Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Introdução a Álgebra Linear
Lista 1/01 – 1º/2022

Exercício 1. Escreva todos os elementos de A^n.

1. $A = \{1, 2, 3\}$, $n = 2$.
2. $A = \{1, 2\}$, $n = 3$.
3. $A = \{\text{🐮}, \text{😺}\}$, $n = 3$.
4. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $n = 1$.
5. $A = \{1, \text{🐮}, 1, 7, 7, \text{😺}\}$, $n = 2$.

Exercício 2. Escreva todos os elementos dos conjuntos indicados.

1. $\{1, 2, 3\} \times \{x, y, z\}$.
2. $\{1, 2\} \times \{a, b\} \times \{\pi, 2\pi\}$.
3. $(\{1, 2\} \times \{a, b\}) \times \{\pi, 2\pi\}$.
4. $\{1, 2\} \times (\{a, b\} \times \{\pi, 2\pi\})$.
5. $\{\text{🐮}, \text{😺}\} \times \{1, \text{🐮}, \text{😺}\}$.

Exercício 3. Considere os conjuntos não vazios $A, B \subset \mathbb{C}$. Para cada escolha possível de $a \in A$ e $b \in B$, Joãozinho calculou o produto ab, e depois somou todos esses produtos. Utilizando o símbolo $\sum$, escreva o cálculo que foi feito por Joãozinho.

Exercício 4. Considere conjuntos não vazios $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_{10}$, cujos elementos são matrizes de tamanho 15×15. Para cada escolha possível de matrizes $M_1 \in \mathscr{A}_1, \cdots, M_{10} \in \mathscr{A}_{10}$, Pedrinho calculou o produto $M_1 \cdots M_{10}$, e depois somou todos esses produtos. Utilizando os símbolos $\sum$ e $\prod$, escreva o cálculo que foi feito por Pedrinho.

Exercício 5. Suponha que a função

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

tenha a seguinte propriedade:

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Usando essa propriedade, transforme o f de uma soma a seguir em soma de f's:

$$f\left(a_1^2 + \cdots + a_{32}^2\right).$$

Exercício 6. Suponha que a função

$$B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

tenha as seguintes propriedades:

1. $B(a, x + y) = B(a, x) + B(a, y)$.
2. $B(a + b, x) = B(a, x) + B(b, x)$.

Observe que essas duas propriedades são muito semelhantes à distributividade $a(x + y) = ax + ay$.

Então, usando essas propriedades, transforme o B de somas a seguir em uma soma de B's:

$$B\left(a_1^2 + \cdots + a_{12}^2, b_1^3 + \cdots + b_7^3\right).$$

Exercício 7. Suponha que a função

$$B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

tenha as seguintes propriedades:

1. $B(a, x + y) = B(a, x) + B(a, y)$.
2. $B(a + b, x) = B(a, x) + B(b, x)$.

Observe que essas duas propriedades são muito semelhantes à distributividade $a(x + y) = ax + ay$.

Então, dados os conjuntos finitos e não vazios $A, B \subset \mathbb{R}$, usando essas propriedades, transforme o B de somas a seguir em uma soma de B's:

$$B\left(\sum_{a \in A} a, \sum_{b \in B} b\right).$$

Exercício 8. Escreva com somatórios e produtórios em termos de elementos em produtos de conjuntos.

1. $(a_1 + a_2)^3$.

   Solução.
   $$(a_1 + a_2)^3 = \sum_{\iota \in [2]^3} a_{\iota_1} a_{\iota_2} a_{\iota_3}.$$

2. $(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(c_1 + c_2)$.
3. $(a_1 + \cdots + a_m)^n$.
4. $(a_1 + \cdots + a_m)(b_1 + \cdots + b_m)$.
5. $(a_{11} + \cdots + a_{1n})(a_{21} + \cdots + a_{2n})$.

Introdução a Álgebra Linear
Lista 1/01 – 1º/2022

Exercício 9. Escreva com somatórios e produtórios usando funções como variáveis do somatório e do produtório.

1. $(a_1 + a_2)^3$.

   Solução.
   $$(a_1 + a_2)^3 = \sum_{f:[3]\to[2]} a_{f(1)}a_{f(2)}a_{f(3)}.$$

2. $(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(c_1 + c_2)$.
3. $(a_1 + \cdots + a_m)^n$.
4. $(a_1 + \cdots + a_m)(b_1 + \cdots + b_m)$.
5. $(a_{11} + \cdots + a_{1n})(a_{21} + \cdots + a_{2n})$.

Exercício 10. Dê três exemplos de funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que sejam injetivas, mas não sejam sobrejetivas.

Exercício 11. Dê três exemplos de funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que sejam sobrejetivas, mas não sejam injetivas.

Exercício 12. As funções a seguir **não** estão bem definidas. Justifique.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}.$
2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x^2 & \mapsto & x \end{array}.$
3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \to & \mathbb{R}^2 \\ \frac{a}{b} & \mapsto & (a,b) \end{array}$, onde $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}^*$.

Exercício 13. Considere as funções

$$\begin{array}{rcccrccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & x^3 + 10x & & x & \mapsto & (x^2, x^3) \\ h: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} & k: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x+y & & x & \mapsto & |x| \end{array}.$$

As seguintes composições estão bem-definidas? Para as que estiverem bem-definidas, escreva: domínio, contra-domínio e uma fórmula.

$(f \circ g)$ $\quad$ $(h \circ g)$ $\quad$ $(h \circ h)$ $\quad$ $(f \circ f)$ $\quad$ $(h \circ g) \circ f$ $\quad$ $(k \circ h) \circ (g \circ f) \circ f$