{se } n\ge 3. \end{cases} \tag{2.6}$$

Isto mostra que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} D_\varepsilon = 0$. Com relação ao termo E_ε, usando uma vez mais o Teorema 1.3(d), obtemos

$$E_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon(0)} f(x-y)\Delta\Gamma(y)\,\mathrm{d}y - \int_{\partial(\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon(0))} f(x-y)\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}(y)\,\mathrm{d}\sigma_y.$$

Como a função Γ é harmônica em $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ a primeira integral do lado esquerdo acima é nula. Com relação à segunda notemos que, como a integral é tomada na fronteira do exterior da bola, o vetor normal exterior é $-y/|y|$. Ademais, usando a definição de Γ, verifica-se facilmente que

$$\nabla\Gamma(y) = \frac{y}{n\omega_n|y|^n}. \tag{2.7}$$

Logo,

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}(y) = \nabla\Gamma(y)\cdot\eta(y) = \frac{y}{n\omega_n|y|^n}\cdot\left(-\frac{y}{|y|}\right) = \frac{-1}{n\omega_n|y|^{n-1}},$$

e portanto

$$E_\varepsilon = \int_{\partial(\mathbb{R}^n\setminus B_\varepsilon(0))} f(x-y)\frac{1}{n\omega_n|y|^{n-1}}\,\mathrm{d}\sigma_y = \frac{1}{n\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} f(x-y)\,\mathrm{d}\sigma_y.$$

Segue então da mudança de variáveis $z = x - y$ e da continuidade de f em x que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} E_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{n\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} f(z)\, \mathrm{d}\sigma_z = f(x). \tag{2.8}$$

Lembrando que $C_\varepsilon = D_\varepsilon + E_\varepsilon$ e que $D_\varepsilon \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$, concluímos que $C_\varepsilon \to f(x)$. Como já havíamos provado que $A_\varepsilon \to 0$, podemos passar a equação (2.5) ao limite para concluir que $\Delta\omega_f(x) = f(x)$, o que finaliza a prova do lema. □

O resultado acima pode ser provado com uma exigência muito menor de regularidade para a função f. Para formular precisamente esse novo resultado, precisamos introduzir um novo espaço de funções para tratar o problema.

Lembremos que um espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|_E)$ é um espaço de Banach quando ele é completo com relação à topologia induzida pela norma. Isso significa dizer que todas sequência $(u_m) \subset E$ de Cauchy converge para algum elemento de E.

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado, pode-se facilmente mostrar que $C(\overline{\Omega})$, munido com a norma

$$\|u\|_0 := \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|, \quad \forall\, u \in C(\overline{\Omega}),$$

é um espaço de Banach. De uma maneira mais geral, para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, o conjunto $C^k(\overline{\Omega})$ munido da norma

$$\|u\|_k := \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_0, \quad \forall\, u \in C^k(\overline{\Omega})$$

é também um espaço de Banach.

No que segue vamos introduzir um novo espaço que é, em um certo sentido, o espaço correto para trabalhar com o problema de Poisson.

Definição 2.2. *Dado $0 < \gamma \le 1$ e uma função $u \in C(\overline{\Omega})$, dizemos que u é Hölder contínua com expoente γ se existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$|u(x) - u(y)| \le c|x - y|^\gamma, \quad \forall\, x, y \in \Omega.$$

Para uma tal função definimos o quociente de Hölder por

$$H_\gamma[u] := \sup_{x,y \in \Omega,\, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} < \infty.$$

O fato importante é que, se denotarmos

$$C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}) := \{u \in C(\overline{\Omega}) : H_\gamma[u] < \infty\},$$

então esse conjunto é um espaço de Banach com a seguinte norma

$$\|u\|_{0,\gamma} := \|u\|_0 + H_\gamma[u], \quad \forall\, u \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}).$$

De uma maneira mais geral, temos a seguinte definição.

Definição 2.3. *Seja $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $0 < \gamma \leq 1$. O espaço de Hölder $C^{k,\gamma}(\Omega)$ é definido por*

$$C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) := \{u \in C^k(\overline{\Omega}) : H_\gamma[D^\alpha u] < \infty \text{ para todo multi-índice } |\alpha| \leq k\}.$$

Definimos ainda

$$C^{k,\gamma}(\Omega) := \{u \in C^k(\Omega) : u \in C^{k,\gamma}(\overline{\Omega_0}) \text{ para todo aberto } \Omega_0 \subset\subset \Omega\}.$$

Pode-se mostrar que $C^{k,\gamma}(\Omega)$ é um espaço de Banach quando munido da norma (cf. Exercício 2.3)

$$\|u\|_{k,\gamma} := \|u\|_k + \sum_{|\alpha| \leq k} H_\gamma[D^\alpha u], \quad \forall\, u \in C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}).$$

Voltando ao Potencial Newtoniano ω_f, lembremos que o resultado do Lema 2.1 foi provado para funções $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ com suporte compacto. Uma adaptação (simples) daquela prova nos permite concluir que se $f \in C(\overline{\Omega})$ para algum domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então $\omega_f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Se exigirmos um pouco mais de regularidade para f temos o seguinte resultado.

Proposição 2.4. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado e $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ para algum $0 < \gamma \leq 1$, então o Potencial Newtoniano ω_f está bem definido e satisfaz*

(i) $\omega_f \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap C^{2,\gamma}(\Omega)$;

(ii) $\Delta\omega_f(x) = f(x)$ *para todo* $x \in \Omega$.

A demonstração da proposição acima segue as mesmas linhas daquela feita para o Lema 2.1. Contudo, são necessárias algumas adaptações para contornar o fato de não existirem as derivadas da função f. O leitor interessado pode encontrar essa prova em [6, Corolário 1.2 da Seção 1.3] (veja também [7, Lemma 4.2] ou [15, Teorema 1.1]).

Vale observar que, se f for somente contínua, então ω_f pode não ser de classe C^2 em Ω. Um exemplo é apresentado no Exercício 2.4.

2.2 A solução do problema de Perron

Começamos essa seção observando que a Proposição 2.4 reduz o estudo do problema de Poisson (P) ao problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{D}$$

De fato, se $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ e $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é tal que

$$\Delta v = 0 \text{ em } \Omega, \quad v = g - \omega_f \text{ em } \partial\Omega,$$

onde ω_f é o Potencial Newtoniano gerado por f, então a função $u := v + \omega_f$ satisfaz

$$\Delta u = \Delta v + \Delta\omega_f = f \text{ em } \Omega, \quad u = g - \omega_f + \omega_f = g \text{ em } \partial\Omega,$$

sendo portanto solução de (P).

Observação 2.5. *Antes de tratar da questão de existência de solução para o problema (D) é importante discutirmos o seguinte exemplo, conhecido como exemplo de Zaremba . Suponha que $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ e defina $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ por*

$$g(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \partial B_1(0), \\ 1, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Pode-se mostrar que, apesar de g ser uma função regular, o problema de Dirichlet não possui solução clássica para essa escolha de Ω e g (cf. Exercício 2.5).

O exemplo acima mostra que a solubilidade do problema (D) não depende somente da regularidade do dado de fronteira g. Como veremos adiante, ela depende também da geometria do domínio Ω. A fim de entender melhor essa última frase, vamos introduzir alguns conceitos sobre regularidade de conjuntos do espaço euclidiano.

Definição 2.6. *Dados $k \in \mathbb{N}$ e um aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que Ω é de classe C^k se, para cada $x_0 \in \partial\Omega$, existe uma bola $B = B_r(x_0)$ e uma bijeção ψ de B em $A \subset \mathbb{R}^n$ tais que:*

(i) $\psi(B \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^n_+$;

(ii) $\psi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$;

(iii) $\psi \in C^k(B)$, $\psi^{-1} \in C^k(A)$,

em que $\mathbb{R}^n_+ := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$.

Podemos inferir da definição que o aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é de classe C^k se, e somente se, cada ponto da sua fronteira possui uma vizinhança cuja intersecção com $\partial\Omega$ é o gráfico de uma função de $n-1$ das coordenadas $x_1, \ldots, x_n$, com essa função sendo de classe C^k .

O problema de Dirichlet pode ser resolvido por vários métodos, cada qual com uma hipótese de regularidade sobre g e Ω. Entre todos os métodos, o que parece fornecer solução clássica com hipóteses mais fracas é o método das funções subharmônicas, ou Método de Perron. Ele fornece solução $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ para funções g contínuas e domínios Ω de classe C^2 (cf. [7, Teorema 2.14]). Na verdade basta que Ω satisfaça a condição da esfera exterior , isto é, que para cada $x_0 \in \partial\Omega$ exista uma bola $B_r(y) \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\overline{\Omega} \cap \overline{B_r(y)} = \{x_0\}$. Enunciamos abaixo uma versão desse resultado supondo que o conjunto Ω é de classe C^2. A demonstração de uma versão mais geral pode ser encontrada em [7, Teorema 2.14].

Teorema 2.7. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado de classe C^2 e $g \in C(\partial\Omega)$, então o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui exatamente uma solução em $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Com o auxílio do teorema acima, podemos enunciar e provar o seguinte resultado de existência de solução para o problema de Poisson.

Teorema 2.8. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de classe C^2, $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e $g \in C(\partial\Omega)$, então o problema*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

possui exatamente uma solução em $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Para a existência, é suficiente encontrarmos $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfazendo os problemas

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 & \text{em } \Omega, \\ u_1 = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \Delta u_2 = f & \text{em } \Omega, \\ u_2 = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.9}$$

pois, nesse caso, a função $u := u_1 + u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é solução de (P).

A existência de u_1 como acima é consequência imediata do Teorema 2.7. Para obter u_2 consideramos $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta v = 0$ em Ω, e $v = \omega_f$ em $\partial\Omega$. Como $\omega_f \in C(\partial\Omega)$, a existência de uma tal função é novamente garantida pelo Teorema 2.7. Considere agora $u_2 := \omega_f - v$ e observe que

$$\Delta u_2 = \Delta\omega_f - \Delta v = f \ \text{ em } \Omega, \qquad u_2 = \omega_f - \omega_f = 0 \ \text{ em } \partial\Omega,$$

e portanto o problema possui pelo menos uma solução em $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. A unicidade segue facilmente do Princípio do Máximo (cf. Teorema 1.8). $\square$

Como era de se esperar, exigindo mais regularidade em g e Ω, obtemos soluções mais regulares. A fim de exemplificar essa observação note que, se $k \in \mathbb{N}$ e $0 < \gamma \leq 1$, podemos definir o conceito de abertos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de classe $C^{k,\gamma}$ do mesmo modo que fizemos para C^k, considerando agora a regularidade das aplicações ψ e ψ^{-1} como sendo de classe $C^{k,\gamma}$. Dizemos que uma função $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ definida na fronteira de um aberto Ω de classe $C^{k,\gamma}$ pertence à $C^{k,\gamma}(\partial\Omega)$ quando $g \circ \psi^{-1} \in C^{k,\gamma}(A \cap \partial\mathbb{R}^n_+)$.

O resultado abaixo, devido à Kellog [9] , fornece uma versão do Teorema 2.7 para domínios e dados de fronteira mais regulares. Note que a regularidade da solução encontrada é também incrementada quando comparada com aquela dada pelo Teorema 2.7.

Teorema 2.9. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de classe $C^{2,\gamma}$ e $g \in C^{2,\gamma}(\partial\Omega)$, então o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u &= g \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui exatamente uma solução em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Com relação ao resultado acima, é importante ressaltar que a mera continuidade de g não implica na existência de derivadas na fronteira. Por exemplo, a função

$$u(x_1, x_2) = x_2 \ln\left((x_1 - 1)^2 + x_2^2\right) + 2(1 - x_1) \arctan\left(\frac{x_2}{1 - x_1}\right)$$

satisfaz $\Delta u = 0$ em $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$, é contínua até o fecho da bola, mas $|\nabla u(x_1, x_2)|$ se comporta como $|\ln(x_1 - 1)^2 + x_2^2|$ quando $(x_1, x_2) \to (1, 0)$.

Usando o resultado acima e adaptando o argumento usado na prova do Teorema 2.8, obtemos o seguinte.

Corolário 2.10. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado de classe $C^{2,\gamma}$, $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e $g \in C^{2,\gamma}(\partial\Omega)$, então o problema*

$$\begin{cases} \Delta u &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= g \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

possui exatamente uma solução em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Basta argumentar como na prova do Teorema 2.8, usando o Teorema 2.9 no lugar do Teorema 2.7. Contudo uma pequena adaptação se faz necessária. De fato, nas condições enunciadas acima, é imediata a obtenção de u_1 satisfazendo (2.9). A obtenção de u_2 requer algumas palavras adicionais visto que uma aplicação direta da Proposição 2.4 nos garante somente que ω_f pertence a $C^1(\partial\Omega)$, o que não é suficiente usar o Teorema 2.9 e obter

$v \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ satisfazendo $\Delta v = 0$ em Ω, $v = \omega_f$ em $\partial\Omega$. Essa dificuldade pode ser contornada como abaixo.

Seja B uma bola tal que $\overline{\Omega} \subset B$. A regularidade de f e do conjunto Ω nos permite estender f para toda a bola B, de modo que a extensão (que denotaremos ainda por f) está contida em $C^{0,\gamma}(\overline{B})$ (cf. [7, Lemma 6.37]). Pela Proposição 2.4 temos que $\omega_f \in C^{2,\gamma}(B)$. Podemos então aplicar o Teorema 2.9 para obter $v \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta v = 0$ em Ω, e $v = \omega_f$ em $\partial\Omega$. Procedendo como antes podemos mostrar que $u_2 := \omega_f - v \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ é solução do problema. A unicidade segue do Princípio do Máximo. $\square$

2.3 A função de Green

No que segue, vamos supor que o problema de Poisson

$$\begin{cases} \Delta u &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= g \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

possui uma solução $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e usar o Teorema da Divergência de uma maneira apropriada para obter uma expressão explícita para tal solução. Fixado um ponto $x \in \Omega$, considere $\varepsilon > 0$ pequeno e defina

$$\Lambda_\varepsilon := \Omega \setminus B_\varepsilon(x).$$

Usando o Teorema 1.3(e) obtemos

$$\int_{\Lambda_\varepsilon} (u\Delta\Gamma(x-y) - \Gamma(x-y)\Delta u)\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Lambda_\varepsilon} \left(u\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\eta} \right) \mathrm{d}\sigma_y.$$

Como $\Delta\Gamma(x-y) = 0$ para todo $y \neq x$, segue que

$$\begin{aligned} -\int_{\Lambda_\varepsilon} \Gamma(x-y)\Delta u\,\mathrm{d}y &= C_\varepsilon + D_\varepsilon \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\eta} \right) \mathrm{d}\sigma_y \end{aligned} \tag{2.10}$$

em que

$$C_\varepsilon := \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}(x-y)\,\mathrm{d}\sigma_y, \qquad D_\varepsilon := -\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\eta}(y)\,\mathrm{d}\sigma_y.$$

Argumentando como na prova de (2.8) e (2.6), mostra-se que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} C_\varepsilon = -u(x), \qquad \lim_{\varepsilon\to 0^+} D_\varepsilon = 0.$$

Além disso, como o conjunto Λ_ε se aproxima de Ω quando $\varepsilon \to 0^+$, e Γ é localmente integrável, segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\Lambda_\varepsilon} \Gamma(x-y)\Delta u \, \mathrm{d}y = \int_\Omega \Gamma(x-y)\Delta u \, \mathrm{d}y$$

Portanto, fazendo $\varepsilon \to 0^+$ na equação (2.10) obtemos

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)\Delta u \, \mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \mathrm{d}\sigma_y, \tag{2.11}$$

que é conhecida como fórmula de representação de Green.

O problema com a expressão acima é que $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ não é um dado do problema (P). Para contornar essa dificuldade procedemos como segue. Observe inicialmente que, se $h^x \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma função harmônica em Ω, então podemos usar o Teorema da Divergência novamente para obter

$$-\int_\Omega h^x \Delta u \, \mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial h^x}{\partial \eta} - h^x \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \mathrm{d}\sigma_y.$$

Escrevendo $G(x,y) = \Gamma(x-y) + h^x(y)$ e somando a equação acima com (2.11), segue que

$$u(x) = \int_\Omega G \Delta u \, \mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial G}{\partial \eta} - G \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \mathrm{d}\sigma_y.$$

Se, adicionalmente, tivermos $G = 0$ em $\partial\Omega$ então obtemos a seguinte fórmula de representação

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)\Delta u(y) \, \mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial G}{\partial \eta}(x,y) \, \mathrm{d}\sigma_y.$$

Baseados na expressão acima, definimos a função de Green associada ao problema de Dirichlet em Ω como sendo a função

$$G(x,y) := \Gamma(x-y) + h^x(y), \quad x,\, y \in \Omega,\, x \neq y,$$

em que Γ é a solução fundamental do laplaciano e a função $h^x(y)$, chamada parte regular da função de Green, satisfaz

$$\begin{cases} \Delta h^x(y) &=& 0, & y \in \Omega, \\ h^x(y) &=& -\Gamma(x-y), & y \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Observe que, para cada $x \in \Omega$ fixado, a função $y \mapsto \Gamma(x-y)$ é regular em $\partial\Omega$. Desse modo, se Ω é de classe C^2, podemos sempre garantir a existência de h^x, e portanto da função de Green.

As considerações acima provam o seguinte resultado.

Teorema 2.11. *Se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é solução do problema de Poisson*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.12}$$

e existe a função de Green associda ao problema de Dirichlet em Ω, então

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y)\, \mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \eta}(x,y) g(y)\, \mathrm{d}\sigma_y.$$

O teorema acima nos permite resolver o problema (2.12) desde que exista, e saibamos calcular, a função de Green. De fato, nesse caso basta definir u como acima e mostrar que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfaz as equações do problema. A dificuldade em tal procedimento reside no fato de que calcular a função de Green não é, em geral, uma tarefa fácil. Isso pode ser feito quando Ω possui algum tipo de simetria. Um caso particular importante é o da bola, onde vale a fórmula de Poisson, dada pelo seguinte resultado (cf. [7, Teorema 2.6] ou [5, Teorema 15, Seção 2.2]).

Teorema 2.12. *Seja $r > 0$ e $g : B_r(0) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então a função*

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{r^2 - |x|^2}{n\omega_n r} \displaystyle\int_{\partial B_r(0)} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\, \mathrm{d}\sigma_y, & \text{se } x \in B_r(0), \\ g(x), & \text{se } x \in \partial B_r(0), \end{cases}$$

é tal que $u \in C^2(B_r(0)) \cap C(\overline{B_r(0)})$ e

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } B_r(0), \\ u = g & \text{em } \partial B_r(0). \end{cases}$$

O leitor pode encontrar em [5, Seção 2.2.4] propriedades interessantes da função de Green, além da sua fórmula explícita quando $\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$. Citamos ainda [15, Seção 2.2], onde algumas considerações históricas acerca da função de Green são apresentadas, bem como um resultado de existência desta para algumas classes de domínios.

2.4 Exercícios

Atenção: Nos exercícios abaixo, a menos que se diga o contrário, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado com fronteira suave.

2.1. Se $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ é harmônica e $A_{n\times n}$ é uma matriz ortogonal, então $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por $v(x) = u(Ax)$ é também harmônica.

2.2. Complete os detalhes da prova do Lema 2.1, provando as igualdades em (2.6) e (2.7).

2.3. Dado $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $0 < \gamma \leq 1$, verifique que $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$, munido com a norma,

$$\|u\|_{k,\gamma} = \sum_{|\alpha|\leq k} (\|D^\alpha u\|_0 + H_\gamma[D^\alpha u])$$

é um espaço de Banach.

2.4. (cf. [15, Exercício 1.4]) Sejam $\Omega = B_{1/2}(0) \subset \mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \dfrac{(x_1^2 - x_2^2)}{|x|^2} |\ln|x||^{\alpha-2}(\alpha - 1 + 4\ln|x|) & \text{se } 0 < |x| < 1/2, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

onde $0 < \alpha < 1$, $x = (x_1, x_2)$ e ω_f é o potencial Newtoniano gerado por f. Resolva os itens abaixo.

(a) Definindo $v : B_{1/2}(0) \to \mathbb{R}$ por

$$v(x) = \begin{cases} (x_1^2 - x_2^2)|\ln|x||^\alpha & \text{se } 0 < |x| < 1/2, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

verifique que $-\Delta v = f$ em $\Omega \setminus \{0\}$, $v \in C^1(\Omega)$, mas v não é de classe C^2 em Ω.

(b) Verifique que, para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, a igualdade

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, \mathrm{d}x$$

é satisfeita para $u = \omega_f$ e para $u = v$.

(c) Utilize o item acima e o Exercício 1.10 para concluir que $\Delta(\omega_f - v) = 0$ em Ω.

(d) Conclua que o potencial Newtoniano ω_f não é de classe C^2 em Ω.

2.5. O Princípio da Singularidade Removível afirma que, se u é uma função harmônica e limitada em $\overline{B_r(x_0)} \setminus \{x_0\}$, então u pode ser estendida para $\overline{B_r(x_0)}$ de modo que a extensão seja harmônica.

(a) Prove o resultado enunciado acima (cf. [15, Proposição 4.12]).

(b) Use o resultado e o Princípio do Máximo para verificar a afirmação feita na Observação 2.5.

2.6. Seja $B^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1,\, x_n > 0\}$. Suponha que $u \in C^2(\overline{B^+})$ é harmônica e $u = 0$ em $\partial B^+ \cap \{x_n = 0\}$. Usando um cálculo direto, mostre que $u^* : B_1(0) \to \mathbb{R}$ definida abaixo é harmônica

$$u^*(x) := \begin{cases} u(x) & \text{se } x_n \geq 0 \\ -u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) & \text{se } x_n < 0. \end{cases}$$

2.7. Resolva os itens a seguir para mostrar que o resultado acima permanece válido se trocarmos $u \in C^2(\overline{B^+})$ por $u \in C(B^+)$:

(a) Explique por que existe v tal que $\Delta v = 0$ em B, $v = u^*$ em ∂B.

(b) Aplique o Princípio do Máximo para mostrar que v é ímpar em x_n.

(c) Verifique que $v = u^*$ em B^+ e conclua que u^* é harmônica em $B_1(0)$.

2.8. Prove o Teorema 2.12 (cf. [5, Teorema 11, Seção 2.2]).

2.9. Use a fórmula de Poisson (cf. Teorema 2.12) para provar que

$$r^{n-2}\frac{r - |x|}{(r + |x|)^{n-1}}u(0) \leq u(x) \leq r^{n-2}\frac{r + |x|}{(r - |x|)^{n-1}}u(0),$$

sempre que u é não-negativa e harmônica em $B_r(0)$. Conclua que uma função não negativa e harmônica em $\mathbb{R}^n$ tem que ser constante.

Capítulo 3

Operadores lineares de 2a ordem

Neste capítulo, vamos estender os resultados dos capítulos precedentes para o operador linear de 2a ordem dado pela expressão abaixo

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u, \tag{3.1}$$

onde $u \in C^2(\Omega)$ e os coeficientes a^{ij}, b^i, $c : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções dadas. A menos que se diga o contrário, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado.

Para qualquer função $u \in C^2(\Omega)$, o Teorema de Schwarz nos assegura que $u_{x_ix_j} = u_{x_jx_i}$ para todo i, $j \in \{1, \dots, n\}$. Assim, podemos reescreveer L como

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2}\left(a^{ij}(x) + a^{ji}(x)\right) u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$

e supor, sem perda de generalidade, que para cada $x \in \Omega$ a matriz

$$A(x) := \begin{bmatrix} a^{11}(x) & \cdots & a^{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n1}(x) & \cdots & a^{nn}(x) \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

é uma matriz simétrica. Isso será feito daqui por diante.

Definição 3.1. *Dizemos que o operador L definido em (3.1) é:*

(i) elíptico no ponto $x \in \Omega$ se a forma quadrática associada à matriz $A(x)$ definida em (3.2)

é positiva, isto é, se $\theta(x)$ denota o menor autovalor de A, então

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta(x)|\xi|^2, \quad \forall\, \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\};$$

(ii) elíptico em Ω se $\theta > 0$ em Ω;

(iii) uniformemente elíptico em Ω se existe $\theta_0 > 0$ tal que $\theta(x) \geq \theta_0$, para todo $x \in \Omega$.

O exemplo mais simples de operador uniformemente elíptico é o Laplaciano em qualquer domínio em Ω. Se considerarmos $\Omega = (0, \infty) \times \mathbb{R}$, então o operador $Lu = u_{x_1x_1} + x_1 u_{x_2x_2}$ é elíptico, embora não seja uniformemente elíptico. Esse mesmo operador ,em uma faixa do tipo $(a, b) \times \mathbb{R}$ com $0 < a < b$, é uniformemente elíptico.

Quando L é uniformemente elíptico, vale a seguinte desigualdade

$$\xi A(x)\xi = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta_0|\xi|^2, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Tomando $\xi = e_i$ como sendo o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$, obtemos

$$e_i A(x) e_i = a^{ii}(x) \geq \theta_0|e_i|^2 = \theta_0, \quad i = 1, \ldots, n,\ x \in \Omega. \tag{3.3}$$

3.1 Princípios de Máximo

Em toda essa seção, vamos supor que os coeficientes a^{ij}, b^i e c do operador L definido em (3.1) estão em $L^\infty(\Omega)$. Nosso primeiro resultado é uma versão do item (i) do Teorema 1.6 (cf. também Exercício 1.11).

Teorema 3.2. *Seja L um operador uniformemente elíptico em Ω com $c \equiv 0$ em Ω. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, então valem os seguintes itens:*

(i) *se $Lu \geq 0$ em Ω, então*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u;$$

(ii) *se $Lu \leq 0$ em Ω, então*

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Demonstração. Suponha inicialmente que $Lu > 0$ em Ω e que existe $\tilde{x} \in \Omega$ tal que $u(\tilde{x}) = \max_{\overline{\Omega}} u$. Como L é uniformemente elíptico, a matriz dos coeficiente $A = A(\tilde{x})$ é positiva definida, e portanto existe uma matriz ortogonal $O = O_{n\times n}$ tal que $O^{-1} = O^T$ e

$$OAO^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

com $\lambda_i \geq \theta_0 > 0$, $i = 1, \ldots, n$. O termo geral da matriz acima é dado por

$$\delta_{kl}\lambda_k = \sum_{i=1}^n o_{ki} \sum_{j=1}^n a^{ij} o^T_{jl} = \sum_{i,j=1}^n o_{ki} a^{ij} o_{lj}. \tag{3.4}$$

Considere agora a nova variável $y := \tilde{x} + O(x - \tilde{x})$, de modo que as componentes do vetor y são dadas por

$$y_k = \tilde{x}_k + \sum_{j=1}^n o_{kj}(x_j - \tilde{x}_j), \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Uma vez que $O^T = O^{-1}$, vale $x = \tilde{x} + O^T(y - \tilde{x})$ e podemos derivar

$$u(x) = u(\tilde{x} + O^T(y - \tilde{x}))$$

para obter

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n u_{y_k} o_{ki}, \quad u_{x_i x_j} = \sum_{k,l=1}^n u_{y_k y_l} o_{ki} o_{lj},$$

sempre que i, $j \in \{1, \ldots n\}$. Usando $\nabla u(\tilde{x}) = 0$ e (3.4), obtemos

$$\begin{aligned} Lu(\tilde{x}) &= \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\tilde{x}) u_{x_i x_j}(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^n b^i(\tilde{x}) u_{x_i}(\tilde{x}) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\tilde{x}) \sum_{k,l=1}^n u_{y_k y_l} o_{ki} o_{lj} \\ &= \sum_{k,l=1}^n u_{y_k y_l} \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(\tilde{x}) o_{ki} o_{lj} \\ &= \sum_{k,l=1}^n u_{y_k y_l} \delta_{kl} \lambda_k = \sum_{k=1}^n u_{y_k y_k} \lambda_k. \end{aligned}$$

Como que $D^2 u(\tilde{x}) \leq 0$, o mesmo raciocínio usado na prova de (3.3) mostra que $u_{y_k y_k}(\tilde{x}) \leq 0$,

$k = 1, \ldots, n$. Como os números $\lambda_i's$ são positivos, concluímos da expressão acima que

$$Lu(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^{n} v_{y_k y_k}(\tilde{x})\lambda_k \leq 0,$$

o que é um absurdo. Logo, se $Lu > 0$ em Ω, a função u não pode assumir seu máximo em Ω, isto é, $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.

Pra o caso geral $Lu \geq 0$, tome $\gamma \in \mathbb{R}$ arbitrário e $u_\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon \mathrm{e}^{\gamma x_1}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega.$$

Usando a definição de L, obtemos

$$Lu_\varepsilon = Lu + \varepsilon L(\mathrm{e}^{\gamma} x_1) = Lu + \varepsilon \mathrm{e}^{\gamma x_1}(a^{11}(x)\gamma^2 + b^1(x)\gamma).$$

Usando (3.3), a regularidade dos coeficientes e $Lu \geq 0$, obtemos

$$Lu_\varepsilon \geq \varepsilon \mathrm{e}^{\gamma x_1}(\theta_0\gamma^2 - \|b^1\|_\infty \gamma) > 0,$$

em Ω, desde que o número γ seja tal que $\gamma > \|b^1\|_\infty/\theta_0$. Assim, podemos usar a primeira parte da demonstração para concluir que

$$\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon.$$

Mas $u_\varepsilon \geq u$, e portanto

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} \mathrm{e}^{\gamma x_1}.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$, concluímos que $\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u$. Como a desigualdade contrária é trivialmente satisfeita, concluímos que

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Para provar o item (ii) basta usar o item (i) com a função $-u$. $\square$

Observação 3.3. *A conclusão do teorema pode não ser válida em cada uma das situações abaixo:*

1. *se Ω não é limitado, bastando para isso considerar $\Omega = \mathbb{R} \times (0, \pi)$, $Lu = \Delta u$ e a função $u(x, y) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} y$.*

2. *se $c \not\equiv 0$, bastando para isso considerar $\Omega = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$, $Lu = \Delta u + 2u$ e $u(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$.*

3. *se os coeficientes do operador não são limitados, bastando para isso considerar* $\Omega = (-1,1) \subset \mathbb{R}$, $Lu = u'' + b(x)u'$, *com*

$$b(x) = \begin{cases} -\frac{3}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

e a função $u(x) = 1 - x^4$.

Além disso, uma análise cuidadosa da demonstração mostra que teorema permanece válido supondo somente que L *é elítico e que, para algum* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *a função* $|b^i|/a^{ii}$ *permaneça limitada em qualquer compacto contido em* Ω.

No que segue, vamos considerar uma versão do teorema acima para o caso em que o termo de ordem zero c é não positivo. Antes porém, lembremos que se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função qualquer, então a *parte positiva* u^+ e a *parte negativa* u^- da função u são definidas por

$$u^+(x) := \max\{u(x), 0\}, \quad u^-(x) := \max\{-u(x), 0\},$$

para $x \in \Omega$. Observe que as duas funções acima são não negativas e valem as seguintes igualdades

$$|u| = u^+ + u^-, \quad u = u^+ - u^-.$$

Teorema 3.4 (Princípio do Máximo Fraco)**.** *Seja* L *um operador uniformemente elíptico em* Ω *com* $c \leq 0$ *em* Ω. *Se* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, *então valem os seguintes itens:*

(i) *se* $Lu \geq 0$ *em* Ω, *então*
$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+;$$

(ii) *se* $Lu \leq 0$ *em* Ω, *então*
$$\min_{\overline{\Omega}} u \geq -\max_{\partial\Omega} u^-;$$

(iii) *se* $Lu = 0$ *em* Ω, *então*
$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Demonstração. (i) Se o conjunto $\Omega^+ := \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$ for vazio não há nada a fazer pois, nesse caso, $u \leq 0$ em $\overline{\Omega}$ e portanto

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq 0 = \max_{\partial\Omega} u^+.$$

Logo, podemos supor que $\Omega^+ \neq \varnothing$. A continuidade de u nos assegura que o conjunto Ω^+ é aberto em Ω, e portanto aberto em $\mathbb{R}^n$. Desse modo, como $c \leq 0$ em Ω,

$$Ku := Lu - c(x)u \geq 0 \quad \text{em } \Omega^+.$$

Note que

$$Ku = Lu - c(x)u = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i}$$

e que $u \in C^2(\Omega^+) \cap C(\overline{\Omega^+})$. Segue então do Teorema 3.2(i), aplicado ao operador K, que

$$\max_{\overline{\Omega^+}} u = \max_{\partial\Omega^+} u.$$

Uma vez que $\overline{\Omega} = \overline{\Omega^+} \cup \overline{\Omega \setminus \Omega^+}$ e $u \leq 0$ nesse último conjunto, segue que

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\overline{\Omega^+}} u = \max_{\partial\Omega^+} u.$$

É suficiente então mostrar que

$$\max_{\partial\Omega^+} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

Para tanto, considere $x_0 \in \partial\Omega^+$ tal que $u(x_0) = \max_{\partial\Omega^+} u$. A continuidade de u e a definição de Ω^+ implicam que $u(x_0) \geq 0$. Se $u(x_0) = 0$ então $\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega^+} u = 0$, o que implicaria $\Omega^+ = \varnothing$. Logo, $u(x_0) > 0$ e podemos usar o fato de Ω^+ ser aberto em Ω para concluir que $x_0 \in \partial\Omega$. De fato, se não fosse assim, então u seria positiva em toda uma bola $B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega^+$, contrariando o fato de que $x_0 \in \partial\Omega^+$. Daí

$$\max_{\partial\Omega^+} u = u(x_0) = u^+(x_0) \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

As considerações acima provam o item (i). O item (ii) segue de (i), bastando para isso notar que se $Lu \leq 0$ então $L(-u) \geq 0$. Daí

$$-\min_{\overline{\Omega}} u = \max_{\overline{\Omega}}(-u) \leq \max_{\partial\Omega}(-u)^+ = \max_{\partial\Omega} u^-,$$

pois $(-u)^+ = \max\{-u, 0\} = u^-$.

Para provar (iii), tomemos $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que $|u(x_0)| = \max_{\overline{\Omega}} |u|$ e consideremos novamente dois casos distintos.

Caso 1. $u(x_0) \geq 0$

Nesse caso, podemos usar o item (i) e a definição de u^+ para obter

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ \leq \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Caso 2. $u(x_0) < 0$
Usando agora o item (ii) obtemos

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = -\min_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^- \leq \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Segue então que $\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |u|$. Como a desigualdade reversa é trivialmente satisfeita, o teorema está provado. □

Como no caso do operador Laplaciano, os princípios de máximos são úteis na obtenção de resultados de unicidade de solução, bem como princípios de comparação. Como exemplo, temos os dois resultados abaixo, cujas provas serão deixadas a cargo do leitor.

Teorema 3.5. *Se L é uniformemente elíptico em Ω com $c \leq 0$, então o problema*

$$\begin{cases} Lu &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= g \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui no máximo uma solução em $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Teorema 3.6 (Princípio de Comparação)**.** *Seja L um operador uniformemente elíptico em Ω com $c \leq 0$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Se $Lu \geq 0$ em Ω e $u \leq 0$ em $\partial\Omega$, então $u \leq 0$ em $\overline{\Omega}$.*

Nosso objetivo agora é estabelecer uma versão do item (ii) do Teorema 1.6 para o operador L. Vamos usar um importante resultado que enunciamos e provamos no que segue.

Lema 3.7 (Lema de Hopf)**.** *Suponha que L é uniformemente elítico e $Lu \geq 0$ em Ω, com $u \in C^2(\Omega)$. Seja $x_0 \in \partial\Omega$ tal que*

(i) u é contínua em x_0;

(ii) $u(x_0) > u(x)$, para todo $x \in \Omega$;

(iii) existe uma bola aberta $B \subset \Omega$ tal que $x_0 \in \partial B$.

Então a derivada normal exterior em x_0, se existe, satisfaz

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) > 0,$$

desde que uma das hipóteses abaixo se verifique:

1. *$c \equiv 0$ em B;*

2. *$c \leq 0$ em B e $u(x_0) \geq 0$.*

Antes de provar o lema acima vale observar que, se o ponto $x_0 \in \Omega$ satisfaz $(i) - (ii)$ e a derivada normal existe, é sempre verdade que

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{u(x_0 + h\eta) - u(x_0)}{h} \geq 0,$$

independente do sinal de Lu. A informação adicional dada pelo lema é que a desigualdade acima é estrita.

Demonstração do Lema 3.7. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $u \in C(\overline{B})$ e que $u(x) < u(x_0)$ para todo $x \in \overline{B} \setminus \{x_0\}$. De fato, se não for esse o caso, é suficiente tomar uma nova bola $B' \subset B$ que é internamente tangente à B no ponto x_0. Além disso, conforme veremos posteriormente, podemos também supor que $B = B_r(0)$.

Feitas as considerações acima, vamos assumir inicialmente as hipóteses do item (ii) e considerar, para $\gamma > 0$ a ser determinado, a função

$$v(x) := \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2} - \mathrm{e}^{-\gamma r^2}, \quad x \in B.$$

Para cada $i, j = 1, \ldots, n$, temos que

$$v_{x_i} = -2\gamma x_i \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2}$$

e

$$\begin{aligned} v_{x_i x_j} &= \begin{cases} 4\gamma^2 x_i x_j \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2}, & \text{se } i \neq j \\ 4\gamma^2 x_i^2 \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2} - 2\gamma \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2}, & \text{se } i = j \end{cases} \\ &= (4\gamma^2 x_i x_j - 2\gamma\delta_{ij})\mathrm{e}^{-\gamma|x|^2}, \end{aligned}$$

em que $\delta_{ij} = 1$, se $i = j$, e $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$. Substituindo no operador L, podemos calcular

$$Lv(x) = \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \big(4\gamma^2 a^{ij}(x) x_i x_j - 2\gamma \delta_{ij} a^{ij}(x)\big) - 2\gamma \sum_{i=1}^{n} (b^i(x) x_i) + c(x) \right) - c(x)\mathrm{e}^{-\gamma r^2}.$$

Usando as hipóteses sobre os coeficientes de L, temos que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) x_i x_j \geq \theta_0 |x|^2, \quad \sum_{i=1}^{n} b^i(x) x_i \leq |x| \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_\infty \leq c_1$$

e

$$\sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} a^{ij}(x) \le \sum_{i,j=1}^{n} \|a^{ij}\|_\infty = c_2,$$

com c_1, $c_2 \ge 0$. As estimativas acima e $c \le 0$ implicam que

$$Lv(x) \ge \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2} \left(4\gamma^2\theta_0|x|^2 - 2\gamma(c_1 + c_2) - \|c\|_\infty\right).$$

Desse modo, fazendo $c_3 := c_1 + c_2$ e denotando $A_r := B_r(0) \setminus B_{r/2}(0)$ temos que, para todo $x \in A_r$, vale

$$Lv(x) \ge \mathrm{e}^{-\gamma|x|^2} \left(4\gamma^2\theta_0(r/2)^2 - 2\gamma c_3 - \|c\|_\infty\right).$$

Escolhendo $\gamma > 0$ grande de modo que o termo entre parêntesis acima seja positivo, concluímos que

$$Lv \ge 0 \quad \text{em } A_r.$$

Uma vez que x_0 é um ponto de máximo estrito de u e a função v é positiva e contínua no compacto $\partial B_{r/2}(0)$, podemos escolher $\varepsilon > 0$ de tal modo que

$$u(x_0) \ge u(x) + \varepsilon v(x), \quad x \in \partial B_{r/2}(0).$$

Note ainda que a desigualdade acima permanece válida em $\partial B_r(0)$ pois, nesse conjunto, a função v se anula. Desse modo, a função

$$w(x) = u(x) + \varepsilon v(x) - u(x_0)$$

é tal que

$$\begin{cases} Lw = Lu + \varepsilon Lv - c(x)u(x_0) \ge 0, & \text{em } A_r, \\ w \le 0, & \text{em } \partial A_r. \end{cases} \tag{3.5}$$

Segue então do Princípio de Comparação (cf. Teorema 3.6) que $w \le 0$ em A_r.

Observe agora que, como $x_0 \in \partial B$, temos que $v(x_0) = 0$. Logo $w(x_0) = 0$ e portanto x_0 é um ponto de máximo de w em $\overline{A_r}$. Supondo que existe a derivada normal de u no ponto x_0, devemos ter $\frac{\partial w}{\partial \eta}(x_0) \ge 0$, o que implica que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) &\ge -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial \eta}(x_0) = -\varepsilon \nabla v(x_0) \cdot \left(\frac{x_0}{r}\right) \\ &= -\varepsilon \left(-2\gamma x_0 \mathrm{e}^{-\gamma|x_0|^2}\right) \cdot \left(\frac{x_0}{r}\right) \\ &= 2\gamma\varepsilon \frac{|x_0|^2}{r} \mathrm{e}^{-\gamma|x_0|^2} > 0. \end{aligned}$$

Isso estabelece a veracidade de (ii) no caso em que a bola B está centrada na origem. Para o caso geral em que $B = B_r(y)$ basta considerar $v(x) = \mathrm{e}^{-\gamma|x-y|^2} - \mathrm{e}^{-\gamma r^2}$ para $x \in B_r(y)$ e proceder como acima. A prova do item (i) pode ser feita repetindo os mesmo passos acima e será deixada como exercício. □

Observação 3.8. *Sob as hipóteses do lema, mesmo quando não existe a derivada normal no ponto x_0, a demonstração mostra que, para toda direção exterior ν tal que $\nu \cdot \eta(x_0) > 0$, vale*

$$\liminf_{h\to 0^-} \frac{u(x_0 + h\nu) - u(x_0)}{h} > 0.$$

Vamos usar o Lema de Hopf para provar o

Teorema 3.9 (Princípio do Máximo Forte)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo, L um operador uniformemente elíptico em Ω com $c \equiv 0$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Então*

(i) *se $Lu \geq 0$ em Ω e u atinge máximo em Ω, então u é constante em Ω;*

(ii) *se $Lu \leq 0$ em Ω e u atinge mínimo em Ω, então u é constante em Ω.*

No caso em que $c \leq 0$ vale o seguinte:

(iii) *se $Lu \geq 0$ em Ω e u atinge máximo não negativo em Ω, então u é constante em Ω;*

(iv) *se $Lu \leq 0$ em Ω e u atinge mínimo não positivo em Ω, então u é constante em Ω.*

Demonstração. (i) Suponha que $Lu \geq 0$ e u atinge máximo em Ω. Seja $M := \max_{\overline{\Omega}} u$, $\Omega_M := \{x \in \Omega : u(x) = M\} \neq \varnothing$ e suponha, por contradição, que

$$\Sigma := \Omega \setminus \Omega_M = \{x \in \Omega : u(x) < M\} \neq \varnothing.$$

Escolha $y \in \Sigma$ tal que

$$\operatorname{dist}(y, \Omega_M) < \operatorname{dist}(y, \partial\Omega)$$

e considere $r > 0$ o raio da maior bola $B = B_r(y)$ tal que $B \subset \Sigma$ (cf. Exercício 3.9). Por construção, existe $x_0 \in \partial B \cap \Omega_M$. Uma vez que $x_0 \in \Omega$ é um ponto de máximo de u, devemos ter $\nabla u(x_0) = 0$ e portanto

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) = \nabla u(x_0) \cdot \eta(x_0) = 0.$$

Por outro lado, segue do item (i) do Lema de Hopf que a derivada normal acima deve ser positiva. Esta contradição mostra que $\Omega_M = \Omega$, e portanto $u \equiv M$ em Ω.

A prova do item (ii) segue de (i) utilizando-se a função $-u$. No caso em que $c \leq 0$ em Ω a prova é análoga à apresentada acima utilizando porém o item (ii) do Lema de Hopf. □

Observação 3.10. *Note que o teorema acima vale para domínios ilimitados. A elipticidade uniforme e a limitação dos coeficientes não é essencial. É suficiente supor que as funções*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{a^{ij}(x)}{\theta(x)}, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{b^{i}(x)}{\theta(x)}, \quad \frac{c(x)}{\theta(x)}$$

são limitadas em todo compacto contido em Ω.

O resultado abaixo é um princípio de máximo geral para o operador L sem restrições no sinal de $c(x)$.

Teorema 3.11. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto conexo,* L *um operador uniformemente elíptico e suponha que existe* $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *tal que* $w > 0$ *em* Ω *e* $Lw \leq 0$ *em* Ω. *Dada* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, *temos que*

(i) *se* $Lu \geq 0$ *e* $\frac{u}{w}$ *assume máximo não negativo em* Ω, *então* $\frac{u}{w}$ *é constante em* Ω.

(ii) *se* $Lu \leq 0$ *e* $\frac{u}{w}$ *assume mínimo não positivo em* Ω, *então* $\frac{u}{w}$ *é constante em* Ω.

Demonstração. Denotando $v = \frac{u}{w}$, um cálculo direto (cf. Exercício 3.19) mostra que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} B^i(x) v_{x_i} + \left(\frac{Lw}{w}\right) v \geq 0 \quad \text{em } \Omega,$$

com $B^i(x) := b^i(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{2}{w} a^{ij}(x) u_{x_i x_j}$, para cada $i = 1, \ldots, n$. O resultado segue agora do Teorema 3.9. □

A aplicabilidade do resultado acima depende de podermos encontrar uma função w como no enunciado do teorema. No que segue exibimos uma classe de domínios para os quais essa tarefa pode ser executada com sucesso.

Teorema 3.12. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto e* L *um operador uniformemente elíptico em* Ω *satisfazendo*

$$|\langle x - y, e \rangle| < d, \quad \forall\, x,\, y \in \Omega,$$

para algum $e \in \mathbb{R}^n$ *satisfazendo* $|e| = 1$. *Então existe* $d_0 = d_0(n, \theta_0, \|b^i\|_\infty, \|c^+\|_\infty) > 0$ *tal que o Teorema 3.11 é aplicável se* $d \leq d_0$.

Demonstração. Vamos exibir uma função w satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.11. Para simplificar a notação vamos supor que $e = e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ e que $\Omega \subset (0, d) \times \mathbb{R}^{n-1}$. Considerando $\gamma > 0$ a ser escolhido posteriormente, definimos

$$w(x) := \mathrm{e}^{\gamma d} - \mathrm{e}^{\gamma x_1}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega.$$

Observe inicialmente que $w \in C^\infty(\Omega)$. Além disso, como para todo $x \in \Omega$ vale $0 < x_1 < d$, temos que $w > 0$ em Ω.

Note que

$$w_{x_1} = -\gamma e^{\gamma x_1}, \quad w_{x_1 x_1} = -\gamma^2 e^{\gamma x_1}$$

e as demais derivadas de ordem 1 e 2 são nulas. Sendo assim, usando novamente que $0 < x_1 < d$, obtemos

$$\begin{aligned} Lw &= -(a^{11}(x)\gamma^2 + \gamma b^1(x))e^{\gamma x_1} + (c^+(x) - c^-(x))(e^{\gamma d} - e^{\gamma x_1}) \\ &\leq -(a^{11}(x)\gamma^2 + \gamma b^1(x))e^{\gamma x_1} + c^+(x)e^{\gamma d}. \end{aligned}$$

Denotando $M := \max\{\|b^1\|_\infty, \|c^+\|_\infty\}$ e usando (3.3), obtemos então

$$Lw \leq -\theta_0\gamma^2 e^{\gamma x_1} + \|b^1\|_\infty \gamma e^{\gamma x_1} + \|c^+\|_\infty e^{\gamma d} \leq -(\theta_0\gamma^2 - M\gamma) + Me^{\gamma d}.$$

Escolhendo agora $\gamma > 0$ de modo que $\theta_0\gamma^2 - M\gamma > 2M$, concluímos que

$$Lw \leq -2M + Me^{\gamma d} = M(-2 + e^{\gamma d})$$

de sorte que $Lw \leq 0$ em Ω, sempre que $0 < d \leq d_0 := \ln(2)/\gamma$. $\square$

Como último resultado apresentamos um princípio de comparação devido a Varadhan que também vale independentemente do sinal de $c(x)$ mas que, em compensação, exige que o conjunto Ω tenha volume pequeno. Mais especificamente, vale o resultado abaixo, cuja prova pode ser encontrada em [8, Teorema 2.32].

Teorema 3.13. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ em aberto, L uniformemente elíptico em Ω e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $Lu \geq 0$ em Ω e $u \leq 0$ em $\partial\Omega$. Então existe $\delta = \delta(n, \|b^i\|_\infty, \|c\|_\infty, \theta_0, diam(\Omega)) > 0$ tal que, se o volume de Ω é menor que δ, então $u \leq 0$ em Ω.*

3.2 Alguns resultados abstratos

Nessa seção vamos discutir a existência de solução para o problema

$$(P) \qquad \begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de classe $C^{2,\gamma}$, $0 < \gamma \leq 1$, $f \in C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$, $g \in C^{2,\gamma}(\partial\Omega)$, L é um operador diferencial de 2a ordem da forma

$$Lu := \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$

com os coeficientes a^{ij}, b^i, $c \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. O Corolário 2.10 nos assegura que, sob as condições acima e no caso em que $L = \Delta$, o problema sempre possui solução em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$. Estamos interessados em obter um resultado análogo para o caso em que L tem a forma acima.

Vamos iniciar nossa discussão supondo que o problema

$$Lv = \widetilde{f} \ \text{ em } \Omega, \quad v = 0 \ \text{ em } \partial\Omega,$$

tem solução de classe $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ para toda $\widetilde{f} \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Uma vez que o dado de fronteira g e o conjunto Ω são de classe $C^{2,\gamma}$, podemos estender g para todo $\overline{\Omega}$ com a sua extensão, que denotaremos ainda por g, sendo de classe $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ (cf. [7, Lemma 6.38]). Considerando agora $v \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ a solução do problema acima com $\widetilde{f} := f - Lg \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, temos que a função $u := v + g$ satisfaz

$$Lu = Lv + Lg = f \ \text{ em } \Omega, \quad u = v + g = g \ \text{ em } \partial\Omega,$$

sendo portanto solução de (P).

As considerações acima mostram que podemos, sem perda de generalidade, considerar $g \equiv 0$ na formulação do problema (P). Sendo assim, definindo

$$X := \left\{ u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) : u \equiv 0 \ \text{ em } \partial\Omega \right\}, \quad Y := C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}), \tag{3.6}$$

a solubilidade do problema (P) é equivalente a mostrar que $L : X \to Y$ é sobrejetivo.

Para começar a formalização do nosso argumento, vamos primeiro mostrar que, se $u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, então $Lu \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Tendo em vista a definição de L, basta verificar que, se $v, w \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, então o produto $vw \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Dados então $x, y \in \Omega$, com $x \neq y$, observe que

$$\begin{aligned}
\frac{|v(x)w(x) - v(y)w(y)|}{|x-y|^\gamma} &= \frac{|v(x)w(x) \pm v(x)w(y) - v(y)w(y)|}{|x-y|^\gamma} \\
&\leq |v(x)|\frac{|w(x) - w(y)|}{|x-y|^\gamma} + |w(y)|\frac{|v(x) - v(y)|}{|x-y|^\gamma} \\
&\leq \|v\|_0 H_\gamma[w] + \|w\|_0 H_\gamma[v].
\end{aligned}$$

Tomando o supremo para $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, obtemos

$$H_\gamma[vw] \leq \|v\|_0 H_\gamma[w] + \|w\|_0 H_\gamma[v] < \infty,$$

e portanto $vw \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|vw\|_{0,\gamma} &= \|vw\|_0 + H_\gamma[vw] \\ &\leq \|v\|_0 \|w\|_0 + \|v\|_0 H_\gamma[w] + \|w\|_0 H_\gamma[v] \\ &\leq (\|v\|_0 + H_\gamma[v])(\|w\|_0 + H_\gamma[w]) \\ &= \|v\|_{0,\gamma} \|w\|_{0,\gamma}. \end{aligned}$$

Considere $(u_m) \subset C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, tal que $u_m \to 0$ em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$. A estimativa acima fornece

$$\begin{aligned} \|Lu_m\|_{0,\gamma} &\leq \sum_{i,j=1}^n \left\|a^{ij}(u_m)_{x_i x_j}\right\|_{0,\gamma} + \sum_{i=1}^n \left\|b^i(u_m)_{x_i}\right\|_{0,\gamma} + \|cu_m\|_{0,\gamma} \\ &\leq c_1 \left(\sum_{i,j=1}^n \|(u_m)_{x_i x_j}\|_{0,\gamma} + \sum_i^n \|(u_m)_{x_i}\|_{0,\gamma} + \|u_m\|_{0,\gamma} \right), \end{aligned}$$

em que $c_1 := \max\{\|a^{ij}\|_{0,\gamma}, \|b^i\|_{0,\gamma}, \|c\|_{0,\gamma}\}$. Uam vez que $\|D^\alpha(u_m)\|_{0,\gamma} \to 0$ para todo multi-índice de ordem menor ou igual a 2, segue da expressão acima que $Lu_m \to 0 = L0$ em $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Se $u_m \to u$ em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$, então $u_m - u \to 0$, donde se conclui que $L(u_m - u) \to 0$, isto é, $Lu_m \to Lu$ em $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Desse modo, L é contínuo.

Na próxima subseção, apresentamos um resultado abstrato que será utilizado na prova da sobrejetividade de L.

3.2.1 O método da continuação

Conforme vimos anteriormente, resolver o problem (P) é equivalente a mostrar a sobrejetividade do operador linear e contínuo $L : X \to Y$, onde L, X e Y são como na seção anterior. A fim de realizar tal tarefa, vamos considerar a família de problemas

$$\begin{cases} L_t u = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde

$$L_t := (1-t)L + t\Delta, \quad t \in [0,1],$$

e mostrar que L_0 é sobrejetivo se, e somente se, L_1 é sobrejetivo. Uma vez que $L_1 = \Delta$, o resultado de existência de solução para (P) será uma consequência do Corolário 2.10.

Lembremos que, se X e Y são espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ um operador linear, então dizemos que T é *limitado* se

$$\|T\| := \sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X\leq 1}\|Tx\|_Y < \infty.$$

Não é difícil verificar que T é limitado se, e somente se, T é contínuo.

O resultado abstrato abaixo é uma peça chave no nosso projeto.

Teorema 3.14 (Princípio da Continuação)**.** *Seja X um espaço de Banach, Y um espaço vetorial normado e $\mathscr{L}_0$, $\mathscr{L}_1 : X \to Y$ operadores lineares limitados. Para $t \in [0,1]$, considere o operador*

$$\mathscr{L}_t u := (1-t)\mathscr{L}_0 u + t\mathscr{L}_1 u, \quad u \in X. \tag{3.7}$$

Suponha que existe $c > 0$ tal que

$$\|u\|_X \leq c\,\|\mathscr{L}_t u\|_Y\,, \quad \forall\, u \in X,\, t \in [0,1]. \tag{3.8}$$

Então $\mathscr{L}_0$ é sobrejetivo se, e somente se, $\mathscr{L}_1$ é sobrejetivo.

Antes de provar o resultado acima vamos fazer algumas considerações. Observe inicialmente que, se o operador linear $\mathscr{L} : X \to Y$ é tal que existe $c > 0$ com $\|x\|_X \leq c\,\|\mathscr{L}x\|_Y$, para todo $x \in X$, então ele é um operador injetivo. Nesse caso, podemos considerar o operador inverso $\mathscr{L}^{-1} : \mathscr{L}(X) \to X$, que é também linear. Além disso, para todo $y = \mathscr{L}x \in \mathscr{L}(X)$ vale

$$\left\|\mathscr{L}^{-1}y\right\|_X \leq c\,\|y\|_Y\,,$$

de onde se conclui que $\mathscr{L}^{-1}$ é também limitado. Assim, a condição (3.8) no teorema acima é equivalente a dizer que $\left\|\mathscr{L}_t^{-1}\right\|$ é uniformemente limitado para $t \in [0,1]$.

Para demonstrar o Teorema 3.14 vamos usar o resultado abaixo, cuja demonstração será deixada para o leitor (cf. Exercício 3.22)

Teorema 3.15 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)**.** *Seja (X,d) é um espaço métrico completo e $T : X \to X$ uma contração, isto é, existe $\theta \in (0,1)$ tal que*

$$d(Tx,Ty) \leq \theta d(x,y), \ \ \forall\, x,y \in X.$$

Então T possui exatamente um ponto fixo, isto é, existe exatamente um elemento $x \in X$ tal que $Tx = x$.

Estamos prontos para provar o principal resultado dessa subseção.

Demonstração do Teorema 3.14. Suponha que $\mathscr{L}_s$ é sobrejetivo para algum $s \in [0,1]$.

Dado $t \in [0,1]$ e $y \in Y$, observe que

$$\mathscr{L}_t x = y \iff \mathscr{L}_s x = y + (\mathscr{L}_s - \mathscr{L}_t)(x).$$

Desse modo, resolver a equação $\mathscr{L}_t x = y$ é equivalente a resolver

$$\begin{aligned} x &= \mathscr{L}_s^{-1}[y + (\mathscr{L}_s - \mathscr{L}_t)(x)] \\ &= \mathscr{L}_s^{-1}y + \mathscr{L}_s^{-1}[(\mathscr{L}_s - \mathscr{L}_t)(x)] \\ &= \mathscr{L}_s^{-1}y + \mathscr{L}_s^{-1}[(1-s)\mathscr{L}_0 x + s\mathscr{L}_1 x - (1-t)\mathscr{L}_0 x - t\mathscr{L}_1 x] \\ &= \mathscr{L}_s^{-1}y + \mathscr{L}_s^{-1}[(t-s)\mathscr{L}_0 x - (t-s)\mathscr{L}_1 x] \\ &= \mathscr{L}_s^{-1}y + (t-s)\mathscr{L}_s^{-1}[(\mathscr{L}_0 - \mathscr{L}_1)(x)] \end{aligned}$$

Assim, se definirmos $T : X \to X$ por

$$Tx := \mathscr{L}_s^{-1}y + (t-s)\mathscr{L}_s^{-1}[(\mathscr{L}_0 - \mathscr{L}_1)(x)],$$

resolver a equação $\mathscr{L}_t x = y$ é equivalente a obter um ponto fixo para T.

A ideia agora é mostrar que, se $|t-s|$ é pequeno, então T é uma contração. Para tanto, considere x_1, $x_2 \in X$ e note que

$$\begin{aligned} \|Tx_1 - Tx_2\|_X &= \left\|(t-s)\mathscr{L}_s^{-1}[(\mathscr{L}_0 - \mathscr{L}_1)(x_1 - x_2)]\right\|_X \\ &\leq |t-s| \left\|\mathscr{L}_s^{-1}[(\mathscr{L}_0 - \mathscr{L}_1)(x_1 - x_2)]\right\|_X . \end{aligned}$$

Conforme vimos anteriormente, (3.8) implica que $\|\mathscr{L}_s^{-1}x_0\| \leq c\|x_0\|$, para qualquer $x_0 \in X$. Logo,

$$\begin{aligned} \|Tx_1 - Tx_2\|_X &\leq c|t-s| \, \|(\mathscr{L}_0 - \mathscr{L}_1)(x_1 - x_2)\|_X \\ &\leq c|t-s| \left(\|\mathscr{L}_0(x_1 - x_2)\|_X + \|\mathscr{L}_1(x_1 - x_2)\|_X\right) \\ &\leq c|t-s| \left(\|\mathscr{L}_0\| + \|\mathscr{L}_1\|\right) \|x_1 - x_2\|_X, \end{aligned}$$

o que mostra que T é uma contração desde que

$$|t-s| < \delta := \frac{1}{c(\|\mathscr{L}_0\| + \|\mathscr{L}_1\|)},$$

onde estamos supondo, sem perda de genralidade, que $\mathscr{L}_0 \neq \mathscr{L}_1$. Segue agora to Teorema do Ponto Fixo de Banach (cf. Exercício **??**) que T possui exatamente um ponto fixo $x \in X$. As considerações anteriores mostram que $\mathscr{L}_t$ é sobrejetivo para todo $t \in [0,1]$ tal que $|t-s| < \delta$.

Para concluir a demonstração note que podemos cobrir $[0,1]$ com intervalos da forma $(s -$

$\delta, s+\delta)$ quando fazemos s percorrer o intervalo $[0,1]$. A conclusão do teorema seque então por iteração, visto que $\delta > 0$ é uma constante que não depende de t. $\square$

A aplicabilidade do último teorema ao nosso problema (P) depende de sermos capazes de encontrar uma constante $c > 0$ satisfazendo (3.8). A obtenção dessa constante é uma parte delicada no estudo do problema (P) e depende de algumas propriedades dos espaços de Hölder, definidos antes da Proposição 2.4. Nosso próximo passo é estudar com mais detalhes aqueles espaços.

3.2.2 Espaços de Hölder, imersões contínuas e compactas

Iniciamos essa subseção com a definição de imersões entre espaços de Banach.

Definição 3.16. *Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados com $X \subseteq Y$. Dizemos que X está imerso continuamente em Y se existe $c > 0$ tal que*

$$\|x\|_Y \leq C\,\|x\|_X\,, \quad \forall\, x \in X.$$

Nesse caso, escrevemos $X \hookrightarrow Y$.

Dizer que a imersão de X em Y é contínua é equivalente a dizer que a aplicação identidade $i : X \to Y$ dada por $i(x) = x$, $x \in X$, é contínua. Um exemplo simples de imersão ocorre no espaços das funções diferenciáveis. Se $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então

$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}),$$

visto que, para toda função $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$, vale

$$\|u\|_k = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_0 \leq \sum_{|\alpha| \leq k+1} \|D^\alpha u\|_0 = \|u\|_{k+1}\,.$$

O resultado abaixo generaliza essa informação e fornece também uma hierarquia entre os espaços de Hölder.

Teorema 3.17. *Se $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $0 < \nu < \gamma \leq 1$, então*

(1) $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$;

(2) $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$;

(3) $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\nu}(\overline{\Omega})$.

Além disso, se Ω é convexo, então

(4) $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,1}(\overline{\Omega})$;

(5) $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\nu}(\overline{\Omega})$.

Demonstração. O item (1) foi provado acima. Para (2), basta notar que

$$\|u\|_k = \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_0 \le \|u\|_k + \sum_{|\alpha|\le k} H_\gamma\left[D^\alpha u\right] = \|u\|_{k,\gamma}\,,$$

para toda $u \in C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Para verificar (3), vamos fixar $u \in C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ e α um multi-índice com $|\alpha| \le k$. Dados x, $y \in \Omega$ com $0 < |x-y| < 1$, temos que

$$\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\nu} \le \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\gamma} \le H_\gamma[D^\alpha u].$$

Por outro lado, se $|x-y| \ge 1$, então

$$\begin{aligned}
\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\nu} &\le |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \\
&\le |D^\alpha u(x)| + |D^\alpha u(y)| \\
&\le \|D^\alpha u\|_0 + \|D^\alpha u\|_0 \\
&= 2\,\|D^\alpha u\|_0\,.
\end{aligned}$$

Assim,

$$H_\nu[D^\alpha u] \le 2\,\|D^\alpha u\|_0 + H_\gamma[D^\alpha u],$$

de onde se conclui que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{k,\nu} &= \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_0 + \sum_{|\alpha|\le k} H_\nu[D^\alpha u] \\
&\le \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_0 + \sum_{|\alpha|\le k} H_\gamma[D^\alpha u] + 2\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_0 \\
&\le \|u\|_{k,\gamma} + 2\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_0 + 2\sum_{|\alpha|\le k} H_\gamma[D^\alpha u] \\
&= 3\,\|u\|_{k,\gamma}\,,
\end{aligned}$$

e portanto (3) se verifica.

Suponha agora que Ω é convexo e considere $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$. Dados x, $y \in \Omega$ com $x \ne y$, e um multi-índice α tal que $|\alpha| \le k$, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio para escrever

$$D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y) = \nabla D^\alpha u(z) \cdot (x-y)$$

para algum $z \in \{(1-t)x + ty : t \in [0,1]\}$. Desse modo

$$\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|} \le |\nabla D^\alpha u(z)| \le c \left\| u \right\|_{k+1}$$

e portanto

$$\left\| u \right\|_{k,1} = \left\| u \right\|_{k} + \sum_{|\alpha| \le k} H_1[D^\alpha u] \le c \left\| u \right\|_{k+1},$$

o que estabelece (4). Finalmente, considerando as imersões contínuas abaixo

$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\nu}(\overline{\Omega}),$$

vemos que o item (5) também vale. □

Observação 3.18. *A hipótese de convexidade em (4) e (5) não pode ser retirada, pois existem funções $u \in C^1(\overline{\Omega})$ que não estão em $C^{0,1}(\overline{\Omega})$. Como exemplo, considere $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < \sqrt{|x|},\, x^2 + y^2 < 1\}$ e*

$$u(x,y) := \begin{cases} (sgn\, x) y^\beta, & se\ y > 0, \\ 0, & se\ y \ge 0, \end{cases}$$

em que $1 < \beta < 2$ e $sgn(\cdot)$ é a função sinal. Então $u \in C^1(\overline{\Omega})$ mas, para todo $\gamma > 0$ satisfazendo que $\beta/2 < \gamma < 1$, pode-se mostrar que $u \notin C^{0\,\gamma}(\overline{\Omega})$. Em particular, pelo item (3), temos que $u \notin C^{0,1}(\overline{\Omega})$.

Estamos interessados agora em propriedades especiais das imersões acima. Lembremos que, se X e Y são espaços vetoriais normados, dizemos que um operador linear $T : X \to Y$ é compacto quando T é contínuo e T leva conjuntos limitados em conjuntos relativamente compactos, isto é, se $A \subseteq X$ é limitado então $\overline{T(A)} \subset Y$ é compacto.

Definição 3.19. *Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados com $X \hookrightarrow Y$. Dizemos qua a imersão de X em Y é compacta se a aplicação identidade $i : X \to Y$ for compacta. Nesse caso dizemos que X está imerso compactamente em Y e escrevemos $X \overset{cpct.}{\hookrightarrow} Y$.*

Uma maneira equivalente de definir uma imersão compacta é dizer que X está imerso compactamente em Y se toda sequência $(u_m) \subset X$ limitada possui subsequência convergente em Y.

Conforme veremos adiante, resultados de compacidade são extremamente importantes no estudo de equações diferenciais. Enunciamos abaixo um resultado clássico de convergência que será usado ao longo deste texto.

Teorema 3.20 (Arzelá-Ascoli)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\mathcal{A} \subset C(\overline{\Omega})$ um subconjunto satisfazendo*

(i) *existe $M > 0$ tal que*
$$\|u\|_0 \leq M, \quad \forall\, u \in \mathcal{A};$$

(ii) *dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $u \in \mathcal{A}$, x, $y \in \overline{\Omega}$, vale*
$$|u(x) - u(y)| < \varepsilon, \quad \textit{sempre que } |x - y| < \delta.$$

Então toda sequência $(u_m) \subset \mathcal{A}$ possui subsequência convergente.

Um conjunto $\mathcal{A} \subset C(\overline{\Omega})$ é dito equilimitado quando satisfaz a condição (i) acima. Quando (ii) é satisfeita, dizemos que o conjunto é equicontínuo. Note que, quando Ω é convexo, uma condição suficiente para a equicontinuidade de $\mathcal{A}$ é que as suas funções tenham derivadas uniformemente limitadas em $\overline{\Omega}$.

No nosso próximo resultado analisamos a compacidade das imersões dadas no Teorema 3.17.

Teorema 3.21. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $0 < \nu < \gamma \leq 1$, então*

(2') $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} C^k(\overline{\Omega})$;

(3') $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega}) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} C^{k,\nu}(\overline{\Omega})$.

Além disso, se Ω é convexo, então

(1') $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} C^k(\overline{\Omega})$;

(5') $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} C^{k,\nu}(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Vamos provar primeiro (2') para $k = 0$. Seja $(u_m) \subset C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ tal que
$$\|u_m\|_{0,\gamma} = \|u_m\|_0 + H_\gamma[u_m] \leq M, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Para mostrar que existe uma subsequência convergente em $C(\overline{\Omega})$, defina $\mathcal{A} := \{u_m : m \in \mathbb{N}\} \subset C(\overline{\Omega})$. Segue imediatamente da expressão acima que $\mathcal{A}$ é equilimitado. Além disso, como $H_\gamma[u_m] \leq M$, vale
$$|u_m(x) - u_m(y)| \leq M|x - y|^\gamma, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}, \forall\, x,\, y \in \overline{\Omega}.$$

Logo, para todo $\varepsilon > 0$ dado, a condição (ii) do Teorema 3.20 se verifica para $\delta = (\varepsilon/M)^{1/\gamma}$. Aplicando o Teorema de Arzelá-Ascoli concluímos que (u_m) possui uma subsequência convergente em $C(\overline{\Omega})$.

Considerando agora $k \in \mathbb{N}$, tomamos $(u_m) \subset C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ uma sequência limitada. Então existe uma subsequência de (u_m), que denotaremos ainda por (u_m), tal que $u_m \to u$ em $C(\overline{\Omega})$. Para todo multi-índice α tal que $|\alpha| \leq k$,

$$\|u_m\|_{k,\gamma} = \|u_m\|_k + \sum_{|\alpha|\leq k} H_\gamma[D^\alpha u_m] \leq M.$$

Logo,

$$\|D^\alpha u_m\|_{0,\gamma} = \|D^\alpha u_m\|_0 + H_\gamma[D^\alpha u_m] \leq M.$$

Usando a primeira parte da demonstração e passando para subsequências se necessário, temos que $D^\alpha u_m \to \Psi_\alpha$ em $C(\overline{\Omega})$. Como a convergência é uniforme devemos ter $\Psi_\alpha = D^\alpha u$. Desse modo, $u \in C^k(\overline{\Omega})$ e

$$\|u_m - u\|_k = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u_m - D^\alpha u\|_0 \to 0,$$

o que estabelece (2').

Para verificar (3') note inicialmente que, se $u \in C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ e x, $y \in \Omega$ com $x \neq y$, então

$$\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\nu} = \left(\frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\gamma}\right)^{\frac{\nu}{\gamma}} |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^{1-\frac{\nu}{\gamma}}$$

de modo que, tomando o supremo, obtemos

$$H_\nu[D^\alpha u] \leq c_1 H_\gamma[D^\alpha u]^{\nu/\gamma} \|D^\alpha u\|_0^{1-\nu/\gamma}.$$

Seja agora $(u_m) \subset C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ tal que $\|u_m\|_{k,\gamma} \leq M$. Usando (2') e passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que (u_m) converge em $C^k(\overline{\Omega})$. Usando a estimativa acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\|u_j - u_m\|_{k,\nu} &= \sum_{|\alpha|\leq k} \left(\|D^\alpha(u_j - u_m)\|_0 + H_\nu[D^\alpha(u_j - u_m)]\right) \\
&\leq \sum_{|\alpha|\leq k} A_{j,m} \left(\|D^\alpha(u_j - u_m)\|_0^{\nu/\gamma} + c_1 H_\gamma[D^\alpha(u_j - u_m)]^{\nu/\gamma}\right),
\end{aligned}$$

com $A_{j,m} = \|D^\alpha(u_j - u_m)\|_0^{1-\nu/\gamma}$. Usando a desigualdade (cf. Exercício 3.23)

$$(a+b)^{\nu/\gamma} \leq c_2(a^{\nu/\gamma} + b^{\nu/\gamma}), \quad a,\, b \geq 0,$$

e a limitação de (u_m), concluímos que

$$H_\gamma[D^\alpha u_j - D^\alpha u_m]^{\nu/\gamma} \leq (H_\gamma[D^\alpha u_j] + H_\gamma[D^\alpha u_m])^{\nu/\gamma} \leq 2c_2 M^{\nu/\gamma},$$

com uma estimativa análoga valendo para $\|D^\alpha u_j - D^\alpha u_m\|_0^{\nu/\gamma}$. Portanto

$$\|u_j - u_m\|_{k,\gamma} \leq 2c_2 M^{\nu/\gamma}(1+c_1) \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha(u_j - u_m)\|_0^{1-\nu/\gamma}.$$

Como u_n converge em $C^k(\overline{\Omega})$, para todo multi-índice de ordem menor ou igual a k, $\|D^\alpha(u_j - u_m)\|_0 \to 0$, quando j, $m \to \infty$. Assim, como $1-\nu/\gamma > 0$, segue da expressão acima que (u_m) é sequência de Cauchy em $C^{k,\nu}(\overline{\Omega})$. Logo, $u_m \to u$ em $C^{k,\nu}(\overline{\Omega})$, para alguma função $u \in C^{k,\nu}(\overline{\Omega})$, o que estabelece (3').

A demonstração dos itens $(1')$ e $(5')$ segue dos diagramas abaixo

$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,1}(\overline{\Omega}) \overset{\text{cpct.}}{\hookrightarrow} C^k(\overline{\Omega})$$

$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,1}(\overline{\Omega}) \overset{\text{cpct.}}{\hookrightarrow} C^{k,\nu}(\overline{\Omega})$$

e do fato de que a composição de um operador contínuo com um operador compacto é um operador compacto. □

3.3 O Teorema de Existência de Schauder

Voltemos agora à questão de existência de solução para o problema

$$(P) \qquad \begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega, \\ u = g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de classe $C^{2,\gamma}$, $0 < \gamma \leq 1$, $f \in C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$, $g \in C^{2,\gamma}(\partial\Omega)$, L é um operador diferencial de 2a ordem da forma

$$Lu := \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x) u_{x_i} + c(x)u,$$

com os coeficientes a^{ij}, b^i, $c \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Conforme vimos, esse problema é equivalente a $Lu = f$ em Ω, $u = 0$ em $\partial\Omega$, que por sua vez é equivalente a mostrar que, se

$$X := \left\{ u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}); u|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

então $L : X \to C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ é sobrejetivo.

A ideia é usar o método da continuação para a família de operadores

$$L_t := (1-t)L + t\Delta, \quad t \in [0,1].$$

Conforme vimos, será necessário encontrar $c > 0$ (independente de t) tal que

$$\|u\|_{2,\gamma} \le c\|L_t u\|_{0,\gamma}, \quad \forall\ u \in X,\ t \in [0,1]. \tag{3.9}$$

Essa é uma parte delicada e complicada do método onde usaremos o que chamamos de estimativa a priori para as soluções do problema (P). Mais especificamente, vamos usar o resultado abaixo, cuja prova pode ser encontrada em [7, Teorema 6.6].

Teorema 3.22 (Estimativa a priori)**.** *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe $C^{2,\gamma}$ e L um operador uniformemente elíptico com*

$$\max\left\{\|a^{ij}\|_{0,\gamma}, \|b^i\|_{0,\gamma}, \|c\|_{0,\gamma}\ :\ i,j = 1\ldots n\right\} \le \alpha.$$

Então existe uma constante $C = C(n,\gamma,\theta_0,\alpha,\Omega) > 0$ tal que

$$\|u\|_{2,\gamma} \le C\left\{\|Lu\|_{0,\gamma} + \|u\|_{C^{2,\gamma}(\partial\Omega)} + \|u\|_0\right\}, \quad \forall\ u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}).$$

Observe que, se $u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ é uma solução de (P), a estimativa acima nos fornece

$$\|u\|_{2,\gamma} \le C\left\{\|f\|_{0,\gamma} + \|g\|_{C^{2,\gamma}(\partial\Omega)} + \|u\|_0\right\},$$

e portanto não obtemos uma informação precisa a respeito da localização da solução devido ao termo $\|u\|_0$ que aparece do lado direito. Esse termo adicional (e indesejado) também atrapalha na aplicação do Método da Continuação. Conforme veremos abaixo, esse problema pode ser superado se vale o princípio de comparação para o operador L.

Lema 3.23. *Suponha que as hipóteses do Teorema 3.22 são satisfeitas e que o problema*

$$\begin{cases} Lu &= 0, \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0, \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

tenha apenas a solução trivial $u \equiv 0$ em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$. Então existe uma constante $C = C(n,\gamma,\theta_0,\alpha,\Omega) > 0$ tal que

$$\|u\|_{2,\gamma} \le C\left\{\|Lu\|_{0,\gamma} + \|u\|_{C^{2,\gamma}(\partial\Omega)}\right\}, \quad \forall\ u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}).$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que existem $(C_m) \subset (0,+\infty)$ e $(u_m) \subset C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$

tais que $C_m \to +\infty$, quando $m \to +\infty$, mas

$$\|u_m\|_{2,\gamma} \geq C_m \left\{ \|Lu_m\|_{0,\gamma} + \|u_m\|_{C^{2,\gamma}(\partial\Omega)} \right\}.$$

Considerando $v_m := \frac{u_m}{\|u_m\|_{2,\gamma}}$ temos que $\|v_m\|_{2,\gamma} = 1$ e

$$\|Lv_m\|_{0,\gamma} + \|v_m\|_{C^{2,\gamma}(\partial\Omega)} \leq \frac{1}{C_m} \to 0. \tag{3.10}$$

Uma vez que $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \overset{\text{cpct.}}{\hookrightarrow} C^2(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, existe $v \in C(\overline{\Omega})$ e uma subsequência, que ainda denotamos por (v_m), tal que $v_m \to v$ em $C(\overline{\Omega})$. Pelo Teorema 3.22,

$$\|v_j - v_m\|_{2,\gamma} \leq C \left\{ \|Lv_j - Lv_m\|_{0,\gamma} + \|v_j - v_m\|_{C^{2,\gamma}(\partial\Omega)} + \|v_j - v_m\|_0 \right\}.$$

A expressão acima, (3.10) e a convergência em $C(\overline{\Omega})$ mostram que $(v_m) \subset C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ é sequência de Cauchy, e portanto $v_m \to v$ em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$. Como L é contínuo, temos que $Lv_m \to Lv$. Desse modo, segue de (3.10) que v satisfaz

$$\begin{cases} Lv &= 0, \quad \text{em } \Omega \\ v &= 0, \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde se conclui que $v \equiv 0$. Mas isso é um absurdo visto $1 = \|v_m\|_{2,\gamma} \to \|v\|_{2,\gamma} = 0$. □

Vale destacar que, pelo Teorema 3.5, a conclusão do lema acima vale se o termo de ordem zero c é não positivo em $\overline{\Omega}$. Desse modo, podemos enunciar e provar o resultado principal desse capítulo:

Teorema 3.24 (Teorema de Existência de Schauder)**.** *Seja Ω um aberto limitado de classe $C^{2,\gamma}$, L um operador uniformemente elíptico com coeficientes em $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e tal que $c \leq 0$ em Ω. Então, para toda $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e $g \in C^{2,\gamma}(\partial\Omega)$, o problema*

$$\begin{cases} Lu &= f, \quad \text{em } \Omega, \\ u &= g, \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P}$$

possui solução única em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Conforme já foi mencionado podemos, sem perda de generalidade, supor que $g \equiv 0$. Considere

$$X := \{u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) : u_{|\partial\Omega} \equiv 0\}$$

e defina, para $t \in [0,1]$, o operador $L_t : X \to C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ por

$$L_t u := (1-t)Lu + t\Delta u, \quad \forall\, u \in X.$$

Observe inicialmente que, se $\theta_0 > 0$ é a constante de elipticidade de L, $A(x) = a^{ij}(x)$, para $x \in \Omega$, e $\xi \in \mathbb{R}^N$, então

$$\begin{aligned} \xi\big((1-t)A(x) + tId\big)\xi &\geq (1-t)\theta_0|\xi|^2 + t|\xi|^2 \\ &= [(1-t)\theta_0 + t]\,|\xi|^2 \\ &\geq \min\{1, \theta_0\}|\xi|^2, \end{aligned}$$

de modo que L_t é uniformemente elíptico com constante de elipticidade igual a $\min\{1, \theta_0\}$, que é independente de t. Além disso, como $t \in [0, 1]$, temos que

$$\max\{\|a^{ij}\|_{0,\gamma}, \|b^i\|_{0,\gamma}, \|(1-t)c\|_{0,\gamma} : i, j = 1, \dots, n\} \leq \alpha,$$

com $\alpha = \alpha(\|a^{ij}\|_{0,\gamma}, \|b^i\|_{0,\gamma}, \|c\|_{0,\gamma}) > 0$ independente de t. Finalmente, note que o termo de ordem zero de L_t é $(1-t)c(\cdot)$, que é não positivo em Ω. Segue do Princípio do Máximo (ou do Teorema 3.5) que o problema homogêneo $L_t u = 0$ em Ω, $u = 0$ em $\partial\Omega$, possui somente a solução nula.

As considerações acima nos permitem aplicar o Lema 3.23 para obter uma constante $C = C(n, \gamma, \theta_0, \alpha, \Omega) > 0$, independente de $t \in [0, 1]$, tal que

$$\|u\|_{2,\gamma} \leq C\left\{\|L_t u\|_{0,\gamma} + \|u\|_{C^{2,\gamma}(\partial\Omega)}\right\} = C\|L_t u\|_{0,\gamma}, \quad \forall\, u \in X,$$

visto que os elementos de X são identicamente nulos na fronteira de Ω.

Utilizando agora o Método da Continuação (cf. Teorema 3.14) concluímos que $L_0 = L$ é sobrejetivo se, e somente se, L_1 é sobrejetivo. O Teorema 2.8 nos assegura que $L_1 = \Delta$ é sobrejetivo e portanto o problema (P) tem pelo menos uma solução em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$. A unicidade da solução segue do Princípio do Máximo. □

No próximo teorema estamos interessados em obter estimativas a priori em conjuntos que ficam longe da fronteira de Ω. Por isso, não exigimos regularidade sobre Ω. A demonstração do resultado abaixo pode ser encontrada em [7, Teorema 6.2].

Teorema 3.25 (Estimativas interiores). *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e L um operador uniformemente elíptico com*

$$\max\{\|a^{ij}\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}, \|b^i\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}, \|c\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} : i, j = 1, \dots, n\} \leq \alpha.$$

Se $\Omega_0 \subset \overline{\Omega}_0 \subset \Omega_1 \subset \overline{\Omega}_1 \subset \Omega$ e $\overline{\Omega}_1$ é compacto, então existe uma constante $C = C(n, \gamma, \theta_0, \alpha) > 0$ tal que

$$\|u\|_{C^{2,\gamma}(\Omega_0)} \leq C\left\{\|Lu\|_{C^{0,\gamma}(\Omega_1)} + \|u\|_{C(\Omega_1)}\right\}, \quad \forall\, u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}).$$

Como uma aplicação da estimativa interior dada pelo teorema acima, vamos provar o seguinte resultado (compare com o Teorema 2.10).

Teorema 3.26. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe $C^{2,\gamma}$, L um operador uniformemente elíptico com coeficientes em $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e $c \leq 0$. Então, dada $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e $g \in C(\partial\Omega)$, o problema*

$$\begin{cases} Lu &= f, \quad \text{em } \Omega \\ u &= g, \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

possui solução única em $C^{2,\gamma}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Demonstração. A regularidade de Ω e g nos permite estender essa última para todo $\overline{\Omega}$ de modo que a extensão, que denotaremos ainda por g, é contínua em $\overline{\Omega}$. Pelo Teorema de Stone-Weirstrass (cf. [1, Corolário 1.29]), g pode ser aproximada uniformemente por polinômios e portanto existe $(g_m) \subset C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ tal que $g_m \to g$ em $C(\overline{\Omega})$.

Usando $c \leq 0$, podemos aplicar o Teorema 3.24 para obter $u_m \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ satisfazendo

$$\begin{cases} Lu_m &= f, \quad \text{em } \Omega \\ u_m &= g_m, \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.11}$$

Aplicando o Princípio do Máximo para a função $u_j - u_m$, concluímos que

$$\|u_j - u_m\|_{C(\overline{\Omega})} \leq \|g_j - g_m\|_{C(\partial\Omega)}.$$

A convergência de g_m em $C(\overline{\Omega})$ implica que (u_m) é sequência de Cauchy em $C(\overline{\Omega})$, e portanto

$$u_m \to u \ \text{ em } \ C(\overline{\Omega}).$$

Considerando agora um aberto Ω_0 tal que $\Omega_0 \subset \overline{\Omega}_0 \subset \Omega_1 \subset \overline{\Omega}_1 \subset \Omega$, o Teorema 3.25 nos garante que

$$\|u_j - u_m\|_{C^{2,\gamma}(\Omega_0)} \leq C\|u_j - u_m\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Isso nos diz que (u_m) é sequência de Cauchy em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}_0)$ e portanto $u_m \to u$ em $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}_0)$. Como Ω_0 é arbitrário, podemos passar (3.11) ao limite para concluir que $u \in C^{2,\gamma}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é solução do problema. A unicidade segue como antes, usando o Princípio do Máximo. $\square$.

3.4 Exercícios

Atenção: Nos exercícios abaixo, a menos que se diga o contrário, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de classe C^2. O operador L é uniformemente elíptico em Ω e tem a forma

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i,x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$

com os coeficientes limitados em Ω e $c \leq 0$ em Ω.

3.1. Verifique a elipticidade de todos os operadores exemplificados após a Definição 3.1.

3.2. Verifique com detalhes todas as afirmações feitas na Observação 3.3.

3.3. Se $\Omega = (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi/2, \pi/2)$ e $u(x, y) = \cos x \cos y$, então u satisfaz $\Delta u + 2u = 0$ em Ω, $u = 0$ em $\partial\Omega$, mas u troca de sinal em Ω. Por que isso não contraria o Princípio do Máximo?

3.4. A função

$$u(x, y) = \frac{1 - (x^2 + y^2)}{(1 - x)^2 + y^2}, \quad (x, y) \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^2,$$

satisfaz $\Delta u = 0$ em Ω, $u = 0$ em $\partial\Omega \setminus \{(1, 0)\}$. O Princípio do Máximo se aplica nesse caso?

3.5. Prove o Teorema 3.5.

3.6. Prove o Teorema 3.6. Conclua que se $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfazem $Lu \geq Lv$ em Ω, $u \leq v$ em $\partial\Omega$, então $u \leq v$ em Ω.

3.7. Considere as hipóteses do Lema de Hopf e o novo operador $\tilde{L} = L - c^+(x)$. Repetindo o argumento da demonstração, mostre que se $u(u_0) = 0$, então o resultado do lema permanece válido independente do sinal de $c(x)$.

3.8. Se Ω é conexo e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfaz $Lu \geq 0$ em Ω, $u \leq 0$ em Ω, então $u < 0$ em Ω ou $u \equiv 0$ em Ω, independente do sinal de $c(x)$.

3.9. Mostre que é sempre possível obter $y \in \Sigma$ e $r > 0$ satisfazendo as condições utilizadas na demonstração do Teorema 3.9.

3.10. Prove a afirmação feita na Observação 3.10.

3.11. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfaz $\Delta u = u^3$ em Ω, $u = 0$ em $\partial\Omega$, então $u \equiv 0$.

3.12. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfaz $\Delta u = u^3 - u$ em Ω, $u = 0$ em $\partial\Omega$, então $-1 \leq u(x) \leq 1$ para todo $x \in \Omega$. Seria possível $u(x_0) = \pm 1$ para algum $x_0 \in \Omega$?

3.13. Se Ω é conexo, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfaz $\Delta u = u^2$ em Ω e u assume máximo em Ω, então $u \equiv 0$.

3.14. Se $u(x) = -e^x - e^{-x}$, então u satisfaz $u'' - u = 0$ em $\mathbb{R}$ e assume máximo em $x = 0$. Por que isso não contraria o Princípio do Máximo Forte?

3.15. Considere o problema *não linear*

$$\begin{cases} \Delta u &= f(x,u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= \varphi \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $f(\cdot, u) \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, $f(x, \cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ e f é não decrescente em u, isto é, $\frac{\partial f}{\partial u}(x) \geq 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Mostre que o problema tem no máximo uma solução em $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

3.16. Use o exercício anterior para verificar que, se $k \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ é uma função não negativa, então o problema não linear

$$\begin{cases} \Delta u &= k(x)e^u \quad \text{em } \Omega, \\ u &= \varphi \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

tem no máximo uma solução em $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

3.17. Seja Ω conexo e $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ tal que $Lu = 0$ em Ω e $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ em $\partial\Omega$.

(a) Mostre que u é constante em Ω.

(b) Se $c(x_0) < 0$ para algum $x_0 \in \Omega$, então $u \equiv 0$ em Ω.

(c) Enuncie e prove um teorema de unicidade de solução para o problema de Neumann $Lu = f$ em Ω, $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \varphi$ em $\partial\Omega$.

3.18. Para Ω conexo, considere o problema

$$\begin{cases} Lu &= f \quad \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} + \alpha(x)u &= \varphi \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $f \in C(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$ e $\alpha \in C(\partial\Omega)$ é uma função não negativa.

(a) Se $c \not\equiv 0$ ou $\alpha \not\equiv 0$, então o problema tem no máximo uma solução em $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

(b) Se $c \equiv 0$ e $\alpha \equiv 0$, então quaisquer duas soluções do problema em $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ diferem por uma constante.

3.19. Complete os detalhes da prova do Teorema 3.11.

3.20. Se $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ é contínua, então o operador linear $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ definido por

$$(Tu)(x) = \int_0^1 K(x,y)u(y)\, dy$$

é compacto.

3.21. Se $T : X \to Y$ é contínuo e $S : Y \to Z$ é compacto, então $(S \circ T) : X \to Z$ é compacto.

3.22. Seja (X, d) é um espaço métrico completo e $T : X \to X$. Se existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$d(Tx_1, Tx_2) \leq \theta \cdot d(x_1, x_2), \quad \forall\, x_1, x_2 \in X,$$

então existe exatamente um elemento $x \in X$ tal que $Tx = x$.

Sugestão: Tome $x_0 \in X$ não nulo e mostre que a sequência $x_k = Tx_{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, é uma sequência de Cauchy. Em seguida, mostre que o limite dessa sequência é um ponto fixo.

3.23. Mostre que, se $\theta \in \mathbb{R}$, então existe $c > 0$ tal que

$$(a+b)^\theta \leq c(a^\theta + b^\theta), \quad \forall\, a,\, b \geq 0.$$

Sugestão: Estude o comportamento de $f(t) = (1+t)^\theta/(1+t^\theta)$ quando $t \to 0^+$ e $t \to +\infty$.

Capítulo

4

Espaços de Sobolev

A partir de agora vamos estudar o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sendo um aberto de classe C^1 e a função f, ao contrário dos capítulos anteriores, podendo ser descontínua em Ω. A fim de exemplificar o que faremos vamos supor, inicialmente, que a função f pertence ao espaço de Lebesgue $L^2(\Omega)$.

Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ é solução clássica de (P) então, multiplicando a primeira equação de (P) por $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, integrando e usando o Teorema da Divergência, obtemos

$$\int_\Omega f(x)\varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega (-\Delta u)\varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi) \, \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \eta} \, \mathrm{d}x,$$

ou ainda, lembrando que $\varphi \equiv 0$ em $\partial\Omega$,

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\varphi \, \mathrm{d}x, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{4.1}$$

Observe que o lado direito da equação acima é finito sempre que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Em particular, se $f \in L^2(\Omega)$ e u é uma solução clássica de (P), a expressão acima sempre se verifica. Note ainda que o integrando do lado esquerdo envolve apenas as derivadas de primeira ordem da função u.

A fim de continuar nossa motivação vamos supor que existe um espaço de Hilbert H com as seguintes propriedades:

(i) o produto interno em H é dado pela aplicação

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle_H :\ & H\times H \longrightarrow \mathbb{R}\\ & (u,v)\longmapsto \langle u,v\rangle_H = \int_\Omega (\nabla u\cdot\nabla v)\,\mathrm{d}x;\end{aligned} \tag{4.2}$$

(ii) $C_0^\infty(\Omega)$ é um subespaço de H denso;

(iii) H está imerso continuamente em $L^2(\Omega)$.

Nessas condições, a equação (4.1) se escreve como

$$\langle u,\varphi\rangle_H = \int_\Omega f(x)\varphi\,\mathrm{d}x, \quad \forall\,\varphi\in C_0^\infty(\Omega).$$

Para mostrar que a igualdade acima pode ser estendida para todos os elementos de H, seja $\varphi\in H$ e $(\varphi_m)\subset H$ tal que $\varphi_m\to\varphi$ em H, quando $m\to+\infty$. Pela continuidade do produto interno, temos que $\langle u\,,\varphi_m\rangle_H\to\langle u,\varphi\rangle_H$. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a continuidade da imersão $H\hookrightarrow L^2(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega (f(x)\varphi_m - f(x)\varphi)\,\mathrm{d}x\right| &\le \int_\Omega |f(x)(\varphi_m-\varphi)|\,\mathrm{d}x\\ &\le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi_m-\varphi\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi_m-\varphi\|_H \to 0,\end{aligned}$$

quando $m\to+\infty$. Assim, passando a igualdade $\langle u,\varphi_m\rangle_H = \int_\Omega f(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x$ ao limite, concluímos que

$$\int_\Omega (\nabla u\cdot\nabla\varphi)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\varphi\,\mathrm{d}x, \quad \forall\,\varphi\in H. \tag{4.3}$$

Diremos que $u\in H$ é uma *solução fraca* do problema (P) se a igualdade acima ocorre. Naturalmente, toda solução clássica é solução fraca. Veremos posteriormente que o contrário pode não ser verdade.

Vejamos agora como a existência de um espaço H como acima nos permite encontrar solução fraca para o problema (P). Para isso, vamos definir a transformação linear

$$\begin{aligned}T_f :\ & H\longrightarrow\mathbb{R}\\ & \varphi\mapsto T_f(\varphi) := \int_\Omega f(x)\varphi\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Para toda $\varphi\in H$, vale

$$|T_f(\varphi)| = \left|\int_\Omega f(x)\varphi\,\mathrm{d}x\right| \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \le C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_H,$$

e portanto T_f é uma funcional linear contínuo de H em $\mathbb{R}$.

Nesse ponto, vale lembrar que se $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma transformação linear e se $v \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito na base canônica de $\mathbb{R}^n$ como $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, então

$$T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(e_i) = \langle v_T, v\rangle_{\mathbb{R}^n},$$

em que $v_T = (T(e_1), \ldots, T(e_n)) \in \mathbb{R}^n$. Isso mostra que, para cada transformação linear T de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, podemos associar um elemento $v_T \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$T(v) = \langle v_T, v\rangle_{\mathbb{R}^N}, \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^n.$$

O ponto importante aqui é que o resultado acima só depende do fato de $\mathbb{R}^n$ ser um espaço com produto interno, conforme nos diz o resultado abaixo:

Teorema 4.1 (Teorema da Representação de Riesz)**.** *Seja X um espaço de Hilbert e $T : X \to \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo. Então existe um único $x_T \in X$ tal que*

$$T(x) = \langle x_T, x\rangle_X, \quad \forall\, x \in X.$$

Além disso, $\|x_T\| = \|T\|_{X^*}$.

Demonstração. Se $T = 0$ basta tomar $x_T = 0$. Podemos então supor que $\ker T = \{x \in X : Tx = 0\}$ é um subespaço não trivial de X. Como esse subespaço é fechado, existe $x_0 \in (\ker T)^\perp$ tal que $\|x_0\|_X = 1$. Note agora que, para todo $x \in X$, vale a seguinte decomposição

$$x = \left(x - \frac{T(x)}{T(x_0)} x_0\right) + \frac{T(x)}{T(x_0)} x_0.$$

Uma conta simples mostra que o teorema vale para $x_T = T(x_0)x_0$. A unicidade, a igualdade $\|x_T\| = \|T\|_{X^*}$ e os detalhes do argumento acima ficam como exercício. $\square$

Voltando ao nosso problema, perceba que a existência de solução fraca para (P) é equivalente a encontrar $u \in H$ tal que

$$\langle u, \varphi\rangle_H = T_f(\varphi), \quad \forall\, \varphi \in H.$$

Como T_f é um funcional linear contínuo, existe um elemento $u_f \in H$ tal que

$$T_f(\varphi) = \langle u_f, \varphi\rangle_H, \quad \forall\, \varphi \in H.$$

Segue então das duas últimas igualdades que u_f é uma solução fraca de (P).

Não é difícil verificar que a solução fraca obtida acima é única. De fato, se u_1, $u_2 \in H$ são soluções fracas de (P), então

$$\langle u_1, \varphi \rangle_H = \int_\Omega f(x)\varphi \, \mathrm{d}x = \langle u_2, \varphi \rangle_H, \quad \forall \, \varphi \in H,$$

o que mostra que

$$\langle u_1 - u_2, \varphi \rangle_H = 0, \quad \forall \, \varphi \in H.$$

Em particular, escolhendo $\varphi = u_1 - u_2$ na expressão acima, concluímos que $\|u_1 - u_2\|_H^2 = 0$, o que implica que $u_1 = u_2$.

Nas próximas seções, vamos discutir a existência de um espaço H com as propriedades acima. É importante observar que a equação (4.3) pressupõe apenas a existência de derivadas de ordem um para as funções de H. Desse modo, é natural que o espaço H seja maior do que $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, esse último sendo o espaço em que vivem as soluções clássicas. Assim, podemos dizer que temos mais chance de obter soluções fracas do que soluções clássicas.

Um maneira simples de construir o espaço H seria notar que a função dada em (4.2) define um produto interno em $C_0^\infty(\Omega)$ e denotar por H o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ com a norma induzida por esse produto interno. Uma dificuldade que surge é que, com essa construção, os elementos de H seriam classes de equivalência de sequências de Cauchy em $C_0^\infty(\Omega)$. Evidentemente não parece muito claro como trabalhar com tais elementos. O segundo problema é que ainda precisaríamos mostrar que $H \hookrightarrow L^2(\Omega)$. A ideia então é tentar identificar este completamento acima com algum espaço de funções.

Como trabalharemos muito com formulações integrais para nossos problemas, escreveremos somente $\int u$ para denotar $\int_\Omega u(x)\mathrm{d}x$, em que $u \in L^1(\Omega)$. Além disso, para $1 \leq p \leq \infty$ e $u \in L^p(\Omega)$, vamos escrever $\|u\|_p$ para denotar a norma de u em $L^p(\Omega)$. As normas de funções u contínuas ou Hölder contínuas serão denotadas por $\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})}$ e $\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})}$, respectivamente. Finalmente, diremos que φ é uma *função teste* quando $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

4.1 Derivadas Fracas

O primeiro passo para a construção do espaço H com as propriedades apresentadas no início do capítulo é introduzir um novo conceito de derivada que generaliza que a derivada usual. Um contexto histórico pode ser visto no trecho a seguir, que é uma livre tradução de [13, pg. 160]

> "A definição de derivada fraca foi introduzida por S.L. Sobolev (1908-1989) em seus primeiros trabalhos sobre equações diferenciais parciais (1936-1938). Sua abordagem requer uma extensão do conjunto de funções diferenciáveis, ou seja, uma extensão do domínio dos operadores diferenciais para funções cujas derivadas não

são necessariamente contínuas. O uso de derivadas fracas permitiu-lhe superar o problema de continuidade e descontinuidade em relação à diferenciação, o que abriu novas perspectivas para o estudo de equações diferenciais"

Como forma de motivação, considere $u \in C^k(\Omega)$, para algum $k \in \mathbb{N}$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ uma função teste. O Teorema da Divergência nos permite integrar por partes para obter (cf. Teorema 1.3(b))

$$\int u\varphi_{x_i} = -\int u_{x_i}\varphi + \int_{\partial\Omega} u(x)\varphi(x)\eta^i \, \mathrm{d}\sigma_x = -\int u_{x_i}\varphi,$$

em que usamos, na última igualdade, o fato de que $\varphi \equiv 0$ em $\partial\Omega$. De uma maneira mais geral, se α é um multi-índice tal que $|\alpha| \leq k$, podemos escrever

$$\int uD^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|}\int \varphi D^\alpha u. \tag{4.4}$$

Para que o lado esquerdo da expressão acima faça sentido, basta supor que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. De fato, se este for o caso e denotarmos por $K_\varphi \subset\subset \Omega$ o suporte da função φ, temos que

$$\left|\int uD^\alpha\varphi\right| \leq \int_{K_\varphi} |u(x)|\,|D^\alpha\varphi(x)| \, \mathrm{d}x \leq \|\varphi\|_\infty \int_{K_\varphi} |u(x)|\mathrm{d}x < \infty.$$

As considerações acima motivam a seguinte definição:

Definição 4.2. *Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e um multi-índice α, dizemos que $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ é uma α-ésima derivada fraca de u se*

$$\int_\Omega uD^\alpha\varphi \, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\varphi \, \mathrm{d}x, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{4.5}$$

Essencialmente, a definição acima diz que uma derivada fraca é uma função localmente integrável que nos permite fazer integração por partes. O lema abaixo estabelece, em um certo sentido, a unicidade da derivada fraca.

Lema 4.3. *A α-ésima derivada fraca de uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, quando existe, é única a menos de conjuntos de medida nula.*

Demonstração. Suponha que v_1, v_2 são α-ésimas derivadas fracas de u. Então

$$(-1)^{|\alpha|}\int v_1\varphi = \int uD^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|}\int v_2\varphi, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

e portanto

$$\int (v_1 - v_2)\varphi = 0, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Segue então (cf. [3, Lema 4.2]) que $v_1 - v_2 = 0$ q.t.p. em Ω, de onde se conclui que $v_1 = v_2$ q.t.p. em Ω. $\square$

Tendo em vista o lema acima, se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ possui α-ésima derivada fraca v, podemos denotar simplesmente

$$v = D^\alpha u.$$

Para que a notação acima não cause confusão com a derivada no sentido clássico, deixamos claro que ao longo de todo este capítulo, quando escrevermos $D^\alpha u$, estamos sempre nos referindo à α-ésima derivada no sentido fraco.

Antes de apresentar as propriedades básicas da derivada fraca, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4.4. Se uma função u possui derivada no sentido clássico, então u possui derivada no sentido fraco, que coincide com a derivada clássica.

Exemplo 4.5. Considere $\Omega = (0,2)$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que $u \in L^1_{loc}(0,2)$ e que não existe a derivada no sentido clássico, visto que não existe a derivada (clássica) no ponto $x = 1$. Vamos mostrar que u possui derivada fraca $v : (0,2) \to \mathbb{R}$ dada por

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De fato, claramente temos que $v \in L^1_{loc}(0,2)$. Seja $\varphi \in C_0^\infty(0,2)$ e observe que

$$\begin{aligned} \int_\Omega u\varphi' \, \mathrm{d}x &= \int_0^1 x\varphi'(x) \, \mathrm{d}x + \int_1^2 \varphi'(x) \, \mathrm{d}x \\ &= x\varphi(x)\Big|_{x=0}^1 - \int_0^1 \varphi(x) \, \mathrm{d}x + (\varphi(2) - \varphi(1)) \\ &= \varphi(1) - \int_0^1 \varphi(x) \, \mathrm{d}x - \varphi(1) \\ &= -\int_0^1 \varphi(x) \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega v\varphi \, \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

de modo que $v = u'$ (no sentido fraco).

Exemplo 4.6. Considere $\Omega = (0,2)$ e seja agora $u : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Vamos mostrar que u não é fracamente derivável. De fato, suponha por contradição existe a derivada fraca u'. Então,

$$\int u\varphi' = -\int u'\varphi, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(0,2).$$

Considere uma sequência $(\varphi_m) \subset C_0^\infty(0,2)$ satisfazendo, para todo $m \in \mathbb{N}$,

(i) $\|\varphi_m\|_\infty \leq 1$;

(ii) $\varphi_m(1) = 1$;

(iii) $\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x) = 0$, para todo $x \neq 1$;

(iv) o suporte de φ_m está contido em $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

Usando integração por partes, obtemos

$$-\int u'\varphi_m = \int u\varphi_m' = \int_0^1 x\varphi_m'(x)\,\mathrm{d}x = x\varphi_m\Big|_{x=0}^1 - \int_0^1 \varphi_m(x)\,\mathrm{d}x.$$

Como φ_m tem suporte compacto e $\varphi_m(1) = 1$, concluímos que

$$-1 = \int u'\varphi_m - \int_0^1 \varphi_m(x)\,\mathrm{d}x = \int_J u'\varphi_m\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \varphi_m(x)\,\mathrm{d}x,$$

em que $J = (\frac{1}{4}, \frac{7}{4})$. Observe agora que $u'(x)\varphi_m(x) \to 0$ q.t.p. em J. Além disso, $|u'(x)\varphi_m(x)| \leq |u'(x)|$ q.t.p. em J e $|u'| \in L^1(J)$, visto que $u' \in L^1_{loc}(0,2)$. Segue então do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{m\to\infty} \int_J u'\varphi_m\,\mathrm{d}x = 0.$$

Do mesmo modo mostra-se que $\int_0^1 \varphi_m(x)\,\mathrm{d}x \to 0$. Assim,

$$-1 = \lim_{m\to\infty} \left(\int u'\varphi_m - \int_0^1 \varphi_m(x)\,\mathrm{d}x \right) = 0,$$

o que é absurdo. Portanto, não existe a derivada fraca u'.

4.2 Espaços de Sobolev

Vamos definir nessa seção o principal objeto de estudo deste capítulo. Como motivação, apresentamos na sequência um tradução livre de [13, pg. 166]:

> ”Novos desenvolvimentos no estudo de problemas de valor de contorno impuseram a necessidade de estender a noção usual de função. A noção de solução admissível foi generalizada de tal forma que o próprio problema de valor de contorno foi transformado em certa equação integral - a chamada formulação fraca do problema de valor de contorno. Isso levou a uma generalização da noção de derivada parcial e à definição de soluções generalizadas. Desde o final da década de 1920, houve muitas tentativas de generalizar a noção de solução de equação diferencial parcial. O grande impacto na aceitação de novas ideias no tratamento de equações diferenciais deve-se a Laurent Schwartz com sua teoria das distribuições.
>
> Como dissemos, a importância dos espaços de Sobolev reside no fato de que eles representam uma estrutura ideal para buscar soluções generalizadas de problemas de valor de contorno. Especialmente importantes são os teoremas de imersão compacta dos espaços de Sobolev, pois eles nos permitem usar a teoria dos operadores compactos. De fato, as investigações na teoria dos operadores compactos (lineares e não lineares) foram em grande parte estimuladas pela necessidade do estudo da solubilidade de equações diferenciais parciais"

Na sequência, apresentamos a definição desse importante espaço de funções.

Definição 4.7. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como sendo*

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \ : \ D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq k\},$$

com as derivadas $D^\alpha u$ acima sendo tomadas no sentido fraco.

Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$, então $u \in L^p(\Omega)$, de modo que toda função de $W^{k,p}(\Omega)$ está em $L^1_{loc}(\Omega)$. Como $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, estamos assumindo tacitamente que todas as derivadas fracas de ordem menor ou igual a k existem. Uma outra observação importante é que valem as seguintes inclusões

$$C_0^\infty(\Omega) \subseteq W^{k,p}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega).$$

Quando $p = 2$, vamos denotar $W^{k,p}(\Omega)$ simplesmente por $H^k(\Omega)$, isto é, $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$. Em particular, se $k = 1$, temos

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \ : \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ para } i = 1, ..., n\right\}.$$

Veremos em breve que $H^k(\Omega)$ pode ser dotado de um produto interno de modo a tornar-se um espaço de Hilbert. Antes note que, se $u \in H^1(\Omega)$, então as duas integrais em (4.3) são finitas sempre que $f \in L^2(\Omega)$. Conforme veremos posteriormente, o espaço H que estamos procurando para obter as soluções fracas de (P) é um subespaço especial de $H^1(\Omega)$.

O resultado abaixo apresenta as propriedades básicas dos espaços de Sobolev.

Proposição 4.8. *Sejam $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$ e α um multi-índice tal que $|\alpha| \leq k$. Então*

(i) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$;

(ii) $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$, *para todo* λ, $\mu \in \mathbb{R}$;

(iii) *Se* $\widetilde{\Omega} \subseteq \Omega$ *é um aberto, então* $u \in W^{k,p}(\widetilde{\Omega})$;

(iv) *Se* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *então* $\varphi u \in W^{k,p}(\Omega)$ *e vale*

$$D^\alpha(\varphi u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} D^\beta \varphi D^{\alpha-\beta} u,$$

onde $\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_n!$ *e* $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_n - \beta_n)$ *é um multí-indice de ordem menor ou igual a* k;

(v) $D^\beta(D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta} u$ *sempre que* $|\beta| + |\alpha| \leq k$.

Demonstração. Considere $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e note que, pela definição de derivada fraca, temos

$$\begin{aligned}
\int (\lambda u + \mu v) D^\alpha \varphi &= \lambda \int u D^\alpha \varphi + \mu \int v D^\alpha \varphi \\
&= \lambda(-1)^{|\alpha|} \int \varphi D^\alpha u + \mu(-1)^{|\alpha|} \int \varphi D^\alpha v \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int (\lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v)\, \varphi,
\end{aligned}$$

o que estabelece a veracidade de (ii). A prova dos demais itens segue também da definição de derivada fraca e será deixada como exercício (cf. Exercício 4.10). □

Observe que o item (ii) acima implica que $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço vetorial real. Vamos transformá-lo em um espaço normado definindo

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \int |D^\alpha u|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Para verificar que $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ define é uma norma em $W^{k,p}(\Omega)$ precisamos mostrar que, para quaisquer u, $v \in W^{k,p}(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, valem

(N1) $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \neq 0$, sempre que $u \neq 0$;

(N2) $\|\lambda u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = |\lambda| \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$;

(N3) $\|u+v\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

Os itens $(N1)$ e $(N2)$ seguem imediatamente da definição de $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$. Vamos mostrar a veracidade de $(N3)$, para $1 \leq p < \infty$. Usando a desigualdade triangular em $L^p(\Omega)$ e a linearidade do operador D^α, obtemos

$$\|u+v\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \left(\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} + \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Lembremos agora que, se $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, a desigualdade de Minkowski se escreve como

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \|u+v\|_{W^{k,p}(\Omega)} &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int |D^\alpha u|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int |D^\alpha v|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Quando $p = \infty$ o item $(N3)$ segue imediatamente da desigualdade triangular para números reais.

Observação 4.9. Existem outras maneiras de definir normas em $W^{k,p}(\Omega)$, como por exemplo

$$|u|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{ou} \quad |||u|||_{W^{k,p}(\Omega)} := \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Não é difícil verificar que as expressões acima também definem normas em $W^{k,p}(\Omega)$ e que essas normas são equivalentes à norma usual $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

A fim de simplificar a notação, a norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ será denotada, daqui por diante, simplesmente por $\|\cdot\|_{k,p}$.

Lembremos que um espaço vetorial $(X, \|\cdot\|_X)$ é chamado espaço de Banach quando ele é completo com respeito à topologia induzida pela norma. O resultado abaixo estabelece a completude do espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$.

Teorema 4.10. $\big(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{k,p}\big)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $1 \leq p < \infty$ e $(u_m) \subset W^{k,p}(\Omega)$ uma sequência de Cauchy. Vamos mostrar que (u_m) converge em $W^{k,p}(\Omega)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que

$$\|u_l - u_m\|_{k,p} < \varepsilon, \quad \text{se } l, m > N.$$

Assim, para todo multi-índice α tal que $|\alpha| \leq k$,

$$\|D^\alpha u_l - D^\alpha u_m\|_p \leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_l - D^\alpha u_m\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} < \varepsilon, \quad \text{se } l, m > N, \tag{4.6}$$

o que mostra que $(D^\alpha u_m) \subset L^p(\Omega)$ é uma sequência de Cauchy. Sendo $L^p(\Omega)$ completo, segue que $D^\alpha u_m \to u_\alpha$ em $L^p(\Omega)$.

Vamos mostrar que $u := u_{(0,\ldots,0)} \in W^{k,p}(\Omega)$ e que $D^\alpha u = u_\alpha$, para todo $|\alpha| \leq k$. Se isso for verdade podemos fazer $l \to \infty$ em (4.6) para concluir que $\|u_m - u\|_{k,p} < \varepsilon$, sempre que $m > N$. Mas isso é o mesmo que dizer que $u_m \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$.

Resta então mostrar que, para cada multi-índice α tal que $|\alpha| \leq k$, vale $D^\alpha u = u_\alpha$. Fixada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos que $D^\alpha \varphi \in L^{p'}(\Omega)$, em que p' é o expoente conjugado de p, isto é, $1/p + 1/p' = 1$. Usando então a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\left| \int (u D^\alpha \varphi - u_m D^\alpha \varphi) \right| \leq \int |u - u_m| |D^\alpha \varphi| \leq \|u - u_m\|_{L^p(\Omega)} \|D^\alpha \varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

A expressão acima mostra que

$$\int u D^\alpha \varphi = \lim_{m \to \infty} \int u_m D^\alpha \varphi, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Uma vez que $D^\alpha u_m \to u_\alpha$ em $L^p(\Omega)$, podemos proceder como acima para verificar que

$$\int u_\alpha \varphi = \lim_{m \to \infty} \int (D^\alpha u_m) \varphi, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Portanto, para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos que

$$\int u D^\alpha \varphi = \lim_{m \to \infty} \int u_m D^\alpha \varphi = \lim_{m \to \infty} (-1)^{|\alpha|} \int (D^\alpha u_m) \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int u_\alpha \varphi.$$

donde se conclui que $D^\alpha u = u_\alpha \in L^p(\Omega)$, e portanto $u \in W^{k,p}(\Omega)$.

O caso $p = \infty$ é simples e será deixado como exercício. $\square$

Finalizamos essa seção apresentando outras duas propriedades úteis do espaço $W^{k,p}(\Omega)$.

Teorema 4.11. *O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Vamos considerar somente $k = 1$, porque os demais casos são análogos. Observe que $W^{1,p}(\Omega)$ pode ser imerso isometricamente em $(L^p(\Omega))^{n+1}$ através da aplicação $I : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)^{n+1}$ dada por

$$I(u) := \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right),$$

onde o espaço $X := (L^p(\Omega))^{n+1}$ está munido com a norma

$$\|(v_0, v_1, \cdots, v_n)\|_{L^p(\Omega)^{n+1}} = \left(\sum_{i=0}^{n+1} \|v_i\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall\, v = (v_0, v_1, \ldots, v_n) \in L^p(\Omega)^{n+1}.$$

Isso significa que podemos identificar $W^{1,p}(\Omega)$ com o subespaço correspondente $Y := I(W^{1,p}(\Omega))$ de X. Uma vez que $W^{1,p}(\Omega)$ é completo segue que Y é um subespaço fechado de X. Mas X é reflexivo quando $1 < p < \infty$ e separável quando $1 \leq p < \infty$, o que mostra que o subespaço fechado Y (e portanto $W^{1,p}(\Omega)$) tem essas mesmas propriedades. $\square$

Pode-se mostrar que $W^{k,\infty}(\Omega)$ não é nem separável nem reflexivo (veja [10]).

4.3 Aproximação por funções suaves

Seja $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ a bola unitária, $1 < p < \infty$ e $\gamma > 0$ tal que $\gamma < (n-p)/p$. Conforme você vai verificar no Exercício 4.11, a função $|x|^{-\gamma}$ pertence a $W^{1,p}(B)$. Como ela é de classe C^∞ em qualquer aberto que não contém a origem, concluímos facilmente que $u \in W^{1,p}(B_2(0))$.

Considere agora $(x_m) \in B$ um conjunto enumerável e denso em B e defina

$$v(x) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} |x - x_m|^{-\gamma}, \quad x \in B.$$

Observe que

$$\left\| |x - x_m|^{-\gamma} \right\|_{W^{1,p}(B)} \leq \left\| |x|^{-\gamma} \right\|_{W^{1,p}(B_2(0))} = C(n, p, \gamma) > 0,$$

e portanto

$$\|v\|_{W^{1,p}(B)} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \||x|^{-\gamma}\|_{W^{1,p}(B_2(0))} \leq C(n, p, \gamma) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = C(n, \gamma, p).$$

Desse modo, concluímos que $v \in W_{1,p}(B)$. Observe porém que, como o conjunto (x_m) é denso em B, a função v é ilimitada em qualquer aberto contido na bola unitária.

O exemplo acima mostra que os espaços de Sobolev podem conter funções mal comportadas. Contudo, conforme veremos nessa seção, é sempre possível obter uma função regular que está próxima de v.

Em toda essa seção $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ denota um conjunto aberto arbitrário. Lembremos que, se $\varepsilon > 0$, então

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \text{dist}\,(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

No Capítulo 1 mostramos que, se $f \in C(\Omega)$, então a função regularizada $f^\varepsilon := (\eta_\varepsilon * u)$ é de classe C^∞ em Ω_ε. Utilizando aquele mesmo argumento e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, podemos mostrar que a mesma conclusão vale com a hipótese mais fraca de que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Desse modo, se $f \in W^{k,p}(\Omega)$, então $f^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Além disso, se $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, então $f^\varepsilon \to f$ em $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, sempre que $1 \leq p < \infty$ (cf. Exercício 4.7).

As considerações acima nos permitem provar nosso primeiro resultado de aproximação. Dizemos que uma sequência $(u_m) \subset W^{k,p}(\Omega)$ converge para u em $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ quando

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(K)} = 0,$$

para todo $K \subset\subset \Omega$. Vale o seguinte resultado.

Teorema 4.12. *Se $1 \leq p < \infty$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$, então u^ε converge para u em $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$, quando $\varepsilon \to 0^+$.*

Demonstração. Dado um multi-índice α tal que $|\alpha| \leq k$, podemos usar o mesmo argumento do Capítulo 1 para verificar que, para todo $x \in \Omega_\varepsilon$, vale

$$\begin{aligned} D^\alpha u^\varepsilon(x) &= D^\alpha \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy = \int_\Omega D^\alpha_x \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha_y \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy \\ &= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)D^\alpha u(y)dy \ = (\eta_\varepsilon * D^\alpha u)\,(x), \end{aligned} .$$

em que usamos a Regra da Cadeia, a definição de derivada fraca e o fato de $y \mapsto \eta_\varepsilon(x - \cdot)$ ser uma função teste. Desse modo, concluímos que

$$D^\alpha u^\varepsilon \ = \ \eta_\varepsilon * D^\alpha u, \quad \forall\, x \in \Omega_\varepsilon.$$

Dado agora um compacto $K \subset\subset \Omega$, basta notar que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|u^\varepsilon - u\|^p_{W^{k,p}(K)} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|^p_{L^p(K)} = 0,$$

visto que $D^\alpha u^\varepsilon \to D^\alpha u$ em $L^p_{loc}(\Omega)$. □

Gostaríamos agora de fazer aproximações em $W^{k,p}(\Omega)$ e não somente aproximações locais. Para isso, necessitamos transformar as estimativas locais do último resultado em estimativas globais. Vamos então utilizar o importante conceito de partição da unidade, dado pelo resultado abaixo (cf. [1, Teorema 3.14]):

Proposição 4.13 (Partição da Unidade)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto qualquer e $\mathcal{O}$ uma família de abertos que cobrem Ω, isto é, $\Omega \subset \bigcup_{A\in\mathcal{O}} A$. Então existe uma família Ψ de funções $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tais que*

(i) $0 \le \psi(x) \le 1$, *para todo* $x \in \mathbb{R}^N$, $\psi \in \Psi$;

(ii) *se* $K \subset\subset \Omega$, *então* $\operatorname{supp}\psi \cap K \neq \varnothing$ *somente para um número finito de funções* $\psi \in \Psi$;

(iii) *para cada* $\psi \in \Psi$, *existe um aberto* $A_\psi \in \mathcal{O}$ *tal que* $\operatorname{supp}\psi \subset A_\psi$;

(iv) *se* $x \in \Omega$, *então* $\sum_{\psi\in\Psi} \psi(x) = 1$.

Provaremos abaixo que as funções de $W^{k,p}(\Omega)$ podem ser aproximada por funções de classe C^∞ em Ω.

Teorema 4.14. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $1 \le p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Então existe $(u_m) \subset C^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, é suficiente mostrar que existe $v \in C^\infty(\Omega)$ com $\|u - v\|_{k,p} < \varepsilon$. Defina os conjuntos

$$\Omega_0 = \varnothing, \qquad \Omega_j := \left\{ x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{j} \right\} \cap B_j(0), \quad j \in \mathbb{N},$$

de modo que $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$. Considere ainda

$$A_j := \Omega_{j+1} \backslash \overline{\Omega_{j-1}}$$

e note que $\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$.

Seja Ψ a família de funções dada pela Proposição 4.13 e observe que, para cada $j \in \mathbb{N}$, a função $\psi_j \in \Psi$ cujo suporte está contido em A_j é tal que $\psi_j u \in W^{k,p}(\Omega)$, em vista do item (iv) da Proposição 4.8. Como $\psi_j u$ tem suporte compacto em Ω, podemos utilizar o Teorema 4.12 para obter $\varepsilon_j > 0$ pequeno, de modo que a função $v_j := \eta_{\varepsilon_j} * (\psi_j u)$ satisfaça

$$\|v_j - \psi_j u\|_{k,p} < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}.$$

Defina agora

$$v(x) := \sum_{j=1}^{\infty} v_j(x), \quad x \in \Omega.$$

Dado um compacto $K \subset\subset \Omega$ arbitrário, sabemos que $\operatorname{supp} \psi_j \cap K \neq \varnothing$ somente para um número finito de índices $j \in \mathbb{B}$. Desse modo, v restrita a K é uma soma finita de funções $v_j \in C^\infty(K)$, sendo portanto C^∞ em K. Como o compacto é arbitrário concluímos que $v \in C^\infty(\Omega)$. Além disso, lembrando que $\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x) = 1$, temos que

$$\begin{aligned} \|v - u\|_{k,p} &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} v_j - u \right\|_{k,p} = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} v_j - \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j u \right\|_{k,p} \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \|v_j - \psi_j u\|_{k,p} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} = \varepsilon, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Em muitos trabalhos antigos encontra-se a definição do espaço $H^{k,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de C^∞ com respeito à norma $\|\cdot\|_{k,p}$. O teorema acima diz precisamente que $H^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$. O resultado foi provado em 1964 por Meyers e Serrin [12], em um artigo cujo título é simplesmente "$H = W$". Esse trabalho foi muito importante porque unificou a notação dos espaços de funções que vinham sendo utilizados pelos matemáticos.

Uma questão interessante é se podemos fazer aproximações por funções que são regulares até o fecho de Ω. Isso pode ser feito desde que Ω tenha um pouco de regularidade. Mais especificamente, vale o seguinte resultado:

Teorema 4.15. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1, $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Então existe $(u_m) \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que $u_m \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$.*

A demonstração do resultado acima pode ser encontrada em [5, Teorema 3, Seção 5.3.3]. Ele vale com condições mais fracas de regularidade sobre Ω. Mais especificamente, o que precisa é que Ω satisfaça a propriedade do segmento, que é a seguinte: para cada $x \in \partial\Omega$ existe um aberto A_x e um vetor não nulo y_x tal que $x \in A_x$ e $z + ty_x \in \Omega$, sempre que $z \in \overline{\Omega} \cap A_x$ e $0 < t < 1$. A prova do resultado de densidade com essa condição mais fraca pode ser encontrada em [1, Teorema 3.18].

Finalizamos essa seção observando que os dois resultados acima podem ser falsos se $p = \infty$. No que se refere ao primeiro, basta considerar a função $u : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $u(x) = |x|$.

Nesse caso $u \in W^{1,\infty}(-1,1)$, mas u não pode ser aproximada por funções de classe $C^\infty(-1,1)$. Com relação ao último teorema, consideramos $\Omega := (-1,0) \cup (0,1)$ e $v : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$v(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } -1 < x < 0, \\ x, & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Então $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$ não pode ser aproximada por funções de classe $C^\infty(\overline{\Omega})$. Deixamos a cargo do leitor a verificação dos detalhes de ambos os exemplos (cf. Exercícios 4.17 e 4.18).

4.4 Imersões dos espaços $W^{k,p}$

Já havíamos observado que $C_0^\infty(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$. Nessa seção, estamos interessados em determinar espaços intermediários, que se localizem entre $W^{k,p}(\Omega)$ e $L^p(\Omega)$. A exposição inicial será dividida em dois casos distintos, dependendo do valor de p. Antes porém, um texto motivacional que é uma livre tradução de [13, pg. 186]:

> "Os primeiros resultados de imersão relacionados aos espaços de Sobolev foram estabelecidos por S.L. Sobolev nas décadas de 1920 e 1930, em conexão com problemas de física matemática. Esses resultados e suas numerosas generalizações encontraram aplicações importantes no estudo de três questões básicas relacionadas a equações diferenciais parciais com condições de contorno:
>
> (a) existência de solução para o problema
>
> (b) regularidade das soluções (ou seja, encontrar o menor espaço de função possível ao qual as soluções pertencem; geralmente se começa com um espaço de Sobolev apropriado que é mais adequado ao problema)
>
> (c) a questão da unicidade e dependência contínua de soluções em parâmetros iniciais e multiplicidade de soluções.
>
> Acontece que essas questões estão intimamente relacionadas entre si. Por exemplo, se alguém é capaz de provar a regularidade das soluções (antes mesmo de sabermos que existe alguma), então a solubilidade do problema é em muitas situações quase uma consequência imediata. A regularidade das soluções significa que elas estão contidas em um bom espaço de funções, com um limite adequado nesta norma. Obviamente, quanto menor o espaço funcional (no sentido de inclusão), melhor a regularidade. A escolha de um espaço de Sobolev no qual um problema de valor de contorno é interpretado é de grande importância no estudo de sua solubilidade. Usando regularidade de soluções, muitas vezes é possível explorar imersões compactas de espaços de Sobolev em espaços de Lebesgue."

4.4.1 O caso $p < n$

Vamos supor que $1 \leq p < n$ e, para motivar a exposição, tentar obter uma estimativa do tipo

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\, u \in C_0^1(\mathbb{R}^n), \tag{4.7}$$

com $C > 0$ independente de u e $q > 1$. Considere $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ com $\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \neq 0$ e defina, para $\lambda > 0$, a função

$$u_\lambda(x) := u(\lambda x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

A mudança de variáveis $u = \lambda x$ nos fornece

$$\|u_\lambda\|_q^q = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q \mathrm{d}x = \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda(y)|^q \mathrm{d}y$$

e

$$\begin{aligned} \|\nabla u_\lambda(x)\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(\lambda x)|^p \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\lambda(x)\lambda|^p \mathrm{d}x \\ &= \lambda^p \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(\lambda x)|^p \mathrm{d}x = \lambda^{p-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(y)|^p \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Suponha que a desigualdade (4.7) vale para alguma constante $C > 0$. Então

$$\left(\lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\lambda^{p-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(y)|^p \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}},$$

isto é,

$$\lambda^{\frac{-n}{q}} \|u\|_q \leq C\lambda^{\frac{p-n}{p}} \|\nabla u\|_p,$$

ou ainda

$$\|u\|_q \leq C\lambda^{\frac{p-n}{p}+\frac{n}{q}} \|\nabla u\|_p,$$

qualquer que seja $\lambda > 0$.

Se $(p-n)/p + n/q > 0$ a desigualdade acima nos fornece uma contradição quando $\lambda \to 0^+$. Do mesmo modo, fazendo $\lambda \to \infty$, percebemos que não pode ocorrer $(p-n)/p + n/q < 0$. Desse modo, para que valha (4.7) devemos ter

$$\frac{p-n}{p} + \frac{n}{q} = 0,$$

ou equivalentemente,

$$q = p^* := \frac{np}{n-p}.$$

O número p^* acima é conhecido como *expoente crítico de Sobolev.*

No nosso próximo resultado, vamos responder afirmativamente a pergunta feita no início da seção.

Lema 4.16 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)**.** *Se* $1 \leq p < n$, *então existe* $C = C(n,p) > 0$ *tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\, u \in C_0^1(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Vamos considerar primeiro o caso $p = 1$ e escrever, no que segue, $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Como u tem suporte compacto, para cada $1 \leq i \leq n$, vale

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n)\, \mathrm{d}y_i$$

e, portanto,

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n)|\, \mathrm{d}y_i,$$

o que implica que

$$|u(x)|^{n/(n-1)} \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, \mathrm{d}y_i \right)^{1/(n-1)}.$$

Integrando a expressão acima com respeito à variável x_1, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^{n/(n-1)}\, \mathrm{d}x_1 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, \mathrm{d}y_i \right)^{1/(n-1)} \mathrm{d}x_1 \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\, \mathrm{d}y_1 \right)^{1/(n-1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\, \mathrm{d}y_i \right)^{1/(n-1)} \mathrm{d}x_1. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Lembremos agora que, se $f_1, ..., f_j$ são tais que $f_i \in L^{r_i}(\mathbb{R})$, $i = 1, ..., j$ e $\sum_{i=1}^{j} 1/r_i = 1$, então a desigualdade de Hölder generalizada se escreve como

$$\int_{\mathbb{R}} |f_1 f_2 \cdots f_j| \leq \|f_1\|_{L^{r_1}(\mathbb{R})} \cdots \|f_j\|_{L^{r_j}(\mathbb{R})}.$$

Aplicando esse resultado em (4.8) com $j = n-1$, $r_i = n-1$ e $f_i = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u| \mathrm{d}y_{i+1} \right)^{1/(n-1)}$, $i = 1, ..., n-1$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^{n/(n-1)}\, \mathrm{d}x_1 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\, \mathrm{d}y_1 \right)^{1/(n-1)} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\, \mathrm{d}y_i\, \mathrm{d}x_1 \right)^{1/(n-1)}.$$

Agora, integrando com respeito a x_2, concluímos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^{n/(n-1)}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_2\right)^{1/(n-1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1, i\neq 2}^{n} F_i^{1/(n-1)}\,\mathrm{d}x_2,$$

onde

$$F_1 := \int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\,\mathrm{d}y_1 \quad \text{e} \quad F_i := \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_i, \quad i = 3, 4, ..., n.$$

Aplicando Hölder novamente, vem

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^{n/(n-1)}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \quad &\leq \quad \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}y_2\right)^{1/(n-1)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}x_2\right)^{1/(n-1)} \\ &\quad \times \prod_{i=3}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y_i\right)^{1/(n-1)}.\end{aligned}$$

Continuando esse processo obtemos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^{n/(n-1)}\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n &\leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n\right)^{1/(n-1)} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|\,\mathrm{d}x\right)^{1/(n-1)},\end{aligned}$$

em que, na desigualdade acima, escrevemos $\mathrm{d}x_i$ no lugar de $\mathrm{d}y_i$. Segue então que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{n/(n-1)}\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\,\mathrm{d}x\right)^{n/(n-1)},$$

ou ainda,

$$\left(\int |u|^{n/(n-1)}\right)^{(n-1)/n} \leq \int |\nabla u|,$$

o que estabelece o lema no caso $p = 1$.

Para o caso $1 < p < n$ vamos aplicar a desigualdade acima para $|u|^\gamma$ com $\gamma > 1$ a ser escolhido posteriormente. Como $\nabla(|u|^\gamma) = \gamma|u|^{\gamma-2}u\nabla u$, obtemos

$$\left(\int |u|^{\gamma n/(n-1)}\right)^{(n-1)/n} \leq \gamma \int |u|^{\gamma-1}|\nabla u|.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder com expoentes p e $p' = p/(p-1)$, obtemos

$$\left(\int |u|^{\gamma n/(n-1)}\right)^{(n-1)/n} \leq \gamma \left(\int |u|^{(\gamma-1)p/(p-1)}\right)^{(p-1)/p} \left(\int |\nabla u|^p\right)^{1/p}.$$

Vamos agora escolher γ de modo que

$$\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma - 1)\frac{p}{p-1},$$

isto é,

$$\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p} > p > 1.$$

Com essa escolha, a última desigualdade se torna

$$\left(\int |u|^{\gamma n/(n-1)}\right)^{(n-1)/n-(p-1)/p} \leq \gamma \left(\int |\nabla u|^p\right)^{1/p}.$$

Mas,

$$\gamma \frac{n}{n-1} = \frac{p(n-1)}{n-p} \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{np}{n-p} = p^*$$

e

$$\frac{n-1}{n} - \frac{p-1}{p} = \frac{pn - p - np + n}{np} = \frac{n-p}{np} = \frac{1}{p^*},$$

e portanto,

$$\left(\int |u|^{p^*}\right)^{1/p^*} \leq \frac{p(n-1)}{n-p} \left(\int |\nabla u|^p\right)^{1/p},$$

de modo que o lema vale para $C = p(n-1)/(n-p)$. □

Gostaríamos agora de estender o resultado do último lema para funções em $W^{1,p}(\Omega)$. Vamos considerar inicialmente um caso mais simples, em que a função u é tal que existe uma sequência $(u_m) \subset C_0^\infty(\Omega)$ satisfazendo $u_m \to u$ *em* $W^{1,p}(\Omega)$. Como u_m tem suporte compacto em Ω podemos estendê-la para todo o $\mathbb{R}^n$ simplesmente fazendo $u_m|_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} \equiv 0$. Observe que essa extensão não afeta a regularidade de u_m, de modo que podemos aplicar o último lema para obter

$$\|u_m\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|\nabla u_m\|_{L^p(\Omega)}. \tag{4.9}$$

Aplicando o Lema 4.16 para $u_m - u_l$ e lembrando que $\nabla u_m \to \nabla u$ em $L^p(\Omega)^n$, concluímos que $(u_m) \subset L^{p^*}(\Omega)$ é uma sequência de Cauchy em $L^{p^*}(\Omega)$. Logo $u_m \to v$ em $L^{p^*}(\Omega)$. Como $u_m \to u$ em $L^p(\Omega)$ devemos ter $u = v$, isto é, $u_m \to u$ em $L^{p^*}(\Omega)$. Assim, passando (4.9) ao limite obtemos

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \tag{4.10}$$

Concluímos então que o Lema 4.16 vale para toda função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ que é limite de funções de classe C^∞ com suporte compactamente contido em Ω. Isso motiva a seguinte definição.

Definição 4.17. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. O espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$ é definido como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma $\| \cdot \|_{k,p}$, i.e.,*

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p}}.$$

De acordo com a definição, $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ se, e somente se, existe uma sequência $(u_m) \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$. Observe que $W_0^{k,p}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $W^{k,p}(\Omega)$. Veremos posteriormente que, num certo sentido, as funções $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ são as funções de $W^{k,p}(\Omega)$ que "se anulam" no bordo de Ω. Antes, vejamos uma interessante extensão do Lema 4.16 para as funções de $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Teorema 4.18. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $1 \leq p < n$. Então, para todo $q \in [1, p^*]$, existe $C = C(n, p, q, |\Omega|) > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \qquad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. Conforme vimos antes da definição $W_0^{1,p}(\Omega)$, o resultado vale quando $q = p^*$. Para o caso em que $q \in [1, p^*)$ basta usar Hölder para obter

$$\int |u|^q \leq \left(\int |u|^{p^*} \right)^{q/p^*} |\Omega|^{(p^*-q)/p^*},$$

o que mostra que a imersão $L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínua para todo $q \in [1, p^*]$. Desse modo,

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_q \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \tilde{C} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

o que conclui a prova do teorema. □

Destacamos abaixo um importante caso particular do resultado acima.

Corolário 4.19 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é limitado e $1 \leq p < n$. Então existe $C = C(n, p, |\Omega|) > 0$ tal que,*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Observação 4.20. Uma consequência importante do resultado acima é que podemos definir em $W_0^{1,p}(\Omega)$ a seguinta norma

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \right)^{1/p} = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \tag{4.11}$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Para ver isso observe que, se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} &= \int_\Omega |\nabla u|^p \\ &\leq \|u\|^p_{1,p} = \int_\Omega |u|^p + \int_\Omega |\nabla u|^p \\ &\leq (C^p + 1) \int_\Omega |\nabla u|^p = C_1 \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Assim, $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso, essa norma é equivalente à norma usual $\|\cdot\|_{1,p}$. Note que a expressão (4.11) não define uma norma em $W^{1,p}(\Omega)$. De fato, basta notar que, quando Ω é limitado, a função não nula $u \equiv 1$ está em $W^{1,p}(\Omega)$ mas $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 0$.

Como consequência imediata do Teorema 4.18 e da observação acima temos o seguinte resultado.

Teorema 4.21 (Imersão de $W_0^{1,p}$, $1 \leq p < n$)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $1 \leq p < n$. Então vale a imersão*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad \forall\, q \in [1, p^*]\,.$$

Ressaltamos nesse ponto que a desigualdade de Poincaré (e portanto o teorema acima) pode não valer se Ω é ilimitado (cf. Exercício 4.28). Contudo, pode-se mostrar que ela vale se Ω é limitado em uma direção. Em particular temos a imersão acima no caso em que $\Omega \subseteq (a,b) \times \mathbb{R}^{n-1}$, com $a, b \in \mathbb{R}$ (veja [13, Teorema 5.5.1]).

Observe que o ponto fundamental para a prova de (4.10) para funções de $W_0^{1,p}(\Omega)$ foi usar um processo de aproximação por funções em $C_0^\infty(\Omega)$. Uma vez que toda função de $W_0^{1,p}(\Omega)$ é limite de funções desse tipo, seria natural supor que as funções de $W_0^{1,p}(\Omega)$ se anulam na fronteira de $\partial\Omega$. Contudo, essa afirmação não faz sentido visto que $\partial\Omega$ tem medida n-dimensional de Lebesgue nula e que funções no espaço de Sobolev são sempre definidas a menos de conjuntos de medida nula.

No entanto, quando Ω é limitado e de classe C^1, sabemos que toda função de $W^{1,p}(\Omega)$ pode ser aproximada por funções $u_m \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Note que faz sentido falar dos valores de u_m em $\partial\Omega$. É possível então introduzir um operador que nos permite falar dos valores de fronteira de uma função no espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$. Mais especificamente, vale o seguinte resultado, cuja prova pode ser encontrada em [5, Teorema 1, Seção 5.5].

Teorema 4.22 (Teorema do Traço)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1 e $1 \leq p < \infty$. Então existe um operador linear limitado*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$$

tal que,

(i) $Tu = u_{|\partial\Omega}$ *se* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$;

(ii) *existe* $C = C(p, \Omega) > 0$ *tal que*

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \qquad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega).$$

O operador acima é chamado *operador traço*. Conforme dito anteriormente, ele nos permite identificar Tu como sendo os valores na fronteira de uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$. É importante ressaltar que a existência desse operador está ligada com o fato das funções de $W^{1,p}(\Omega)$ possuirem derivada fraca. Conforme pode ser visto no Exercício 4.23, uma construção semelhante não pode ser feita de $L^p(\Omega)$ em $L^p(\partial\Omega)$. Assim, não existe uma maneira natural de falar dos valores de fronteira de uma função $u \in L^p(\Omega)$.

Suponha que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e seja $(u_m) \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Como o operador traço é contínuo temos que

$$Tu = \lim_{m\to\infty} Tu_m = 0.$$

Desse modo, $W_0^{1,p}(\Omega) \subset \ker T$. Um argumento mais sofisticado mostra que a recíproca é verdadeira, isto é, vale o seguinte resultado (cf. [5, Teorema 2, Seção 5.5]), que justifica a afirmação de que as funções de $W_0^{1,p}(\Omega)$ valem zero no bordo de $\partial\Omega$

Teorema 4.23 (Caracterização de $W_0^{1,p}$ em relação ao traço). *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado de classe* C^1 *e* $1 \leq p < \infty$. *Então* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *se, e somente se,* $Tu = 0$ *em* $\partial\Omega$.

No que segue vamos tentar provar um resultado análogo ao Teorema 4.21 para o espaço $W^{1,p}(\Omega)$. Observe que agora as funções podem não ter traço igual a zero e portanto o argumento de extensão utilizado na prova de (4.10) não se aplica mais.

Uma ideia seria estender uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ simplesmente fazendo $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Contudo, isso pode criar descontinuidades na fronteira de Ω, de modo que a função estendida pode nem possuir derivada fraca.

O próximo resultado mostra que, se Ω é regular, então é possível estender as funções de $W^{1,p}(\Omega)$ de modo que a função estendida pertença a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Diferentemente do Lema 4.16, o resultado de extensão abaixo vale para $1 \leq p \leq \infty$.

Teorema 4.24 (Teorema de extensão). *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado de classe* C^1, $1 \leq p \leq \infty$ *e* $\widetilde{\Omega} \subset R^n$ *um aberto tal que* $\Omega \subset\subset \widetilde{\Omega}$. *Existe um operador linear limitado*

$$E : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

tal que, para todo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, *vale*

(i) $(Eu)(x) = u(x)$ *q.t.p. em* Ω;

(ii) *supp* $Eu \subset \widetilde{\Omega}$;

(iii) *existe* $C = C(p, \Omega, \widetilde{\Omega}) > 0$ *tal que*

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

A demonstração do resultado acima pode ser encontrada em [5, Teorema 1, Seção 5.4]. Para uma versão mais geral, com menos exigência de regularidade no bordo, veja [1, Teorema 4.2.6]. O operador E acima é chamado *operador de prolongamento*. Pode-se mostrar que o mesmo resultado vale se $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ ou se o complementar de Ω for um aberto limitado de classe C^1.

Usando o operador de prolongamento, podemos provar o seguinte resultado.

Teorema 4.25 (Imersão de $W^{1,p}$, $1 \leq p < n$)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado e* $1 \leq p < n$. *Então vale a imersão*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad \forall\, q \in [1, p^*]\,.$$

Demonstração. Vamos considerar primeiro o caso $q = p^*$ e obter uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$, B uma bola tal que $\Omega \subset\subset B$ e considere $\bar{u} := Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ a extensão de u dada pelo teorema acima. Uma vez que o suporte de $\bar{u}$ está contido na bola, existe uma sequência $(u_m) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$u_m \to \bar{u} \quad \text{ em } W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Segue do Lema 4.16 que

$$\|u_m - u_l\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1\|\nabla u_m - \nabla u_l\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Como (u_m) converge em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ concluímos que o lado direito da expressão acima tende a zero quando $l, m \to \infty$. Desse modo $(u_m) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ é uma sequência de Cauchy, e portanto

$$u_m \to \bar{u} \quad \text{ em } L^{p^*}(\mathbb{R}^n).$$

Logo passando a expressão

$$\|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1\|\nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

ao limite e usando o Teorema 4.24 obtemos

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \|Eu\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1\|\nabla(Eu)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_1\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

onde a constante $C = C(n, p, \Omega) > 0$ é independente de u.

Considere agora $1 \leq q < p^*$. Conforme visto na prova do Teorema 4.18 temos a imersão contínua $L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$. Logo

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

o que conclui a demonstração. □

Observação 4.26. Um ponto que merece destaque é que a imersão de $W_0^{1,p}(\Omega)$, diferente daquela de $W^{1,p}(\Omega)$, não exige regularidade da fronteira de $\partial\Omega$. Isso ocorre porque, no caso de $W_0^{1,p}(\Omega)$, não precisamos usar o operador de prolongamento.

O argumento final da demonstração acima pode ser ligeiramente adaptado para provar imersões para domínios mais gerais, inclusive ilimitados. Um exemplo pode ser visto no resultado abaixo.

Teorema 4.27. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é tal que a imersão $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ é contínua, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \in [p, p^*]$, independente de Ω ser limitado ou regular.*

Demonstração. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então $u \in L^p(\Omega) \cap L^{p^*}(\Omega)$. Fixado $q \in (p, p^*)$ podemos usar as desigualdades $1/p^* < 1/q < 1/p$ para obter $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{1}{q} = (1-\theta)\frac{1}{p} + \theta\frac{1}{p^*}$$

Segue então da desigualdade de Hölder que

$$\int_\Omega |u|^q = \int_\Omega |u|^{\theta q}|u|^{(1-\theta)q} \leq \left(\int_\Omega |u|^{\theta q \frac{p^*}{\theta q}}\right)^{\frac{\theta q}{p^*}} \left(\int_\Omega |u|^{(1-\theta)q\frac{p}{(1-\theta)q}}\right)^{\frac{(1-\theta)q}{p}},$$

isto é,

$$\|u\|_q \leq \|u\|_{p^*}^\theta \|u\|_p^{1-\theta}$$

A desigualdade acima é conhecida como *desigualdade de interpolação*. Lembrando agora que estamos supondo $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ e usando a definição de $\|\cdot\|_{1,p}$, obtemos

$$\|u\|_q \leq C_1\|u\|_{1,p}^\theta \|u\|_p^{1-\theta} \leq C\|u\|_{1,p}^\theta \|u\|_{1,p}^{1-\theta} = C\|u\|_{1,p}, \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Desse modo, vale a imersão $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$. □

4.4.2 O caso $p \geq n$

Observe que o Teorema 4.25 considera o caso em que $1 \leq p < n$. Uma vez que $p^* = np/(n-p) \to \infty$ quando $p \to n^-$, poderíamos pensar que $W^{1,n}(\Omega) \subset L^\infty$. Conforme podemos ver pelo Exercício 4.16, isso não é verdade em geral. No entanto, podemos usar o Teorema 4.25 para considerar o caso $p = n$ como segue.

Teorema 4.28 (Imersão de $W^{1,n}$)**.** *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de classe C^1, então vale a imersão*

$$W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad \forall\, q \geq 1.$$

Demonstração. Suponha que $n > 1$ e considere $q \geq 1$ fixado. Usando a definição de expoente crítico de Sobolev obtemos

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} (n-\varepsilon)^* = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{n(n-\varepsilon)}{n-(n-\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{n(n-\varepsilon)}{\varepsilon} = \infty.$$

Desse modo, para $\varepsilon > 0$ pequeno, devemos ter $(n-\varepsilon)^* > q$. É suficiente agora observar que

$$W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,n-\varepsilon} \hookrightarrow L^{(n-\varepsilon)^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

o que prova o resultado. No caso 1-dimensional as funções d $W^{1,n}(\Omega)$ são de fato absolutamente contínuas e portando o resultado segue imediantamente (cf. Exercício 4.30). □

Vamos considerar o caso $p > n$. Começaremos com o seguinte lema:

Lema 4.29. *Se $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, então*

$$\int_{B_r(x)} |u(y) - u(x)| dy \leq \frac{r^n}{n} \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy.$$

Demonstração. Fixados $w \in \partial B_1(0)$ e $0 < s < r$, temos que

$$\begin{aligned} |u(x+sw) - u(x)| &= \left| \int_0^s \frac{d}{dt} u(x+tw)\, \mathrm{d}t \right| \\ &= \left| \int_0^s \nabla u(x+tw) \cdot w\, \mathrm{d}t \right| \\ &\leq \int_0^s |\nabla u(x+tw)|\, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_1(0)} |u(x+sw)-u(x)|\,\mathrm{d}S_w &\leq \int_{\partial B_1(0)} \left(\int_0^s |\nabla u(x+tw)|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}S_w \\
&= \int_0^s \left(\int_{\partial B_1(0)} |\nabla u(x+tw)|\,\mathrm{d}S_w\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^s \left(\int_{\partial B_t(x)} |\nabla u(y)|\frac{1}{t^{n-1}}\,\mathrm{d}S_y\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^s \left(\int_{\partial B_t(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|y-x|^{n-1}}\,\mathrm{d}S_y\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{B_s(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

e portanto

$$\int_{\partial B_1(0)} |u(x+sw)-u(x)|\,\mathrm{d}S_w \leq \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,\mathrm{d}y.$$

Multiplicando por s^{n-1} e integrando, com respeito a s, no intervalo $[0,r]$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{r^n}{n}\int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,\mathrm{d}y &\geq \int_0^r \left(\int_{\partial B_1(0)} |u(x+sw)-u(x)|\,\mathrm{d}S_w\right) s^{n-1}\mathrm{d}s \\
&= \int_0^r \left(\int_{\partial B_s(x)} \frac{|u(y)-u(x)|}{s^{n-1}}\,\mathrm{d}S_y\right) s^{n-1}\mathrm{d}s \\
&= \int_{B_r(x)} |u(y)-u(x)|\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

o que conclui a prova do lema. □

Lema 4.30 (Desigualdade de Morey)**.** *Se $n < p \leq \infty$ e $\gamma = 1-(n/p) \in (0,1)$, então existe $C = C(n,p) > 0$ tal que,*

$$||u||_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C||u||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}, \qquad \forall\, u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)\cap C^1(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Seja $n < p < \infty$ e $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)\cap C^1(\mathbb{R}^n)$. Como

$$|u(x)| = |u(x)-u(y)+u(y)| \leq |u(x)-u(y)| + |u(y)|,$$

podemos integrar com relação a y, para obter

$$\int_{B_1(x)} |u(x)|\,\mathrm{d}y \leq \int_{B_1(x)} |u(x)-u(y)|\,\mathrm{d}y + \int_{B_1(x)} |u(y)|\,\mathrm{d}y,$$

ou ainda
$$|u(x)| \leq \frac{1}{\omega_n}\int_{B_1(x)} |u(x)-u(y)|\,\mathrm{d}y + \frac{1}{\omega_n}\int_{B_1(x)} |u(y)|\,\mathrm{d}y.$$
Aplicando agora o lema anterior e lembrando que $L^p(B_1(x)) \hookrightarrow L^1(B_1(x))$, vem

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq C_1 \int_{B_1(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,\mathrm{d}y + C_2||u||_{L^1(B_1(x))} \\ &\leq C_1 \int_{B_1(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,\mathrm{d}y + C_3||u||_{L^p(B_1(x))}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Vamos usar a desigualdade de Hölder para estimar a integral do lado direito acima. Seja então $p' = p/(p-1)$ o expoente conjugado de p e observe que

$$\int_{B_1(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,\mathrm{d}y \leq \left(\int_{B_1(x)} |\nabla u(y)|^p\,\mathrm{d}y\right)^{1/p} \left(\int_{B_1(x)} \frac{1}{|x-y|^{(n-1)p/(p-1)}}\,\mathrm{d}y\right)^{(p-1)/p}. \tag{4.13}$$

A primeira integral do lado esquerdo acima é finita porque $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Para ver que a segunda também é finita basta notar que

$$\int_{B_1(x)} \frac{1}{|x-y|^{(n-1)p/(p-1)}}\,\mathrm{d}y = \int_{B_1(0)} |w|^{-(n-1)p/(p-1)}\,\mathrm{d}w$$

e lembrar que $\int_{B_1(0)} |w|^{-\gamma}\mathrm{d}w < \infty$ se, e somente se, $\gamma < n$. Quando $\gamma = (n-1)p/(p-1)$ esta condição de integrabilidade é exatamente $n < p$, que é o caso que estamos considerando. Dessa forma
$$\int_{B_1(x)} \frac{1}{|x-y|^{(n-1)p/(p-1)}}\,\mathrm{d}y = C(n,p) = C < \infty.$$
Substituindo a igualdade acima e (4.13) em (4.12), concluímos que

$$|u(x)| \leq C_1 C^{(p-1)/p}\|u\|_{L^p(B_1(x))} + C_3||u||_{L^p(B_1(x))} \leq C_4\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

e portanto
$$||u||_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq C_4||u||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.14}$$
A fim de estimar $H_\gamma[u]$ procedemos como segue: escolha $x, y \in \mathbb{R}^n$ com $x \neq y$ e faça

$$r := |x-y|, \qquad \Omega := B_r(x) \cap B_r(y).$$

Observe que para todo $z \in \mathbb{R}^n$,

$$|u(x)-u(y)| \leq |u(x)-u(z)| + |u(z)-u(y)|$$

e portanto podemos integrar em Ω com respeito a z para obter

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |u(x) - u(z)|\,\mathrm{d}z + \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |u(z) - u(y)|\,\mathrm{d}z, \tag{4.15}$$

em que $|\Omega|$ denota a medida de Lebesgue do conjunto Ω. Como $B_{r/2}(\frac{x+y}{2}) \subseteq \Omega$ temos que

$$|\Omega| \geq \left| B_{\frac{r}{2}}\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| = \omega_n \left(\frac{r}{2}\right)^n.$$

Logo, podemos usar o lema anterior e a desigualdade de Hölder como há pouco, para obter

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |u(x) - u(z)|\,\mathrm{d}z &\leq \frac{2^n}{\omega_n r^n}\int_{B_r(x)} |u(x) - u(z)|\,\mathrm{d}z \\
&\leq \frac{2^n}{n\omega_n}\int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(z)|}{|x-z|^{n-1}}\,\mathrm{d}z \\
&\leq C_5(n)\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\left(\int_{B_r(0)} |w|^{-(n-1)p/(p-1)}\,\mathrm{d}w\right)^{(p-1)/p}.
\end{aligned}$$

Mas

$$\int_{B_r(0)} |w|^{-(n-1)p/(p-1)}\,\mathrm{d}w = \int_0^r \int_{\partial B_s(0)} |w|^{-(n-1)p/(p-1)}\,\mathrm{d}S_w\,\mathrm{d}s = C_6(n,p)r^{(p-n)/(p-1)}.$$

Assim,

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |u(x) - u(y)|\,\mathrm{d}z \leq C_7 r^{1-n/p}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

A expressão acima e (4.15) implicam que

$$|u(x) - u(y)| \leq 2C_7 r^{1-n/p}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_8 r^{1-n/p}\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Como $r = |x-y|$ e $\gamma = 1 - n/p$, concluímos que

$$H_\gamma[u] \leq C_8\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Isso, juntamente com (4.14), mostra que

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C_9(n,p)\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

o que conclui a prova no caso em que $n < p < \infty$.

Para o caso $p = \infty$, basta usar a definição da norma em $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ e o Teorema do Valor Médio. Os detalhes são deixados a cargo do leitor (cf. Exercício 4.19). □

Usando o lema acima e argumentando como na prova do Teorema 4.25 podemos provar o seguinte (cf. Exercício 4.20).

Teorema 4.31 (Imersão de $W^{1,p}$, $n < p$)**.** *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de classe C^1, então vale a imersão*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega}).$$

É importante nesse ponto entender o significado da imersão acima. Lembre que as funções de $W^{1,p}(\Omega)$, por pertencerem ao espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$, são definidas a menos de conjuntos de medida nula. Sendo assim, o teorema acima diz que, se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ com $n < p$, então existe $u^* \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^{0,1-n/p}(\overline{\Omega})$ tal que

$$u(x) = u^*(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Um outro ponto que merece destaque é que a imersão acima também vale se $p = +\infty$. Nesse caso, mostra-se que $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ se, e somente se, u é Lipschitziana em Ω (cf. [5, Teorema 4, Seção 5.8])

Os resultados de imersão apresentado até agora podem ser sumarizados como segue: se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de classe C^1 então

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^q(\Omega), \ 1 \leq q \leq p^* = \frac{np}{n-p}, \text{ se } 1 \leq p < n, \\ L^q(\Omega), \ q \geq 1, \quad \text{se } p = n, \\ C^{0,1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega}), \quad \text{se } p > n. \end{cases}$$

Vamos agora considerar imersões para o espaço $W^{2,p}(\Omega)$. Suponha inicialmente que $1 \leq p < n$ e seja $u \in W^{2,p}(\Omega)$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sendo um aberto limitado de classe C^1. Note que, para cada $i = 1, \ldots, n$, vale

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega).$$

Uma vez que $u \in W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, concluímos que $u \in W^{1,p^*}(\Omega)$. Vamos supor adicionalmente que $1 \leq p^* < n$, isto é, que $2p < n$. Nesse caso

$$W^{1,p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^{(p^*)^*}(\Omega),$$

onde

$$(p^*)^* = \frac{np^*}{n - p^*} = \frac{np}{n - 2p}.$$

Concluímos então que, se $2p < n$, vale a seguinte imersão

$$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-2p}}(\Omega).$$

O caso $n \leq 2p$ pode ser tratado de maneira análoga. Iterando esse processo obtemos o seguinte resultado de imersão.

Teorema 4.32 (Imersão de $W^{k,p}$)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1, $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então,*

(i) *se $kp < n$*
$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$
para todo $1 \leq q \leq \frac{np}{n-kp}$;

(ii) *se $kp = n$*
$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$
para todo $q \geq 1$;

(iii) *se $kp > n$*
$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\overline{\Omega}),$$
onde
$$\gamma = \begin{cases} [\frac{n}{p}] + 1 - \frac{n}{p}, & se\ \frac{n}{p} \notin \mathbb{Z}, \\ \textit{qualquer número pertencente a } (0,1), & se\ \frac{n}{p} \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$
e $[n/p]$ é o maior inteiro que é menor ou igual a n/p.

O teorema continua válido se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto qualquer (possivelmente ilimitado) de classe C^1 com a restrição $q \geq p$ nos dois primeiros itens (cf. [1, Teorema 5.4]).

4.5 Imersões compactas de $W^{k,p}$

Como no caso dos espaços de Hölder, podemos obter imersões compactas dos espaços de Sobolev $W^{k,p}$, conforme nos diz o resultado seguinte.

Teorema 4.33 (Rellich-Kondrachov)**.** *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de classe C^1.*

(i) *Se $1 \leq p < n$ e $1 \leq q < p^*$, então*
$$W^{1,p}(\Omega) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} L^q(\Omega).$$

(ii) *Se $p = n$ e $q \geq 1$, então*
$$W^{1,p}(\Omega) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} L^q(\Omega).$$

(iii) *Se $n < p$ e $0 < \gamma < 1 - (n/p)$, então*
$$W^{1,p}(\Omega) \overset{cpct.}{\hookrightarrow} C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}).$$

Além disso, as imersões de $W_0^{1,p}(\Omega)$ nos espaços acima são sempre compactas, independentemente da regularidade de Ω.

Demonstração. Consideremos primeiro o caso $1 \leq p < n$. Fixado $1 \leq q < p^*$, seja $(u_m) \subset W^{1,p}(\Omega)$ uma sequência limitada. Usando o operador de prolongamento, podemos supor que u_m está definida em todo o $\mathbb{R}^n$ e tem o seu suporte contido em uma bola B tal que $\Omega \subset\subset B$. Além disso, para algum $M > 0$, vale

$$\|u_m\|_{W^{1,p}(B)} \leq M.$$

Para cada $\varepsilon > 0$, seja η_ε a função regularizante definida nos capítulos anteriores e considere $u_m^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u_m$. Podemos supor que $\varepsilon > 0$ é pequeno de modo que o suporte de cada u_m^ε está também contido em B. O teorema segue das duas afirmações abaixo

Afirmação 1: a sequência $(u_m^\varepsilon)_{m\in\mathbb{N}}$ é equicontínua e equilimitada.

Afirmação 2: $\lim_{\varepsilon\to 0^+} u_m^\varepsilon = u_m$, uniformemente em $L^q(B)$.

Vamos assumir a veracidade das duas afirmações acima e ver como o teorema segue delas.

Fixado $\delta > 0$, podemos usar a Afirmação 2 para obter $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(B)} < \frac{\delta}{4}, \quad m = 1, 2, ...$$

Agora, usando a Afirmação 1 e o Teorema de Ascoli-Arzelá, obtemos uma subsequência $(u_{m_j}^\varepsilon)_{j\in\mathbb{N}} \subset (u_m^\varepsilon)_{m\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente para u em B. Em particular, como B é limitado,

$$\limsup_{j,k\to+\infty} \|u_{m_j}^\varepsilon - u_{m_k}^\varepsilon\|_{L^q(B)} = 0.$$

Assim,

$$\|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(B)} \leq \|u_{m_j} - u_{m_j}^\varepsilon\|_{L^q(B)} + \|u_{m_j}^\varepsilon - u_{m_k}^\varepsilon\|_{L^q(B)} + \|u_{m_k}^\varepsilon - u_{m_k}\|_{L^q(B)},$$

e portanto

$$\limsup_{j,k\to+\infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(B)} < \delta.$$

Tomando agora $\delta_j = 1/j$, $j = 1, 2, \ldots$, e usando um processo diagonal obtemos uma subsequência de (u_m), que é uma sequência de Cauchy em $L^q(B)$. O resultado segue do fato do espaço $L^q(\Omega) \subset L^q(B)$ ser completo.

Resta somente mostrar as duas afirmações. Para a primeira, observe que

$$u_m^\varepsilon(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y) u_m(y)\,\mathrm{d}y = \varepsilon^{-n} \int_{B_\varepsilon(x)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u_m(y)\,\mathrm{d}y,$$

de modo que

$$|u_m^\varepsilon(x)| \leq \varepsilon^{-n}\|\eta\|_\infty \|u_m\|_{L^1(B_\varepsilon(x))} \leq C_1\varepsilon^{-n}\|u_m\|_{L^p(B)} \leq C_2\varepsilon^{-n}\|u_m\|_{W^{1,p}(B)} \leq C_2 M\varepsilon^{-n},$$

o que mostra que $(u_m^\varepsilon)_{m\in\mathbb{N}}$ é equilimitada. De maneira análoga. mostra-se que

$$|\nabla u_m^\varepsilon(x)| \leq C_3\varepsilon^{-n-1},$$

e portando a derivada das funções u_m^ε formas uma sequência equilimitada no conjunto convexo B. Segue facilmente do Teorema do Valor Médio que a sequência $(u_m^\varepsilon)_{m\in\mathbb{N}}$ é equicontínua, ficando portanto provada a primeira afirmação.

Note que agora que, se $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tem suporte contido em B, então

$$\begin{aligned} v^\varepsilon(x) &= \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)v(y)\,\mathrm{d}y = \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(z)v(x-z)\,\mathrm{d}z \\ &= \varepsilon^n \int_{B_1(0)} \eta_\varepsilon(\varepsilon y)v(x-\varepsilon y)\,\mathrm{d}y = \varepsilon^n \int_{B_1(0)} \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{|\varepsilon y|}{\varepsilon}\right) v(x-\varepsilon y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{B_1(0)} \eta(|y|)v(x-\varepsilon y)\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$ pequeno. Assim,

$$\begin{aligned} v^\varepsilon(x) - v(x) &= \int_{B_1(0)} \eta(|y|)(v(x-\varepsilon y) - v(x))\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{B_1(0)} \eta(|y|) \int_0^1 \frac{d}{dt}(v(x-t\varepsilon y))\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\ &= -\varepsilon \int_{B_1(0)} \eta(|y|) \int_0^1 \nabla v(x-t\varepsilon y)\cdot y\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \int_B |v^\varepsilon(x) - v(x)|\,\mathrm{d}x &\leq \varepsilon \int_{B_1(0)} \eta(|y|) \int_0^1 \int_B |\nabla v(x-\varepsilon t y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\ &\leq \varepsilon \int_B |\nabla v(z)|\,\mathrm{d}z, \end{aligned}$$

ou ainda

$$\|v^\varepsilon - v\|_{L^1(B)} \leq \varepsilon \int_B |\nabla v(z)|\,\mathrm{d}z. \tag{4.16}$$

Vamos usar a estimativa acima para prova a Afirmação 2. Note inicialmente que, pelo Teorema 4.15, cada função u_m pode ser aproximada por funções de $C_0^\infty(\overline{B})$ e portanto a desigualdade acima permanece válida se substituirmos v por u_m (cf. Exercício 4.29). Logo, a limitação de B e $p > 1$ implicam que

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(B)} \leq \varepsilon\|\nabla u_m\|_{L^1(B)} \leq \varepsilon C_4\|\nabla u_m\|_{L^p(B)} \leq \varepsilon C_4 M,$$

de onde se conclui que $u_m^\varepsilon \to u_m$ em $L^1(B)$, uniformemente em m. Isso prova que a Afirmação 2 é verdadeira se $q = 1$. Para o caso geral $1 < q < p^*$, argumentamos como na prova do Teorema 4.27 para obter $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned}
\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(B)} &\leq \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(B)}^{1-\theta}\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^{p^*}(B)}^{\theta} \\
&\leq C_5\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(B)}^{1-\theta}\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{W^{1,p}(B)}^{\theta} \\
&\leq C_6\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(B)}^{1-\theta}.
\end{aligned}$$

O item (i) segue agora da convergência uniforme em $L^1(B)$.

Para mostrar o item (ii) vamos considerar somente o caso $p = n > 1$, pois na reta vale um resultado mais geral cuja prova será deixada para o leitor (cf. Exercício **??**). Fixado $q \geq 1$, escolhemos $\varepsilon > 0$ pequeno de modo que $(n-\varepsilon)^* > q$. Temos então

$$W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,(n-\varepsilon)}(\Omega) \overset{\text{cpct.}}{\hookrightarrow} L^q(\Omega),$$

e o resultado segue do fato da composição de um operador contínuo com um operador compacto ser compacta. O item (iii) segue facilmente do diagrama abaixo

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1-n/p}(\overline{\Omega}) \overset{\text{cpct.}}{\hookrightarrow} C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}),$$

em que usamos os resultados sobre espaço de Hölder provados no Capítulo 2.

Para verificar que no caso de $W_0^{1,p}(\Omega)$ vale a compacidade das imersões acima sem hipóteses de regularidade em Ω procedemos como segue. Consideramos uma bola aberta B tal que $\Omega \subset\subset B$ e estendemos as funções $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para todo a bola fazendo $u \equiv 0$ em $\Omega \setminus B$. Como a bola é de classe C^1, podemos argumentar como acima para obter a compacidade das imersões. $\square$

4.6 Exercícios

Atenção: Nos exercícios abaixo, a menos que se diga o contrário, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de classe C^1.

4.1. Complete todos os detalhes da prova do Teorema 4.1

4.2. Decida para quais valores de $\gamma \in \mathbb{R}$ a função $u : B_1(0) \to \mathbb{R}$ definida por $u(x) = |x|^{-\gamma}$ possui derivada fraca.

Sugestão: o candidato natural é a derivada clássica, que pode não existir em $x = 0$. Use integração por partes em conjuntos do tipo $B_1(0) \setminus B_\varepsilon(0)$ e depois faça $\varepsilon \to 0^+$.

4.3. Sejam Ω_1, Ω_2 abertos de $\mathbb{R}^n$. Se $u_i : \Omega_i \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, possuem derivadas fracas $v_i(x) = D^\alpha u_i(x)$ em Ω_i e $u_1(x) = u_2(x)$ em $\Omega_1 \cap \Omega_2$, então a função

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x) & \text{se } x \in \Omega_1, \\ u_2(x) & \text{se } x \in \Omega_2, \end{cases}$$

possui α-ésima derivada fraca em $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

4.4. Considere a função sinal definida por

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Verifique que $\operatorname{sgn}(x)$ possui derivada clássica contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mas não possui derivada fraca em $(-a, a)$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.

4.5. Se $u : (0, 1) \to \mathbb{R}$ é contínua em $(0, 1)$, diferenciável q.t.p. em $(0, 1)$ e possui derivada fraca de primeira ordem em $(0, 1)$, então u é absolutamente contínua.

Sugestão: veja [13, Teorema 5.1.1].

4.6. Se a sequência de funções (u_m) tem derivadas fracas $v_m(x) = D^\alpha u_m(x)$ no domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $u_m \to u$ e $v_m \to v$ em $L^1(\Omega)$, então $v(x) = D^\alpha u(x)$.

4.7. Se $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, então $f^\varepsilon \to f$ em $L^p(\Omega_0)$ para todo conjunto $\Omega_0 \subset\subset \Omega$.

4.8. $W^{k,\infty}(\Omega)$ é um espaço de Banach, para cada $k \in \mathbb{N}$

4.9. As normas abaixo são equivalentes em $W^{k,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}, \quad |u|_{k,p} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p \quad \text{e} \quad |||u|||_{k,p} = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p.$$

4.10. Prove a Proposição 4.8.

4.11. Se $1 < p < \infty$ e $0 < \gamma < (n - p)/p$, então $u(x) := |x|^{-\gamma}$ está em $W^{1,p}(B_1(0))$.

4.12. Use integração por partes para provar a seguinte desigualdade de interpolação

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \leq C \left(\int_\Omega u^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |D^2 u|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2},$$

para toda função $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Usando um argumento de densidade estenda o resultado para $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$.

4.13. Use integração para obter

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x \leq C \left(\int_\Omega u^p \mathrm{d}x \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |D^2 u|^p \mathrm{d}x \right)^{1/2},$$

para $u \in C_0^\infty(\Omega)$ e em seguida estenda o resultado para $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.

Sugestão: observe que $\int_\Omega |\nabla u|^p dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i} u_{x_i} |\nabla u|^{p-2} dx$.

4.14. Se Ω é conexo e $u \in W^{1,p}(\Omega)$ é tal que $\nabla u = 0$ q.t.p. em Ω, então u é constante q.t.p. em Ω.

4.15. Obtenha $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ tal que u não é Lipschitz contínua em Ω.

4.16. Se $n > 1$ então a função $u(x) = \log\left(\log\left(1 + \frac{1}{|x|}\right)\right)$ é ilimitada em $B_1(0)$ e $u \in W^{1,n}(B_1(0))$.

4.17. Se $u(x) = |x|$, para todo $x \in \Omega = (-1,1)$, então $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, mas u não pode ser aproximada nesse espaço por funções de classe $C^\infty(\Omega)$.

Sugestão: mostre que, se $\varepsilon < 1/2$, não existe $\phi \in C^1(\Omega)$ tal que $\|u' - \phi'\|_\infty < \varepsilon$.

4.18. Se $\Omega = (-1,0) \cup (0,1)$ e

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (-1,0), \\ 1 & \text{se } x \in (0,1), \end{cases}$$

então $u \in W^{1,p}(\Omega)$ para todo $p \geq 1$, mas u não pode ser aproximada nesse espaço por funções de classe $C^1(\overline{\Omega})$.

Sugestão: veja [13, Exemplo 5.4.2].

4.19. Prova o Lema 4.30 no caso em que $p = \infty$.

4.20. Prove o Teorema 4.31.

4.21. Se $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, então $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$.

4.22. Se $r \in C^1(\overline{\Omega})$ então o operador multiplicação $u \mapsto ru$ é contínuo em $W^{1,2}(\Omega)$. Se $r > 0$ em $\overline{\Omega}$, então esse operador é um isomorfismo.

4.23. Mostre que não existe um operador linear limitado

$$T : L^p(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

tal que $Tu = u|_{\partial\Omega}$ sempre que $u \in L^p(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Sugestão: lembre que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$

4.24. Se $\Omega = B_1(0)$ e $\gamma > 0$, então existe uma constante $C = C(\gamma, n) > 0$ tal que

$$\int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x,$$

sempre que $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é tal que a medida do conjunto $\{x \in \Omega : u(x) = 0\}$ é maior ou igual a γ.

4.25. Seja $F \in C^1(\mathbb{R})$ com F' limitada, $1 \leq p \leq \infty$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então $v := F(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ com

$$v_{x_i} = F'(u) u_{x_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Verifique que o mesmo resultado vale se Ω é ilimitado e $F(0) = 0$.

Sugestão: veja [7, Lema 7.5] ou [13, Teorema 5.4.2].

4.26. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ então, $u^+, u^-, |u| \in W^{1,p}(\Omega)$. Além disso, para cada $i = 1, \ldots, n$, vale

$$\frac{\partial u^+}{\partial x_i} = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} & \text{q.t.p. em } \{u > 0\}, \\ 0 & \text{q.t.p. em } \{u \leq 0\}, \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_i} = \begin{cases} 0 & \text{q.t.p. em } \{u \geq 0\}, \\ -\dfrac{\partial u}{\partial x_i} & \text{q.t.p. em } \{u < 0\}. \end{cases}$$

Sugestão: defina $F_\varepsilon(t) = (t^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon$ para $t \geq 0$, $F_\varepsilon \equiv 0$ em $(-\infty, 0)$. Use o exercício anterior e o fato de que $F_\varepsilon(t) \to t^+$, quando $\varepsilon \to 0^+$ (cf. [7, Lema 7.6]).

4.27. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $c \in \mathbb{R}$ e $\Omega_c = \{x \in \Omega : u(x) = c\}$, então $\nabla u = 0$ q.t.p. em Ω_c.

4.28. A desigualdade de Poincaré pode ser falsa em domínios ilimitados.

Sugestão: considere $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\phi \equiv 1$ em $B_1(0)$, $\phi \equiv 0$ fora de $B_2(0)$ e $0 \leq \phi \leq 1$, e a sequência $\phi_m(x) := \phi(x/m)$.

4.29. Na prova do Teorema 4.33, podemos substituir v por u_m em (4.16).

4.30. Se $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$ para algum $1 \leq p < \infty$, então existe uma função u^* absolutamente contínua tal que $u(x) = u^*(x)$ q.t.p. em Ω. Além disso, a derivada clássica u' (que existe q.t.p. em Ω) pertence a $L^p(\Omega)$ e

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|^{1-1/p} \left(\int_a^b |u'(t)|^p \mathrm{d}t \right)^{1/p}.$$

Conclua que a imersão $W^{1,p}(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$ é compacta, o mesmo valendo para a imersão em $L^q(\Omega)$, para todo $q \geq 1$.

Sugestão: cf. [13, Exemplo 5.2.6]

4.31. A imersão $W^{1,p}(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ não é compacta.

Sugestão: tome u_1 de classe C^1 com suporte em $(0, 1)$ e $\|u_1\|_{1,p} = 1$, e considere a sequência $u_m(x) = u_1(x - m)$

Capítulo

5

Soluções fracas para equações lineares de 2a ordem

Nesse capítulo vamos considerar o problema

$$(P) \qquad \begin{cases} Lu = f, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado e a função f pode não ser regular, digamos $f \in L^2(\Omega)$. O operador L será considerado linear, de segunda ordem e na forma divergente, isto é,

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} + c(x)u. \tag{5.1}$$

Os coeficientes a^{ij}, b^i, $c \in L^\infty(\Omega)$ e vamos supor ainda que L é simétrico e uniformemente elíptico em Ω, isto é, existe $\theta_0 > 0$ tal que

$$\xi A(x) \xi = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta_0 |\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

e a matriz $A(x) = \{a^{ij}(x)\}$ é simétrica para cada $x \in \Omega$.

Uma vez que f não é regular, não podemos aplicar os resultados do Capítulo 3. Ao invés disso, vamos introduzir um conceito mais abrangente de solução e buscar soluções nos espaços de Sobolev introduzidos no capítulo anterior. Para tanto, suponha inicialmente que os coeficientes de L são suaves e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é uma solução clássica de (P). Multiplicado a equação em

(P) por $v \in C_0^\infty(\Omega)$ e integrando por partes obtemos

$$\int \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + \int \sum_{i=1}^n b^i(x) u_{x_i} v + \int c(x) uv = \int f(x) v.$$

A expressão acima vale para toda função teste. Vamos mostrar que ela também vale pra funções do espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$. De fato, se $v \in H_0^1(\Omega)$, então existe $(v_m) \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $v_m \to v$ em $H_0^1(\Omega)$. Logo,

$$v_m \to v, \qquad (v_m)_{x_j} \to v_{x_j} \qquad \text{em } L^2(\Omega), \tag{5.2}$$

para qualquer $j = 1, \ldots, n$. Como as funções v_m são regulares, vale

$$\int \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_i} (v_m)_{x_j} + \int \sum_{i=1}^n b^i(x) u_{x_i} v_m + \int c(x) u v_m = \int f(x) v_m. \tag{5.3}$$

Note agora que, usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\left| \int a^{ij}(x) u_{x_i} (v_m)_{x_j} - \int a^{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} \right| \le \|a^{ij}\|_\infty \|u_{x_i}\|_2 \|(v_m)_{x_j} - v_{x_j}\|_2$$

e portanto segue de (5.2) que

$$\lim_{m\to\infty} \int a^{ij}(x) u_{x_i} (v_m)_{x_j} = \int a^{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j}.$$

Como $f \in L^2(\Omega)$, podemos proceder de maneira análoga para mostrar que valem as seguintes convergências

$$\int b^i(x) u_{x_i} v_m \to \int b^i(x) u_{x_i} v, \quad \int c(u) u v_m \to \int c(x) uv, \quad \int f(x) v_m \to \int f(x) v.$$

Passando então a igualdade (5.3) ao limite, concluímos que ela vale para toda função $v \in H_0^1(\Omega)$. Isso motiva a seguinte definição:

Definição 5.1. *Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (P) se*

$$\int \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + \int \sum_{i=1}^n b^i(x) u_{x_i} v + \int c(x) uv = \int f(x) v, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Observe que, na igualdade acima, as derivadas que aparecem sob o sinal das integrais são as derivadas fracas das funções u e v. Uma vez que os coeficientes de L estão em $L^\infty(\Omega)$, todas as integrais acima estão bem definidas. Finalmente, note que uma solução fraca do problema pode não ter derivadas no sentido clássico. Tudo que precisa ocorrer é que a equação integral acima seja satisfeita. Desse modo, há mais chances de obter solução fraca do que solução clássica.

Para simplificar a notação, vamos no que segue denotar por $B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ a seguinte função

$$B[u,v] := \int \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + \int \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} v + \int c(x) uv. \tag{5.4}$$

Observe que B é uma forma bilinear definida em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Com essa notação, $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de (P) se, e somente se,

$$B[u,v] = \int f(x)v, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

5.1 Existência de solução

Vamos considerar inicialmente o caso $L = -\Delta$, cuja formulação fraca é a seguinte: encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$B[u,v] = \int (\nabla u \cdot \nabla v) = \int fv, \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega).$$

Lembremos agora que, em $H_0^1(\Omega)$, podemos introduzir o seguinte produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int (\nabla u \cdot \nabla v), \quad \forall\, u,\ v \in H_0^1(\Omega).$$

Desse modo, a formulação fraca se reduz a

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int f(x)v, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

O lado direito da expressão pode ser visto como a ação do seguinte funcional linear

$$\begin{aligned} T_f : \ & H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & v \mapsto T_f(v) := \int f(x)v. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Poincaré, obtemos

$$|T_f(v)| \le \|f\|_2 \|v\|_2 \le C\|f\|_2 \left(\int |\nabla v|^2 \right)^{1/2} = C\|f\|_2 \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

o que mostra que T_f é contínuo. Segue então do Teorema da Representação de Riesz que existe uma única função $u_f \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle u_f, v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = T_f(v) = \int f(x)v, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Logo u_f é a única solução fraca do problema (P).

A ideia acima pode ser estendida para uma classe maior de operadores. De fato, suponha agora que $b^i \equiv 0$ para $i = 1, \dots, n$ e que $c \geq 0$ em Ω. Nesse caso, a forma bilinear associada ao problema (P) é

$$B[u,v] = \int \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + \int c(x) uv.$$

Como não existem os termos de primeira ordem, B é simétrica. Além disso, podemos usar a elipticidade uniforme de L, $c \geq 0$ e a desigualdade de Poincaré novamente, para obter

$$B[u,u] = \int \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} + \int c(x) u^2 \geq \theta_0 \int |\nabla u|^2 \geq C \int |u|^2,$$

com $C > 0$ independente de u. A expressão acima mostra que $B[u,u] = 0$ se, e somente se, $u = 0$. Portanto B é uma forma bilinear, simétrica e positiva definida. Logo, define um produto interno em $H_0^1(\Omega)$ cuja norma induzida é

$$\|u\|_B := B[u,u]^{1/2}.$$

Para obtermos uma solução fraca precisamos somente verificar que $v \overset{T_f}{\longmapsto} \int fv$ é um funcional linear contínuo em $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{B[\cdot,\cdot]})$. Para tanto observe que, se $v \in H_0^1(\Omega)$, podemos proceder como antes para obter

$$|T_f(v)| \leq C_1 \|f\|_2 \left(\int |\nabla v|^2 \right)^{1/2}.$$

Como $B[v,v] \geq \theta_0 \int |\nabla v|^2$ obtemos

$$|T_f(v)| \leq C_1 \|f\|_2 \theta_0^{-1/2} B[v,v]^{1/2} = C_2 \|v\|_B\,.$$

Desse modo, essa nova topologia em $H_0^1(\Omega)$ mantém a continuidade de T_f e podemos aplicar o Teorema de Riez para obter $u_f \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$B[u_f, v] = \int f(x)v, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

As considerações acima provam o seguinte

Teorema 5.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e L um operador uniformemente elíptico em*

Ω da forma

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n}(a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + c(x)u,$$

com a^{ij}, $c \in L^{\infty}(\Omega)$ e $c \geq 0$ em Ω. Então para toda $f \in L^2(\Omega)$ o problema

$$\begin{cases} Lu &= f, \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0, \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

tem exatamente uma solução fraca em $H_0^1(\Omega)$.

Gostaríamos agora de resolver o problema (P) no caso geral em que existem os termos de primeira ordem. Lembre que, nesse caso, a forma bilinear associada ao problema é

$$B[u,v] = \int \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i}v_{x_j} + \int \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i}v + \int c(x)uv.$$

Observe que, devido à presença dos termos de primeira ordem, B pode não ser simétrica. Se esse for o caso, o lado esquerdo da formulação fraca do problema não é mais um produto interno e não podemos aplicar o Teorema de Riesz. Para superar essa dificuldade vamos utilizar o seguinte resultado de Análise Funcional.

Teorema 5.3 (Lax-Milgram)**.** *Seja $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ um espaço de Hilbert e $\mathscr{B} : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear satisfazendo*

(i) *existe $\alpha > 0$ tal que, para todo $u, v \in H$,*

$$|\mathscr{B}[u,v]| \leq \alpha \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall\, u,\, v \in H.$$

(ii) *existe $\beta > 0$ tal que,*

$$\mathscr{B}[u,u] \geq \beta \|u\|^2, \quad \forall\, u \in H.$$

Então, dado um funcional linear contínuo $T : H \to \mathbb{R}$, existe um único $u_T \in H$ tal que

$$T(u) = \mathscr{B}[u_T, u], \quad \forall\, u \in H.$$

Demonstração. Para cada $u_0 \in H$ fixado, a aplicação $v \xmapsto{T_{u_0}} \mathscr{B}[u_0, v]$ é um funcional linear contínuo. Logo, pelo Teorema de Riesz, existe $Au_0 \in H$ tal que $B[u_0, v] = \langle Au_0, v\rangle_H$, para todo $v \in H$. Variando u_0, podemos construir um operador $A : H \to H$ de tal modo que, para cada $u \in H$, o vetor Au é o único elemento de H que satisfaz

$$\mathscr{B}[u,v] = \langle Au, v\rangle_H, \quad \forall\, u,\, v \in H.$$

Usando a definição de A, vemos que A é linear. Além disso,

$$\|Au\|_H^2 = \langle Au, Au \rangle_H = \mathscr{B}[u, Au] \leq C \|u\|_H \|Au\|_H$$

e portanto

$$\|Au\|_H \leq C \|u\|_H$$

o que mostra que A é contínuo.

Utilizando agora (ii) obtemos

$$\beta \|u\|_H^2 \leq \mathscr{B}[u, u] = \langle Au, u \rangle_H \leq \|Au\|_H \|u\|_H,$$

donde segue que

$$\|Au\|_H \geq \beta \|u\|_H. \tag{5.5}$$

A expressão acima implica que A é injetiva e que a imagem de A, que será denotada por $\mathrm{Im}(A)$, é fechada em H (cf. Exercício **??**).

Vamos mostrar agora que A é também sobrejetivo. Suponha, por contradição, que $\mathrm{Im}(A) \neq H$. Como $\mathrm{Im}(A)$ é um subespaço próprio fechado de H, o seu complementar ortogonal $\mathrm{Im}(A)^\perp$ é não trivial. Desse modo, se $w \in \mathrm{Im}(A)^\perp \setminus \{0\}$, temos que

$$\beta \|w\|^2 \leq \mathscr{B}[w, w] = \langle Aw, w \rangle = 0,$$

o que é absurdo, visto que $\beta > 0$ e $w \neq 0$. Assim, o operador A é sobrejetivo.

Podemos agora concluir a demonstração da seguinte maneira. Sabemos, pelo Teorema de Riesz, que existe um único $\overline{u} \in H$ tal que

$$T(u) = \langle \overline{u}, u \rangle_H, \quad \forall\, u \in H.$$

A sobrejetivade de A nos fornece $u_T \in H$ tal que $A(u_T) = \overline{u}$. Logo,

$$T(u) = \langle \overline{u}, u \rangle_H = \langle A(u_T), u \rangle = \mathscr{B}[u_T, u], \quad \forall\, u \in H.$$

Para mostrar que o elemento u_T é único, suponha que existe $\widetilde{u}_T \in H$ tal que $T(u) = \mathscr{B}[\widetilde{u}_T, u]$, para todo $u \in H$. Então, escolhendo $u = u_T - \widetilde{u}_T$, obtemos

$$0 = \mathscr{B}[u_T - \widetilde{u}_T, u_T - \widetilde{u}_T] \geq \|u_T - \widetilde{u}_T\|_H^2,$$

o que mostra que $u_T = \widetilde{u}_T$. □

Voltemos agora a considerar o problema (P). Vamos usar o espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int |\nabla u|^2 \right)^{1/2}.$$

Conforme vimos anteriormente, com essa topologia, o funcional linear $v \overset{T_f}{\longmapsto} \int fv$ é contínuo de $H_0^1(\Omega)$ em $\mathbb{R}$.

Precisamos verificar se a forma bilinear $B[\cdot,\cdot]$ definida em (5.4) satisfaz as hipóteses do Teorema de Lax-Milgram. Para tanto, note inicialmente que, se $u, v \in H$, então

$$\begin{aligned}
|B[u,v]| &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \left\|a^{ij}\right\|_\infty \int |u_{x_i}|\,|v_{x_i}| + \sum_{i=1}^{n} \left\|b^i\right\|_\infty \int |u_{x_i}|\,|v| + \|c\|_\infty \int |u|\,|v| \\
&\leq c_1 \Big(\int |\nabla u|\,|\nabla v| + \int |\nabla u|\,|v| + \int |u|\,|v| \Big) \\
&\leq c_1 \Big(\|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + \|\nabla u\|_2 \|v\|_2 + \|u\|_2 \|v\|_2 \Big) \\
&\leq c_1 \Big(\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + c_2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + c_3 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \Big) \\
&\leq \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

e portanto B é contínua.

A condição (ii) do Teorema de Lax-Milgram é mais delicada e não vale em geral. O próximo resultado é um primeiro passo na tentativa de resolver o problema (P).

Lema 5.4. *Existem $\gamma = \gamma(\|b^i\|_\infty, \theta_0, \|c\|_\infty) > 0$ e $\beta > 0$ tais que*

$$\beta \int |\nabla u|^2 \leq B[u,u] + \gamma \int u^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
\theta_0 \int |\nabla u|^2 &\leq \int \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} \\
&= B[u,u] - \int \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} u - \int c(x) u^2 \\
&\leq B[u,u] + \sum_{i=1}^{n} \left\|b^i\right\|_\infty \int |\nabla u|\,|u| + \|c\|_\infty \int u^2.
\end{aligned}$$

Lembremos agora que, se $a, b \in \mathbb{R}$, então para todo $\varepsilon > 0$ vale

$$ab = \sqrt{2\varepsilon} a \frac{b}{\sqrt{2\varepsilon}} \leq \frac{1}{2} 2\varepsilon a^2 + \frac{1}{2} \frac{b^2}{2\varepsilon} = \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2.$$

Desse modo
$$\int |\nabla u|\,|u| \le \varepsilon \int |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\int |u|^2 .$$
Escolhendo $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon \sum_{i=1}^n \|b^i\|_\infty = \theta_0/2$, obtemos
$$\theta_0 \int |\nabla u|^2 \le B[u,u] + \frac{\theta_0}{2}\int |\nabla u|^2 + \left(\frac{\sum_{i=1}^n \|b^i\|_\infty}{4\varepsilon} + \|c\|_\infty\right)\int u^2$$
e portanto
$$\frac{\theta_0}{2}\int |\nabla u|^2 \le B[u,u] + \left(\frac{\sum_{i=1}^n \|b^i\|_\infty}{4\varepsilon} + \|c\|_\infty\right)\int u^2.$$
Desse modo, o lema vale para
$$\beta := \frac{\theta_0}{2}, \quad \gamma := \frac{\left(\sum_{i=1}^n \|b^i\|_\infty\right)^2}{2\theta_0} + \|c\|_\infty ,$$
onde na expressão de γ usamos a escolha de $\varepsilon > 0$. □

Estamos prontos para enunciar e provar o nosso primeiro teorema de existência de solução.

Teorema 5.5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e L um operador uniformemente elíptico em Ω da forma*
$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n (a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$
com a^{ij}, b^i, $c \in L^\infty(\Omega)$. Então existe $\gamma = \gamma(\|b^i\|_\infty, \theta_0, \|c\|_\infty) \ge 0$ tal que, para toda $f \in L^2(\Omega)$ e todo $\mu \ge \gamma$, o problema
$$(P_\mu) \qquad \begin{cases} Lu + \mu u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$
tem exatamente uma solução fraca em $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Vamos provar o teorema para $\gamma \ge 0$ dado pelo lema anterior. Seja então $f \in L^2(\Omega)$ e $\mu \ge \gamma$. A formulação fraca do problema (P_μ) é a seguinte: obter $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que
$$B_\mu[u,v] = \int f(x)v, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$
onde
$$B_\mu[u,v] := B[u,v] + \mu \int uv.$$

A mesma conta feita para a forma B mostra que existe $\alpha > 0$ tal que
$$|B_\mu[u,v]| \le \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall\, u,\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Além disso, se β é a constante dada pelo lema anterior, temos que

$$\beta \|u\|^2 \leq B[u,u] + \gamma \int u^2 \leq B[u,u] + \mu \int u^2,$$

isto é,

$$\beta \|u\|^2 \leq B_\mu[u,u], \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega).$$

Aplicando o Teorema de Lax-Milgram para B_μ e lembrando que $v \mapsto \int f(x)v$ é linear e contínuo, obtemos $u_f \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$B_\mu[u_f, v] = \int f(x)v, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

e portanto u_f é a (única) solução fraca de (P_μ) em $H_0^1(\Omega)$. □

Na próxima seção vamos estudar melhor a questão de existência de solução para o problema (P_μ).

5.1.1 Alternativa de Fredholm

Se $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear então o Teorema do Núcleo e da Imagem nos garante que T é injetiva se, e somente se, T é sobrejetiva. Em dimensão infinita essa mesma conclusão pode ser falsa. De fato, considere o espaço de Hilbert $l^2 := \{(x_m)_{m\in\mathbf{N}} : \sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^2 < \infty\}$ das sequências de quadrado somável. É fácil ver que a transformação linear $T : l^2 \to l^2$ dada por $T(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$ é injetiva mas não é sobrejetiva.

No que segue apresentamos um resultado que fornece, para uma determinada classe de operadores, um resultado análogo ao de dimensão finita. Antes porém lembremos que, se $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ é um espaço de Hilbert real e $T : H \longrightarrow H$ é um operador contínuo, o operador adjunto $T^* : H \longrightarrow H$ é definido por

$$\langle Tu, v\rangle_H = \langle u, T^*v\rangle_H, \quad \forall\, u,\, v \in H.$$

Lembremos ainda que T é compacto se ele leva conjuntos limitados em conjuntos relativamente compactos.

Para pertubações compactas da identidade vale o seguinte resultado:

Teorema 5.6 (Alternativa de Fredholm)**.** *Seja H um espaço de Hilbert real e $K : H \to H$ um operador linear compacto. Então*

(i) $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - K) < \infty$ *;*

(ii) $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - K)$ *é um subespaço fechado e* $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - K) = (\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - K^*))^{\perp}$ *;*

(iii) $(\mathrm{Id} - K)$ *é injetivo se, e somente se, é sobrejetivo ;*

(iv) $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - K) = \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - K^*)$.

O teorema acima fornece informações sobre a solubilidade do problema

$$u - Ku = f, \tag{5.6}$$

com $f \in H$. O nome do resultado se deve ao fato de que ele afirma que ocorre exatamente uma das alternativas abaixo.

Alternativa 1: para cada $f \in H$ o problema tem solução única.

Alternativa 2: o problema homogêneo associado $u - Ku = 0$ possui solução $u \neq 0$. Nesse caso, a equação (5.6) tem solução se, e somente se, $f \in (\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - K^*))^{\perp}$.

Nosso objetivo é aplicar o Teorema 5.6 para estudar a solubilidade do problema (P). Para tanto, vamos supor que os coeficientes b^i do operador L são de classe $C^1(\overline{\Omega})$ e introduzir o problema adjunto de (P) como segue

$$\begin{cases} L^*v &= f, \quad \text{em } \Omega, \\ v &= 0, \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde L^* é o operador adjunto de L dado por

$$L^*v = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x)v_{x_i})_{xj} - \sum_{i=1}^{n} b^i(x)v_{x_i} + \left(c(x) - \sum_{i=1}^{n} (b^i(x))_{x_i} \right) v.$$

A expressão para L^*v acima pode ser obtida via integração por partes (cf. Exercício 5.3). Além disso, segue da definição que

$$\langle Lu, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int (Lu)v = \int u(L^*v) = \langle u, L^*v\rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\, u,\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{5.7}$$

O resultado abaixo caracteriza o espectro de solução do problema (P).

Teorema 5.7 (Alternativa de Fredholm para (P))**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e L um operador uniformemente elíptico Ω da forma*

$$Lu = -\sum_{i,j} (a^{ij}(x)u_{x_i})x_j + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$

com a^{ij}, $c \in L^\infty(\Omega)$ e $b^i \in C^1(\overline{\Omega})$. Então

(i) *exatamente uma das duas situações abaixo ocorre*

Alternativa 1: *o problema* (P) *possui solução única para cada* $f \in L^2(\Omega)$*.*

Alternativa 2: *o problema homogêneo*

$$Lu = 0 \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega, \tag{5.8}$$

possui solução não trivial $u \neq 0$.

(ii) *se ocorre a segunda alternativa, a dimensão do subespaço* $N \subset H_0^1(\Omega)$ *de soluções fracas de (5.8) é finita e coincide com a dimensão do subespaço* $N^* \subset H_0^1(\Omega)$ *de soluções fracas de*

$$L^*v = 0 \text{ em } \Omega, \quad v = 0 \text{ em } \partial\Omega. \tag{5.9}$$

(iii) *o problema* (P) *tem solução fraca para uma dada* $f \in L^2(\Omega)$ *se, e somente se,*

$$\langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall\, v \in N^*.$$

Demonstração. Considerando $\gamma \geq 0$ dado pelo Teorema 5.5, sabemos que o problema (P_γ) tem solução fraca única para cada $f \in L^2(\Omega)$. Desse modo, podemos construir o operador solução $S_\gamma : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ como segue

$$S_\gamma(f) = u \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \text{ é a única solução fraca de} \\ Lu + \gamma u = f \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Uma vez que L é linear, o operador solução também é linear. Além disso, se $f \in L^2(\Omega)$, então $u = S_\gamma(f)$ satisfaz

$$\beta\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq B_\gamma[u,u] = \int fu \leq \|f\|_2\|u\|_2 \leq C\|f\|_2\|u\|_{H_0^1(\Omega)},$$

onde estamos usando a mesma notação da demonstração do Teorema 5.5. Uma vez que $u = S_\gamma(f)$, a expressão acima pode ser reescrita como

$$\|S_\gamma(f)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\beta}\|f\|_2,$$

o que mostra que o operador solução é contínuo de $L^2(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega)$.

Suponha que $(f_n) \subset L^2(\Omega)$ é uma sequência limitada. Como S_γ é contínua, a sequência $(S_\gamma(f_n))$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Lembrando que a imersão desse último espaço em $L^2(\Omega)$ é compacta, concluímos que uma subsequência de $(S_\gamma(f_n))$ converge em $L^2(\Omega)$, o que mostra a compacidade de $S_\gamma : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$.

Note agora que

$$\begin{aligned} Lu = f \quad &\Leftrightarrow \quad Lu + \gamma u = f + \gamma u \\ &\Leftrightarrow \quad u = S_\gamma(f + \gamma u) = S_\gamma(f) + \gamma S_\gamma(u) \\ &\Leftrightarrow \quad u - \gamma S_\gamma(u) = S_\gamma(f) \end{aligned}$$

Desse modo, se $g_f = S_\gamma(f) \in L^2(\Omega)$ e $K = \gamma S_\gamma$, o problema (P) é equivalente a

$$u - Ku = g_f.$$

Como S_γ é compacto, as conclusões seguem de uma aplicação imediata do Teorema 5.6 (cf. Exercício 5.4). $\square$

5.1.2 Os autovalores de L

Dado um espaço de Hilbert real H e um operador linear contínuo $T : H \to H$, definimos o *resolvente de* T como sendo

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : (T - \lambda \, \mathrm{Id}) : H \to H \text{ é uma bijeção}\}.$$

Observe que $\lambda \in \rho(T)$ se, e somente se, a equação $Tu - \lambda u = f$ tem solução única para cada $f \in H$. O *espectro de* T é definido como $\sigma(T) = \mathbb{R} \backslash \rho(T)$. Se $\lambda \in \sigma(T)$ é tal que

$$\mathrm{Ker}(T - \lambda \, \mathrm{Id}) \neq \{0\},$$

então dizemos que λ é um *autovalor de* T. Nesse caso, existe $u_\lambda \neq 0$ tal que

$$T u_\lambda = \lambda \, u_\lambda.$$

Chamamos u_λ de *autovetor associado ao autovalor* λ. Denotamos por $\sigma_p(T)$ o conjunto dos autovalores de T, isto é,

$$\sigma_p(T) = \Big\{\lambda \in \sigma(T) : \mathrm{Ker}(T - \lambda \, \mathrm{Id}) \neq \{0\}\Big\}.$$

Não é difícil mostrar que, se H tem dimensão finita, então $\sigma(T) = \sigma_p(T)$. Em dimensão infinita pode ocorrer $\sigma(T) \neq \sigma_p(T)$. Por exemplo, seja $T : l^2 \to l^2$ definida por

$$T(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots).$$

Como T não é sobrejetiva temos que $0 \in \sigma(T)$. Mas observe que $0 \notin \sigma_p(T)$, pois $\text{Ker}(T) = \{0\}$. Logo, $0 \in \sigma(T) \backslash \sigma_p(T)$.

O resultado abaixo caracteriza o espectro de operadores compactos.

Teorema 5.8 (Teoria espectral de operadores compactos)**.** *Seja H um espaço de Hilbert real com dimensão infinita e $K : H \to H$ um operador compacto. Então,*

(i) $0 \in \sigma(K)$ *;*

(ii) $\sigma(K) \backslash \{0\} = \sigma_p(K) \backslash \{0\}$

(iii) *se $\sigma(K) \backslash \{0\}$ é um conjunto infinito então $\sigma(K) \backslash \{0\} = (\lambda_m)_{m \in \mathbb{N}}$ com $\lambda_m \to 0$ quando $m \to \infty$.*

Usando o resultado acima e operador solução do problema do (P), podemos mostrar o seguinte resultado (cf. Exercício 5.5).

Teorema 5.9. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e L um operador uniformemente elíptico Ω da forma*

$$Lu = -\sum_{i,j} (a^{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} + c(x) u,$$

com a^{ij}, $c \in L^\infty(\Omega)$ e $b^i \in C^1(\overline{\Omega})$. Então existe um conjunto finito ou infinito enumerável $\Sigma \subset \mathbb{R}$ tal que o problema

$$(P_{-\lambda}) \qquad \begin{cases} Lu = \lambda u + f, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui solução fraca única para cada $f \in L^2(\Omega)$ se, e somente se, $\lambda \notin \Sigma$. Além disso, se Σ é infinito, então $\Sigma = (\lambda_m)_{m \in \mathbb{N}}$ com $\lambda_m \to \infty$ quando $m \to \infty$.

5.2 Espectro de $-\Delta$

Nessa seção, vamos estudar o problema de autovalor

$$(PA) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é uma aberto limitado. Vamos usar em $H_0^1(\Omega)$ a seguinte norma

$$\|u\|^2 = \int |\nabla u|^2.$$

Note que a formulação fraca do problema acima é: encontrar $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que

$$\langle u, v\rangle = \int (\nabla u \cdot \nabla v) = \int \lambda u, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Lembre que estamos interessados em soluções $u \neq 0$, visto que autovetores são sempre não nulos. Fazendo $v = u$ na expressão acima, obtemos

$$\int |\nabla u|^2 = \lambda \int u^2,$$

de onde se conclui que $\lambda > 0$. Outra observação importante é que, conforme veremos na seção seguinte, as autofunções são de classe $C^\infty(\Omega)$.

Vamos tentar aplicar o Teorema 5.8 para obter os autovalores de (PA). Para cada $u \in H_0^1(\Omega)$ fixado, a aplicação

$$\begin{aligned} T_u : \quad & H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & v \mapsto T_u(v) := \int uv \end{aligned}$$

é um funcional linear e contínuo em $H_0^1(\Omega)$. Logo, existe $Tu \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\langle Tu, v\rangle = \int uv$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Variando u, podemos construir uma aplicação $T : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle Tu, v\rangle = \int uv, \quad \forall\, u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{5.10}$$

Dado $u_1, u_2, v \in H_0^1(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que

$$\langle T(u_1 + \lambda u_2), v\rangle = \int (u_1 + \lambda u_2)v = \langle Tu_1 + \alpha Tu_2, v\rangle,$$

e

$$\langle Tu, v\rangle = \int uv = \int vu = \langle Tv, u\rangle = \langle u, Tv\rangle,$$

e portanto T é linear e autoadjunto. Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Poincaré para obtemos,

$$\|Tu\|^2 = \langle Tu, Tu\rangle = \int u(Tu) \leq \|u\|_2 \|Tu\|_2 \leq c_1 \|u\| \|Tu\|,$$

ou ainda

$$\|Tu\| \leq c_1 \|u\|, \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega),$$

o que mostra que T é contínuo.

Seja agora $(u_m) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência limitada. A compacidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow$

$L^2(\Omega)$ implica que, a menos de subsequência,

$$u_m \to u \quad \text{em } L^2(\Omega).$$

Assim, procedendo como acima, obtemos

$$\|Tu_m - Tu_k\|^2 = \langle T(u_m - u_k), (u_m - u_k)\rangle \leq c_2\|u_m - u_k\|_2\|T(u_m - u_k)\|,$$

ou ainda,

$$\|Tu_m - Tu_k\| \leq c_2\|u_m - u_k\|_2.$$

Como $u_m \to u$ em $L^2(\Omega)$, a expressão acima mostra que (Tu_m) é uma sequência de Cauchy em $H_0^1(\Omega)$. Logo, possui subsequência convergente. Isso mostra que T é compacto.

Observe agora que, se $u \neq 0$ é solução fraca de (PA), então

$$\langle u, v\rangle = \lambda \int uv = \lambda\langle Tu, v\rangle,$$

ou ainda

$$\langle Tu, v\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle u, v\rangle, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Segue da expressão acima que $\lambda > 0$ é autovalor de (PA) com autovetor associado $u \neq 0$ se, e somente se,

$$Tu = \frac{1}{\lambda}u.$$

Temos então o seguinte resultado:

Teorema 5.10. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado, então o problema de autovalor*

$$(PA) \qquad \left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u & = & 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{array}\right.$$

possui uma sequência de autovalores

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_m \leq \cdots$$

tal que $\lambda_m \to \infty$ quando $m \to \infty$. Além disso, as autofunções associadas formam uma base ortogonal de $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Seja T o operador definido em (5.10). Sabemos que $\lambda > 0$ é autovalor do problema (PA) se, e somente se, $1/\lambda$ é autovalor de T. De acordo com o Teorema 5.8, exatamente uma das alternativas abaixo ocorre

(i) $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ é finito ;

(ii) $\sigma_p(T) \setminus \{0\}$ é uma sequência $(\mu_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $\mu_m \to 0^+$.

Uma vez que $H_0^1(\Omega)$ é separável e T é compacto e autoadjunto, os autovetores de T formam uma base ortogonal de $H_0^1(\Omega)$ (cf. [3, Teorema VI.11]). Se μ é um autovalor de T, então a Alternativa de Fredholm implica que a dimensão de $\ker(T - \mu \, \mathrm{Id})$ é finita. Logo, todos os autoespaços têm dimensão finita. Uma vez que $H_0^1(\Omega)$ tem dimensão infinita, concluímos que a alternativa (i) acima não pode ocorrer. Desse modo

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\} = (\mu_m),$$

com $\mu_m \to 0^+$. Os autovalores correspondentes de (PA) são da forma

$$\lambda_m = \frac{1}{\mu_m}.$$

Logo, eles formam um sequência

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_m \leq \cdots,$$

tal que $\lim_{m\to\infty} \lambda_m = +\infty$. Mostraremos posteriormente que o primeiro autovalor λ_1 é simples, isto é, $\lambda_1 < \lambda_2$. $\square$

Vale observar que, na notação do teorema acima, se

$$\lambda_{m-1} < \lambda_m = \cdots = \lambda_{m+j-1} < \lambda_{m+j}$$

então $\lambda = \lambda_m$ é um autovalor com multiplicade j, isto é,

$$\dim \ker(T - \lambda \, \mathrm{Id}) = j.$$

Outro ponto importante é que o resultado acima permanece válido para o operador

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + c(x)u,$$

se L for simétrico, uniformemente elíptico, os coeficientes forem limitados e c for não negativa.

A parte final do teorema nos diz que

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \ldots\}},$$

onde φ_m é uma autofunção associada ao autovalor λ_m. As autofunções φ_m são ortogonais em $H_0^1(\Omega)$. Contudo, usando a formulação fraca do problema (AP), é fácil ver que elas são também ortogonais em $L^2(\Omega)$. Isso nos permite obter algumas desigualdades interessantes para funções de $H_0^1(\Omega)$ em termos dos autoespaços, conforme a proposição abaixo, cuja prova será deixada para o leitor (cf. Exercício 5.6).

Proposição 5.11. *As autofunções $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ do problema (PA) são ortogonais em $L^2(\Omega)$. Além disso, se $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ e $V_k \subset H_0^1(\Omega)$ é o subespaço gerado por $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$, então*

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \lambda_k \int_\Omega u^2, \quad \forall\, u \in V_k,$$

e

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \geq \lambda_{k+1} \int_\Omega u^2, \quad \forall\, u \in V_k^{\perp},$$

Em particular, se tomarmos $k = 0$, obtemos novamente a desigualdade de Poincaré.

No que segue, vamos extrair propriedades importante do primeiro autovalor λ_1. Começamos recordando o seguinte resultado de Análise Funcional (cf. [3, Proposição VI.9]).

Lema 5.12. *Seja H um espaço de Hilbert e $\mathscr{K} : H \to H$ um operador linear, contínuo e autoadjunto. Se*

$$m := \inf_{\|u\|_H=1} \langle \mathscr{K}u, u\rangle_H, \qquad M := \sup_{\|u\|_H=1} \langle \mathscr{K}u, u\rangle_H,$$

então m, $M \in \sigma(\mathscr{K})$ e $\sigma(\mathscr{K}) \subset [m, M]$.

Vamos aplicar o resultado acima para o operador T relacionado com o problema (PA). Para fazer isso, observe inicialmente que o menor autovalor λ_1 do problema (PA) é exatamente o inverso do maior autovalor do operador T definido em (5.10). Assim,

$$\frac{1}{\lambda_1} = \sup_{\|u\|=1} \langle Tu, u\rangle = \sup_{u\neq 0} \left\langle T\left(\frac{u}{\|u\|}\right), \frac{u}{\|u\|}\right\rangle.$$

Segue da expressão acima que, se $u \neq 0$, então

$$\frac{1}{\lambda_1} \geq \left\langle T\left(\frac{u}{\|u\|}\right), \frac{u}{\|u\|}\right\rangle = \frac{1}{\|u\|^2}\langle Tu, u\rangle = \frac{1}{\|u\|^2}\int u^2,$$

e portanto

$$\lambda_1 \int u^2 \leq \int |\nabla u|^2, \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega).$$

As considerações acima provam o seguinte resultado.

Proposição 5.13. *O primeiro autovalor $\lambda_1 > 0$ do problema de autovalor (PA) é*

$$\lambda_1 = \inf_{u\neq 0} Q(u),$$

onde $Q : H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *é definido por*

$$Q(u) = \frac{\int |\nabla u|^2}{\int u^2}.$$

Vamos estudar melhor a função Q acima. Observe inicialmente que o ínfimo de Q é na verdade um mínimo. De fato, se φ_1 é uma autofunção associada a λ_1, então $-\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$ em Ω, donde se conclui que

$$\int |\nabla\varphi_1|^2 = \lambda_1 \int \varphi_1^2,$$

isto é,

$$\lambda_1 = Q(\varphi_1).$$

Desse modo, toda autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1 é um ponto de mínimo de Q.

Vamos mostrar que a recíproca da conclusão acima é verdadeira, isto é, se $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ é tal que $Q(\varphi) = \lambda_1$, então φ é uma λ_1-autofunção. De fato, dada $v \in H_0^1(\Omega)$ e $t \in \mathbb{R}$, temos que $\lambda_1 \leq Q(\varphi + tv)$, isto é,

$$\int |\nabla(\varphi + tv)|^2 \geq \lambda_1 \int (\varphi + tv)^2.$$

Desenvolvendo os dois lados da desigualdade acima e lembrando que $\lambda_1 \int \varphi^2 = \int |\nabla\varphi|^2$ obtemos

$$2t \int (\nabla\varphi \cdot \nabla v) + t^2 \int |\nabla v|^2 \geq 2t\lambda_1 \int \varphi v + t^2\lambda_1 \int v^2.$$

Dividindo a expressão acima por $2t > 0$ e fazendo $t \to 0^+$ concluímos que

$$\int (\nabla\varphi \cdot \nabla v) \geq \lambda_1 \int \varphi v.$$

Um argumento análogo fazendo $t \to 0^-$ nos fornece uma desigualdade reversa, e portanto

$$\int (\nabla\varphi \cdot \nabla v) = \lambda_1 \int \varphi v, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

o que mostra que φ é uma solução fraca do problema (AP) com $\lambda = \lambda_1$.

Estamos prontos para provar o

Teorema 5.14. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado, λ_1 é o primeiro autovalor do problema (AP) e φ_1 é uma autofunção associada a esse autovalor. Então*

(i) *$\varphi_1 > 0$ ou $\varphi_1 < 0$ em Ω.*

(ii) *se ψ é uma λ_1-autofunção, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\psi = \alpha\varphi_1$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que φ_1 troca de sinal em Ω. Então

$$\varphi_1 = \varphi_1^+ - \varphi_1^-,$$

com φ_1^+, $\varphi_1^- \not\equiv 0$. Lembremos que φ_1^+, $\varphi_1^- \in H_0^1(\Omega)$ e

$$\nabla\varphi_1^+(x) = \begin{cases} \nabla\varphi_1(x), & \text{q.t.p. em } \{x \in \Omega : \varphi_1(x) > 0\} \\ 0, & \text{q.t.p. em } \{x \in \Omega : \varphi_1(x) \leq 0\}, \end{cases}$$

com uma expressão análoga valendo para $\nabla\varphi_1^-$ (cf. Exercício 4.26). Fazendo $v = \varphi_1^+$ na formulação fraca do problema obtemos

$$\int_\Omega (\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_1^+) = \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1\varphi_1^+. \tag{5.11}$$

Mas

$$\int_\Omega (\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_1^+) = \int_{\{\varphi_1>0\}} (\nabla\varphi_1^+ \cdot \nabla\varphi_1^) = \int_\Omega |\nabla\varphi_1^+|^2.$$

Analogamente $\int_\Omega \varphi_1\varphi^+ = \int_\Omega (\varphi_1^+)^2$, e portanto segue de (5.11) que

$$\int_\Omega |\nabla\varphi_1^+|^2 = \lambda_1 \int_\Omega (\varphi_1^+)^2.$$

Logo $Q(\varphi_1^+) = \lambda_1$, donde se conclui que φ_1^+ é uma λ_1-autofunção. De maneira análoga mostra-se que φ_1^- é também λ_1-autofunção.

Temos então que

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1^\pm &= \lambda_1\varphi_1^\pm, & \text{em } \Omega, \\ \varphi_1^\pm &= 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Provaremos logo mais que as autofunções são soluções clássicas (cf. Teorema 5.18). Assim, como $\varphi_1^\pm \geq 0$ em Ω, segue do Princípio do Máximo Forte que $\varphi_1^\pm > 0$ em Ω. De fato, se existisse $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi_1^+(x_0) = 0$ então a função φ_1^+ teria um ponto de mínimo em Ω. Daí seguiria que $\varphi_1^+ \equiv 0$ em Ω, o que não faz sentido porque estamos supondo $\varphi_1^+ \not\equiv 0$. Desse modo, concluímos que $\varphi_1^\pm > 0$. Mas isso contraria o fato de $\varphi_1^+\varphi_1^- \equiv 0$ em Ω.

A contradição acima proveio do fato de supormos que φ_1 trocava de sinal em Ω. Logo devemos ter $\varphi_1^+ \equiv 0$ ou $\varphi_1^- \equiv 0$. Se $\varphi_1^- \equiv 0$ então $\varphi_1 \geq 0$ em Ω. Aplicando o Princípio do Máximo novamente concluímos que $\varphi_1 > 0$ em Ω. No caso em que $\varphi_1^+ \equiv 0$ o mesmo argumento implica que $\varphi_1 < 0$ em Ω. Isso estabele o item (i).

Para provar (ii) vamos supor, por contradição novamente, que φ_1 e ψ são linearmente independentes. Nesse caso,

$$\dim\ker(-\Delta - \lambda_1\,\mathrm{Id}) \geq 2.$$

Uma vez que existe uma base ortogonal de $H_0^1(\Omega)$ formada por autofunções, e φ_1 e ψ são linearmente independentes, temos que

$$0 = \langle \varphi_1, \psi \rangle = \int \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\psi) = \lambda_1 \int \varphi_1\psi.$$

Mas a expressão acima não pode ocorrer pois, pelo item (i), o produto $\varphi_1\psi$ tem sinal definido em Ω. Obtemos então uma contradição, o que mostra que ψ é um múltiplo escalar de φ_1. $\square$

5.3 Regularidade de soluções

Estamos interessados agora em obter mais regularidade para as soluções do problema (P) obtidas na seção anterior. Em toda essa seção, o operador L será da forma

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u.$$

A regularidade dos coeficientes vai variar de resultado para resultado. De uma maneira geral, quanto mais regulares forem os coeficientes e o dado f, mais regular será a a solução.

Para motivar os resultados que apresentaremos, vamos supor $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma solução do problema

$$-\Delta u = f, \quad \text{em } \mathbb{R}^n$$

com $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Vamos também exigir que essa solução tenha propriedades que façam com que todas as integrações por partes abaixo possam ser feitas:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (\triangle u)^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j} u_{x_ix_i}u_{x_jx_j} dx \\
&= \sum_{i,j} \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_ix_i}u_{x_jx_j} \, dx = \sum_{i,j} \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_ix_i}(u_{x_j})_{x_j} dx \\
&= \sum_{i,j} -\int_{\mathbb{R}^n} u_{x_ix_ix_j}u_{x_j} dx = \sum_{i,j} \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_jx_i}u_{x_ix_j} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |D^2u|^2 dx.
\end{aligned}$$

A conta acima mostra que as derivadas de ordem 2 da função u estão em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Supondo agora que, para todo $i = 1, \dots, n$, a função f_{x_i} existe e está em $L^2(\mathbb{R}^n)$, podemos usar o fato de que $-\Delta(u_{x_i}) = f_{x_i}$ e proceder como acima para concluir que as derivadas de ordem 3 da função u também estão em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

A conta formal feita acima parece indicar que uma solução do problema $Lu = f$ tem duas derivadas a mais do que a função f. De fato, temos o seguinte (cf. [5, Teorema 2, Seção 6.3]):

Teorema 5.15 (Regularidade interior). *Seja $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e suponha que $a^{ij}, b^i, c \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$, $f \in W^{k,2}(\Omega)$ e $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é uma solução fraca de*

$$Lu = f.$$

Então $u \in W^{k+2,2}_{loc}(\Omega)$ e, para cada $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, existe uma constante $C = C(k, \Omega, \Omega_0, a^{ij}, b^i, c) > 0$ tal que

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega_0)} \leq C \left(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Observe que a solução u do resultado acima pertence a $W^{1,2}(\Omega)$, de modo que não estamos exigindo que $u = 0$, no sentido do traço, na fronteira de Ω. Outro ponto que merece destaque é que, se os coefientes a^{ij}, b^i, $c \in C^\infty(\Omega)$ e $f \in C^\infty(\Omega)$ então podemos usar o resultado acima e o item (iii) do Teorema 4.32 para concluir que $u \in C^\infty(\Omega)$.

Quando a fronteira de Ω é regular, podemos obter um resultado global de regularidade (cf. [5, Teorema 5, Seção 6.3]).

Teorema 5.16 (Regularidade global). *Seja $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e suponha que $a^{ij}, b^i, c \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$, $f \in W^{k,2}(\Omega)$ e Ω é de classe C^{k+2}. Suponha que $u \in W^{1,2}_0(\Omega)$ é solução fraca de*

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então $u \in W^{k+2,2}(\Omega)$ e existe uma constante $C = C(k, \Omega, a^{ij}, b^i, c) > 0$ tal que

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Vamos enunciar abaixo outros dois resultado clássicos de regularidade elíptica.

Teorema 5.17. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio e $u \in W^{1,2}_0(\Omega)$ é solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então

(i) (Agmon, Douglis, Nirenberg) *se Ω é de classe C^2 com $\partial\Omega$ limitada e $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, então $u \in W^{2,p}(\Omega)$ e existe uma constante $C = C(\Omega, p) > 0$ tal que*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

(ii) (Schauder) *se Ω é limitado e de classe $C^{2,\gamma}$, $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ e $u \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, então $u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ e existe uma constante $C = C(\Omega,\gamma) > 0$ tal que*

$$\|u\|_{C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C\|f\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}.$$

Uma observação importante é que, ainda que todos os resultados acima sejam para a equação linear $-\Delta u = f$, é possível usá-los, juntamente com as imersões de Sobolev, no processo de regularização de solução de equação não-lineares do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,u), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.12}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de classe $C^{2,\gamma}$ e $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

O primeiro passo é estender o conceito de solução fraca para esse tipo de problema. A maneira natural de fazer isso é procurar uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int (\nabla u \cdot \nabla v) = \int g(x,u)v, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{5.13}$$

Em geral, o lado direito da expressão acima pode não ser finito. Desse modo, para que a definição faça sentido, precisamos impor algum tipo de condição de crescimento sobre g, de modo a que possamos usar a desigualdade de Hölder e mostrar que a integral envovendo g seja finita.

Vamos então supor que existem c_1, $c_2 \geq 0$ e $1 \leq r \leq 2^* - 1$ tais que

$$|g(x,s)| \leq c_1 + c_2|s|^r, \quad \forall\,(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}, \tag{5.14}$$

quando $n \geq 3$. Se $n \leq 2$, vamos supor o mesmo tipo de condição acima, mas neste caso o expoente $r \geq 1$ pode ser qualquer. Com esta restrição, dados u, $v \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\left|\int g(x,u)v\right| \leq c\int |v| + c_2\int |u|^r|v| = c_1\|v\|_1 + c_2\int |u|^r|v|.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder com expoentes $s = 2^*/r$, $s' = 2^*/(2^* - r)$, obtemos

$$\int |u|^r|v| \leq \left(\int |u|^{2^*}\right)^{r/2^*} \left(\int |v|^{2^*/(2^*-r)}\right)^{(2^*-r)/2^*}.$$

Se $n \leq 2$, é claro que o lado direto acima é finito, visto que $v \in L^q(\Omega)$ para todo $q \geq 2$. Se

$n \geq 3$, podemos usar $r \leq 2^* - 1$ para obter

$$s' = \frac{2^*}{2^* - r} \leq \frac{2^*}{2^* - (2^* - 1)} = 2^*$$

e portanto segue novamente das imersões de Sobolev que

$$\left| \int g(x,u)v \right| \leq c_1 \|v\|_1 + c_2 \|u\|_{2^*}^r \|u\|_{s'} < \infty.$$

Assim, sob a condição de crescimento (5.14), podemos chamar de solução fraca do problema não linear qualquer função $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisfaz (5.13).

Vamos provar o seguinte resultado de regularidade:

Teorema 5.18. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de classe $C^{2,\gamma}$ e $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Hölder contínua satisfazendo (5.14) com $1 \leq r < 2^* - 1$, se $n \geq 3$, e $r \geq 1$ se $n \geq 2$. Se $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca de (5.12), então $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é uma solução clássica.*

Demonstração. Vamos supor inicialmente que $n \geq 3$ e usar um argumento conhecido como "bootstrap". O primeiro passo é usar a imersão de Sobolev para concluir que

$$u \in W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega).$$

Por outro lado, a desigualdade (5.14) implica que

$$|g(x,s)|^{2^*/r} \leq (c_1 + c_2|s|^r)^{2^*/r} \leq c_3 + c_4|s|^{2^*}, \quad \forall\, x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R}.$$

Como Ω é limitado e $u \in L^{2^*}(\Omega)$, segue da expressão acima que

$$g(\cdot, u) \in L^{p_1}(\Omega), \quad \text{com } p_1 = \frac{2^*}{r},$$

de modo que podemos aplicar o item (i) do Teorema 5.17 para concluir que $u \in W^{2,p_1}(\Omega)$. Temos então dois casos a considerar:

Caso 1: $2p_1 > n$.

Nesse caso, usando o item (iii) do Teorema 4.32, obtemos $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Como g é Hölder contínua, temos que

$$|g(x,s) - g(y,t)| \leq c_5 |(x,s) - (y,t)|^\beta, \quad \forall\, x,\ y \in \Omega,\ s,\ t \in \mathbb{R}$$

para algum $\beta \in (0,1]$. Logo, para q.t.p. x, $y \in \Omega$, vale

$$\begin{aligned} |g(x,u(x)) - g(y,u(y))| &\leq c_5\Big(|x-y| + |u(x)-u(y)|\Big)^{\beta} \\ &\leq c_5\Big(|x-y| + c_6|x-y|^{\alpha}\Big)^{\beta} \\ &\leq c_7\Big(|x-y|^{\beta} + |x-y|^{\alpha\beta}\Big). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{|g(x,u(x)) - g(y,u(y))|}{|x-y|^{\alpha\beta}} \leq c_6\Big(|x-y|^{\beta-\alpha\beta} + 1\Big) \leq c_7$$

visto que Ω é limitado e $\beta \geq \alpha\beta$. A expressão acima implica que $g(\cdot,u) \in C^{0,\alpha\beta}(\overline{\Omega})$. Segue então do item (ii) do Teorema 5.17 que $u \in C^{2,\alpha\beta}(\overline{\Omega})$, sendo portanto solução clássica do problema.

Vamos agora analizar o outro caso.

Caso 2: $2p_1 \leq n$.

Nesse caso, usando o item (i) do Teorema 4.32, obtemos

$$u \in W^{2,p_1}(\Omega) \hookrightarrow L^{q_1}(\Omega), \quad q_1 = \frac{np_1}{n-2p_1}.$$

Assim, $g(\cdot,u) \in L^{p_2}(\Omega)$, com $p_2 = \frac{q_1}{r}$, e portanto $u \in W^{2,p_2}(\Omega)$. Se $2p_2 > n$, podemos argumentar como no caso 1 e provar que u é solução clássica. Caso contrário, podemos iterar esse processo k vezes para obter números p_m, q_m, com $m = 1,\ldots,k$, tais que

$$p_1 = \frac{2^*}{r}, \quad p_{m+1} = \frac{q_m}{r}, \quad q_m = \frac{np_m}{n-2p_m},$$

e, além disso, $u \in W^{2,p_m}(\Omega)$ para todo $m = 1, 2, ..., k$.

Afirmamos que, para algum $k \in \mathbb{N}$ grande, vale $2p_k > n$. Se isso for verdade, então

$$u \in W^{2,p_k}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\tilde{\alpha}}(\Omega),$$

o que implica (como antes) que u é solução clássica.

Para verificar a afirmação note que, como $r < 2^* - 1$,

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{q_1}{2^*} = \frac{n}{nr - 2\cdot 2^*} > \frac{n}{n(2^*-1) - 2\cdot 2^*} = 1,$$

e portanto

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \delta,$$

para algum $\delta > 0$. Agora,

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{q_2}{q_1} = \frac{p_2}{p_1}\left(\frac{n-2p_1}{n-2p_2}\right) > \frac{p_2}{p_1} = 1+\delta,$$

donde se conclui que $p_3 > p_2(1+\delta)$. Mas $p_2 = (1+\delta)p_1$ e portanto $p_3 > (1+\delta)^2 p_1$. Iterando esse processo concluímos que

$$p_k > (1+\delta)^{k-1} p_1.$$

Logo, $p_k > 2n$ para algum k suficientemente grande. Isso conclui a prova do teorema no caso $n \geq 3$. O caso $n \geq 2$ pode ser tratado usando somente o caso 1 acima, visto que pelas imersões de Sobolev sabemos que $u \in L^q(\Omega)$, para todo $q \geq 1$. □

Observe que o conceito de solução fraca foi definido para $r \leq 2^* - 1$. No entanto, quando $n \geq 3$, as contas feitas acima funcionam somente quando $r < 2^* - 1$. De fato, se $r = 2^* - 1$ então, no procedimento anterior, temos que $p_2 = p_1$, e portanto não podemos iterar a sequência de modo a obter a continuidade de u. Porém, o caso $r = 2^* - 1$ pode ser tratado através de um resultado de regularidade provado por Brezis e Kato [4], que por sua vez usaram um ideia devida a Moser [14].

Teorema 5.19 (Brezis-Kato)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e suponha que $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ é uma solução fraca de*

$$-\Delta u = a(x)(1+|u|), \text{ em } \Omega,$$

com $a \in L^{n/2}_{loc}(\Omega)$. Então $u \in L^q_{loc}(\Omega)$, para todo $q \geq 1$. Se $u \in W^{1,2}_0(\Omega)$, $a \in L^{n/2}(\Omega)$ e Ω é limitado, então $u \in L^q(\Omega)$ para todo $q \geq 1$.

Demonstração. Vamos provar somente a versão $W^{1,2}_0$ do teorema. A demonstração da versão geral segue as mesmas linhas (cf. Exercício 5.10) da que apresentaremos abaixo.

Dado $s \geq 0$ e $L \geq 1$, defina $v = v_{s,L}$ por

$$v(x) := u(x)\min\{|u|^{2s}, L^2\}$$

e note que

$$\nabla v = \min\{|u|^{2s}, L^2\}\nabla u + \begin{cases} 2s|u|^{2s}\nabla u(x), & \text{se } 0 \leq |u(x)| \leq L \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, se definirmos

$$\Omega_{s,L} := \{x \in \Omega \,:\, |u(x)|^s < L\},$$

então

$$\nabla v = \left[\min\{|u|^{2s}, L^2\} + 2s|u|^{2s}\chi_{\Omega_{s,L}}(x)\right]\nabla u,$$

em que $\chi_{\Omega_{s,L}}$ denota a função característica do conjunto $\Omega_{s,L}$.

Deste modo, usando v como função teste na formulação fraca da equação satisfeita por u, obtemos

$$\int_\Omega \min\{|u|^{2s}, L^2\}|\nabla u|^2 dx + 2s\int_{\Omega_{s,L}} |u|^{2s}|\nabla u|^2 dx \le \int_\Omega a(x)(1+|u|)\min\{|u|^{2s}, L^2\}|u| dx. \quad (5.15)$$

Observa agora que, se

$$w(x) := u(x)\min\{|u|^s, L\},$$

então

$$\nabla w = \left[\min\{|u|^s, L\} + s|u|^s\chi_{\Omega_{s,L}}(x)\right]\nabla u$$

e portanto

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx &= \int_\Omega \min\{|u|^{2s}, L^2\}|\nabla u|^2 dx + 2s\int_{\Omega_{s,L}} |u|^s\min\{|u|^s, L\}|\nabla u|^2 dx \\ &+ s^2\int_{\Omega_{s,L}} |u|^{2s}|\nabla u|^2 dx.\end{aligned}$$

Uma vez que $\min\{|u|^s, L\} = |u|^s$ em $\Omega_{s,L}$, segue que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx &= \int_\Omega \min\{|u|^{2s}, L^2\}|\nabla u|^2 dx + 2s\int_{\Omega_{s,L}} |u|^{2s}|\nabla u|^2 dx + s^2\int_{\Omega_{s,L}} |u|^{2s}|\nabla u|^2 dx \\ &\le (1+2s+s^2)\int_\Omega \min\{|u|^{2s}, L^2\}|\nabla u|^2 dx.\end{aligned}$$

Assim, se definirmos

$$\psi(x) := \min\{|u|^{2s}, L^2\},$$

podemos usar (5.15) para concluir que

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 dx \le c_1(s)\int_\Omega a(x)(1+|u|)\psi(x)|u| dx, \quad (5.16)$$

com $c_1(s) := (1+2s+s^2)$.

Afirmamos agora que

$$\psi(x)|u| \le 2 + \psi(x)|u|^2.$$

De fato, a desigualdade é obvia quando $|u| \ge 1$. Por outro lado, se $|u| < 1$, então $\psi = |u|^{2s}$, pois $L \ge 1$. Neste caso, a desigualdade em destaque acima se escreve como $|u|^{2s+1} \le 2 + |u|^{2s+2}$, que é claramente verdadeira.

Usando a afirmação, obtemos $(1+|u|)\psi(x)|u| \le 2 + 2\psi(x)|u|^2$, e portanto segue de (5.16) que

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 dx \le 2c_1 \int_\Omega a(x)dx + 2c_1 \int_\Omega a(x)\psi(x)|u|^2 dx \le c_2 + 2c_1 \int_\Omega a(x)\psi(x)|u|^2 dx,$$

com $c_2 = c_2(s,a,\Omega) = 2c_1\|a\|_{L^{n/2}(\Omega)}|\Omega|^{(n-2)/n}$. Naturalmente, podemos supor que $n \ge 3$ pois, caso contrário, o teorema segue diretamente da imersão de Sobolev (cf. Teorema 4.32).

Dado $q \ge 1$, é claro que $u \in L^q(\Omega)$, se $1 \le q \le 2$, visto que Ω é limitado. Podemos então supor que $q > 2$. A ideia é mostrar que, se $u \in L^{2(s+1)}(\Omega)$, então $u \in L^{2(s+1)\frac{n}{n-2}}(\Omega)$. Se isso for verdade, como $n/(n-2) > 1$, podemos começar com $s = 0$ e, após um número finito de iterações, obter $q_0 \ge q$ tal que $u \in L^{q_0}(\Omega)$.

Vamos então mostrar a veracidade da primeira afirmação do parágrafo acima. Para $M > 0$ arbitrário, temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla w|^2 dx &\le c_2 + 2c_1 M \int_{\{a(x)<M\}} |u|^{2s}|u|^2 dx + 2c_1 \int_{\{a(x)\ge M\}} a(x)\psi(x)|u|^2 dx \\
&\le c_3(s,a,\Omega,M,\|u\|_{L^{2(s+1)}(\Omega)}) \\
&+ 2c_1 \left(\int_{\{a(x)\ge M\}} a(x)^{n/2} dx\right)^{2/n} \left(\int_\Omega \left[\psi(x)^{1/2}u\right]^{2^*} dx\right)^{2/2^*}.
\end{aligned}$$

Como $w = \psi^{1/2}u$, segue da imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2n/(n-2)}(\Omega)$ que

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 dx \le c_3 + c_4 \left(\int_{\{a(x)\ge M\}} a(x)^{n/2} dx\right)^{2/n} \int_\Omega |\nabla w|^2 dx, \tag{5.17}$$

em que $c_4 = c_4(s,a,\Omega,M,\|u\|_{L^{2(s+1)}(\Omega)})$. Uma vez que $a \in L^{n/2}(\Omega)$, vale

$$\lim_{M\to+\infty} \int_{\{a(x)\ge M\}} a(x)^{n/2} dx = 0,$$

e portanto podemos escolher $M > 0$ grande de modo que a integral acima seja menor que $1/(2c_4)$. Desse modo, usando (5.17) e lembrando que $w(x) = u(x)\min\{|u|^s, L\}$, concluímos que

$$\int_\Omega |\nabla (u\min\{|u|^s, L\})|^2 dx \le 2c_3.$$

Usando novamente a imersão de Sobolev,

$$\left(\int_\Omega |u\min\{|u|^s,L\}|^{2^*} dx\right)^{2/2^*} \le c_5(N) \int_\Omega |\nabla (u\min\{|u|^s,L\})|^2 dx \le 2c_3c_5,$$

com a constante do lado direito acima dependendo somente de s, a, Ω, M e $\|u\|_{L^{2(s+1)}(\Omega)}$. Como L

é arbitrário, podemos fazer $L \to +\infty$ na desigualdade acima e usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para concluir que $\int_\Omega |u|^{2^*(s+1)}dx < \infty$, isto é,

$$u \in L^{2(s+1)\frac{n}{n-2}}(\Omega).$$

Isso conclui a prova do teorema. $\square$

Vamos usar o resultado acima para mostrar que o Teorema 5.18 permanece válido quando $n \geq 3$ e a função g tem crescimento crítico, isto é,

$$|g(x,s)| \leq c_1 + c_2|s|^{2^*-1}, \quad \forall\,(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

com c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. Observe inicialmente que, se $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca de (5.12), então u é solução fraca de

$$-\Delta u = a(x)(1+|u|), \quad \text{em } \Omega, \qquad u = 0, \quad \text{em } \partial\Omega,$$

com

$$a(x) = \frac{g(x,u)}{1+|u|}.$$

Se pudermos aplicar o Teorema de Brezis-Kato então as imersões

$$W^{2,q}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1-n/q}(\Omega)$$

para $q > n$ implicam que u é Hölder contínua. Usando agora o fato de que g é também Hölder contínua, podemos proceder como na parte final do Caso 1 acima e concluir que u é solução clássica.

Para verificar que $a \in L^{n/2}(\Omega)$ observe que

$$|a(x)| = \frac{|g(x,u)|}{1+|u|} \leq \frac{c_1 + c_2|u|^{2^*-1}}{1+|u|} \leq c_1 + c_2|u|^{2^*-2}.$$

Logo,

$$\int |a(x)|^{n/2} \leq c_1|\Omega| + c_2 \int |u|^{(2^*-2)n/2} = c_1|\Omega| + c_2 \int |u|^{2^*} < \infty,$$

visto que Ω é limitado e $u \in L^{2^*}(\Omega)$.

5.4 Exercícios

Atenção: Nos exercícios abaixo, a menos que se diga o contrário, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado de classe C^1.

5.1. Resolva os exercícios 1 a 3, e 5 a 9 da Seção 6.6 do livro do Evans [5].

5.2. Complete a prova do Teorema 5.3, mostrando as afirmações depois da equação (5.5).

5.3. Prove a equação (5.7).

5.4. Complete os detalhes da prova do Teorema 5.7.

5.5. Prove o Teorema 5.9.

5.6. Mostre que as autofunções do problema (PA) são ortogonais também em $L^2(\Omega)$. Em seguida, considerando $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $V_k \subset H_0^1(\Omega)$ o subespaço gerado por $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$, mostre as seguintes desigualdades variacionais

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \lambda_k \int_\Omega u^2, \quad \forall\, u \in V_k,$$

e

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \geq \lambda_{k+1} \int_\Omega u^2, \quad \forall\, u \in V_k^\perp,$$

Em particular, se tomarmos $k = 0$, a desigualdade acima é a desigualdade de Poincaré.

5.7. Sejam $\Omega_1 \subset \Omega_2$ domínios limitados e $\lambda_1(\Omega_i)$ o primeiro autovalor do problema (PA) com $\Omega = \Omega_i$. Mostre que $\lambda_1(\Omega_2) \leq \lambda_1(\Omega_1)$.

5.8. Faça o estudo do problema de autovalor

$$\begin{cases} Lu &= \lambda u, & \text{em } \Omega, \\ u &= 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado e L é um operador simétrico e uniformemente elíptico da forma

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n (a^{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + c(x)u,$$

com os coeficientes limitados e $c \geq 0$ em Ω.

5.9. Faça o estudo do problema de autovalor com peso

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda m(x) u, & \text{em } \Omega, \\ u &= 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado e $m \in L^r(\Omega)$ para algum $r > n/2$. Em seguida, obtenha desigualdades análogas às do Exercício 5.6 nesse novo contexto.

5.10. Prove a versão geral do Teorema 5.19 considerando, no iníco da prova, a função $v = u \min\{|u|^{2s}, L^2\}\eta^2$, em que $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$.

Sugestão: cf. [17, Lema B.2]

Referências Bibliográficas

[1] R. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975. 3.3, 4.3, 4.3, 4.4.1, 4.32

[2] S. Agmon S., A. Douglis A., L. Nirenberg, *Estimatives near the boundary for solutions of elliptic P. D. E. satisfying a general boundary value condition I*, Comm. Pure Appl. Math. **12** (1959), 623-727.

[3] H. Brézis, *Analise Functionelle*, Masson, Paris, 1983. 4.1, 5.2, 5.2

[4] H. Brézis, T. Kato, *Remarks on the Schrödinger operator with singular complex potentials*, J. Math. Pures Appl. **58** (1979), 137-151. 5.3

[5] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Math. Soc. (1998). (document), 1.7, 1.8, 2.3, 2.3, 2.8, 4.3, 4.4.1, 4.4.1, 4.4.1, 4.4.2, 5.3, 5.3, 5.1

[6] D. G. de Figueiredo, *Equações Elípticas Não-Lineares*, IMPA 11o. CBM (1977) (document), 2.1

[7] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order* Springer-Verlag, Berlin, 1977 (2a edição 1984). (document), 2.1, 2.2, 2.2, 2.3, 3.2, 3.3, 3.3, 4.6, 4.6

[8] Q. Han e F. Lin, *Elliptic Partial Differential Equations*, American Math. Soc.(1997) 1.10, 3.1

[9] O.D. Kellogg, *On the derivatives of harmonic functions on the boundary*, Trans. Amer. Math. Soc. **33** (1931), 486–510. 2.2

[10] A. Kufner, O. John, S. Fucik, *Function spaces*, Ed. Acad., (1977) 4.2

[11] E. Lieb e M. Loss, *Analysis*, 1a ed. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 1997. (Graduate Studies in Mathematics, 14)

[12] N.G. Meyers e J. Serrin, $H = W$, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **51** (1964), 1055–1056. 4.3

[13] D. Mitrovic, D. Zubrinic, *Fundamentals of applied functional analysis: 91 - Distributions, Sobolev spaces, nonlinear elliptic equations*, Chapman and Hall/CRC, (1997) 4.1, 4.2, 4.4, 4.4.1, 4.6, 4.6, 4.6, 4.6

[14] J. Moser, *A new proof of De Giorgi's theorem*, Commun. Pure Appl. Math. **13** (1960) 457–468 5.3

[15] A. Ponce, *Métodos clássicos em Teoria do Potencial*, Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro, 2006. (document), 2.1, 2.3, 2.4, 2.5

[16] M. Protter e H. Weinberger, *Maximum principles in differential equations*, Prentice-Hall (1967).

[17] M. Struwe, *Variational Methods - Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag (2008) 5.4

[18] H. Whitney, *Geometric Integration Theory*, Princeton Univ. Press (1957). 1.1