Introdução a Álgebra Linear – Turma ___
Prova 2 – 2º/2019

Nome: **Matrícula** (1)
Assinatura:

Atenção: quando tratamos da matriz de uma transformação linear ou vice-versa, estamos considerando *vetores coluna* sendo multiplicados à direita da matriz.

Questão 1 **(1,0 ponto):** Encontre duas retas **ortogonais** entre si, que sejam paralelas ao plano

$$P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 4x + 6y + 4z = 3y + 6z + 1342 \right\},$$

e que passem pelo ponto $(-1, -4, 5)$.

$$r = \left\{ \boxed{} + t \boxed{} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$
$$s = \left\{ \boxed{} + t \boxed{} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Questão 2 **(1,0 ponto):** Encontre o plano Q, que é paralelo ao plano

$$P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 4x + 5y + 6z = 2y + 7z + 342 \right\},$$

e que passa pelo ponto $\vec{q} = (-7, 2, -1)$.

$$Q = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \boxed{} \cdot \vec{v} = \boxed{} \right\}.$$

Questão 3 **(1,0 ponto):** Decompanha o vetor $\vec{v} = (15, 44, -20)$ em uma componente paralela ao vetor $(2, 3, -1)$, e uma componente ortogonal:

$$\vec{v} = \boxed{}(2, 3, -1) + \boxed{}.$$

Questão 4 **(1,0 ponto):** Considere a transformação linear

$$S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

tal que

$$S\vec{e}_1 = (1, 1, -2), \quad S\vec{e}_2 = (-1, 1, -1) \quad \text{e} \quad S\vec{e}_3 = (0, 1, 0),$$

e a transformação

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & \vec{v} & \mapsto & (4, 3, -2) \cdot \vec{v} \end{array}.$$

Então, o vetor $\vec{a}$ tal que

$$\begin{array}{rccl} T \circ S: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & \vec{v} & \mapsto & \vec{a} \cdot \vec{v} \end{array}$$

é

$$\vec{a} = \boxed{}.$$

Questão 5 **(1,0 ponto):** A interseção dos planos

$$P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 1x + 1y + 2z = 0 \right\}$$
$$Q = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -1x + 1y + 2z = 6 \right\}$$

é dada pela reta

$$P \cap Q = \left\{ \boxed{} + t\, \boxed{} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nome: **Matrícula**
Assinatura:

Questão 6 (1,0 ponto): Seja $P \subset \mathbb{R}^3$ o plano que passa pelos pontos $\vec{p} = (1,2,3)$, $\vec{q} = (4,5,6)$ e $\vec{r} = (7,8,9)$; e uma de suas direções tangentes é dada pelo vetor $\vec{t} = (1,1,-1)$. Então,

$$P = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \det(\vec{v}, \vec{a}, \vec{b}) = \det(\vec{r}, \vec{a}, \vec{b}) \right\},$$

onde $\vec{a}$ e $\vec{b}$ podem ser, por exemplo,

$$\vec{a} = \boxed{} \quad \text{e} \quad \vec{b} = \boxed{}.$$

Questão 7 (1,0 ponto): Seja

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

uma transformação linear. Sabendo que

$$T(-3,2,2) = T(1,2,2) = 0 \quad \text{e} \quad T(0,0,1) = 3,$$

então, o vetor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, tal que

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & \vec{v} & \mapsto & \vec{a} \cdot \vec{v} \end{array}$$

é

$$\vec{a} = \boxed{}.$$

Questão 8 (1,0 ponto): Considere os vetores $\vec{w} = (1,2,3)$, $\vec{k} = (1,1,1)$ e $\vec{h} = (1,1,0)$. Então, o vetor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$,

$$\det(\vec{v} + \vec{w}, \vec{w}, \vec{k} + \vec{v} + \vec{h}) = \vec{a} \cdot \vec{v}$$

é

$$\vec{a} = \boxed{}.$$

Questão 9 (1,0 ponto): Seja P um plano que passa pelo ponto $(5,6,7)$, e que não intersecta as retas

$$r(t) = (5+t, 9+t, t-3)$$
$$s(t) = (5+t, 7+2t, 3t-3).$$

Então,

$$P = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \det(\vec{v}, \vec{b}, \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \right\},$$

onde $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ podem ser, por exemplo,

$$\vec{a} = \boxed{}, \quad \vec{b} = \boxed{} \quad \text{e} \quad \vec{c} = \boxed{}.$$

Questão 10 (1,0 ponto): Seja $P \subset \mathbb{R}^3$ um plano que passa pela origem. Suponha que os pontos $\vec{p} = (1,2,3)$ e $\vec{q} = (1,1,1)$ estão no plano, e que

$$\det \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 1 \end{bmatrix} = 11.$$

Então, a distância d entre o ponto (x,y,z) até o plano P é dada por

$$d = \boxed{}.$$

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Introdução a Álgebra Linear – Turma ___
Prova 2 – 2º/2019

Nome: **Matrícula** (2)
Assinatura:

Atenção: quando tratamos da matriz de uma transformação linear ou vice-versa, estamos considerando *vetores coluna* sendo multiplicados à direita da matriz.

Questão 1 **(1,0 ponto):** Encontre duas retas **ortogonais** entre si, que sejam paralelas ao plano

$$P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 4x + 8y + 6z = 5y + 7z - 1675 \right\},$$

e que passem pelo ponto $(-1, -4, 5)$.

$$r = \left\{ \boxed{} + t \boxed{} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$
$$s = \left\{ \boxed{} + t \boxed{} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Questão 2 **(1,0 ponto):** Encontre o plano Q, que é paralelo ao plano

$$P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x + 6y + 6z = 3y + 7z - 342 \right\},$$

e que passa pelo ponto $\vec{q} = (-7, 2, -1)$.

$$Q = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \boxed{} \cdot \vec{v} = \boxed{} \right\}.$$

Questão 3 **(1,0 ponto):** Decompanha o vetor $\vec{v} = (79, 83, -51)$ em uma componente paralela ao vetor $(4, 3, -2)$, e uma componente ortogonal:

$$\vec{v} = \boxed{}(4, 3, -2) + \boxed{}.$$

Questão 4 **(1,0 ponto):** Considere a transformação linear

$$S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

tal que

$$S\vec{e}_1 = (1, 3, -1), \quad S\vec{e}_2 = (1, -1, 1) \quad \text{e} \quad S\vec{e}_3 = (0, 1, 0),$$

e a transformação

$$\begin{array}{rcl} T: \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ \vec{v} & \mapsto & (4, 3, -2) \cdot \vec{v} \end{array}.$$

Então, o vetor $\vec{a}$ tal que

$$\begin{array}{rcl} T \circ S: \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ \vec{v} & \mapsto & \vec{a} \cdot \vec{v} \end{array}$$

é

$$\vec{a} = \boxed{}.$$

Questão 5 **(1,0 ponto):** A interseção dos planos

$$P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 1x + 1y + 2z = 1 \right\}$$
$$Q = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -1x + 2y + 2z = 9 \right\}$$

é dada pela reta

$$P \cap Q = \left\{ \boxed{} + t \boxed{} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nome: **Matrícula**
Assinatura:

Questão 6 **(1,0 ponto):** Seja $P \subset \mathbb{R}^3$ o plano que passa pelos pontos $\vec{p} = (1,2,3)$, $\vec{q} = (4,5,6)$ e $\vec{r} = (7,8,9)$; e uma de suas direções tangentes é dada pelo vetor $\vec{t} = (1,1,-1)$. Então,

$$P = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \det(\vec{v}, \vec{a}, \vec{b}) = \det(\vec{r}, \vec{a}, \vec{b}) \right\},$$

onde $\vec{a}$ e $\vec{b}$ podem ser, por exemplo,

$$\vec{a} = \boxed{} \quad \text{e} \quad \vec{b} = \boxed{}.$$

Questão 7 **(1,0 ponto):** Seja

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

uma transformação linear. Sabendo que

$$T(-3,2,2) = T(1,2,2) = 0 \quad \text{e} \quad T(0,0,1) = -3,$$

então, o vetor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, tal que

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & \vec{v} & \mapsto & \vec{a} \cdot \vec{v} \end{array}$$

é

$$\vec{a} = \boxed{}.$$

Questão 8 **(1,0 ponto):** Considere os vetores $\vec{w} = (1,2,3)$, $\vec{k} = (1,1,1)$ e $\vec{h} = (1,1,0)$. Então, o vetor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$,

$$\det(\vec{v} + \vec{w}, \vec{w}, \vec{k} + \vec{v} + \vec{h}) = \vec{a} \cdot \vec{v}$$

é

$$\vec{a} = \boxed{}.$$

<u>Questão 9 (1,0 ponto):</u> Seja P um plano que passa pelo ponto $(5, 6, 7)$, e que não intersecta as retas

$$\begin{aligned} r(t) &= (5 + t, 9 + t, t - 3) \\ s(t) &= (5 + t, 7 + 2t, 3t - 3). \end{aligned}$$

Então,

$$P = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \det(\vec{v}, \vec{b}, \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \right\},$$

onde $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ podem ser, por exemplo,

$$\vec{a} = \boxed{\qquad\qquad}, \quad \vec{b} = \boxed{\qquad\qquad} \quad \text{e} \quad \vec{c} = \boxed{\qquad\qquad}.$$

<u>Questão 10 (1,0 ponto):</u> Seja $P \subset \mathbb{R}^3$ um plano que passa pela origem. Suponha que os pontos $\vec{p} = (1, 2, 3)$ e $\vec{q} = (1, 1, 1)$ estão no plano, e que

$$\det \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 1 \end{bmatrix} = 11.$$

Então, a distância d entre o ponto (x, y, z) até o plano P é dada por

$$d = \boxed{\qquad}.$$

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Introdução a Álgebra Linear – Turma ___
Prova 2 – 2º/2019

Nome: **Matrícula** (3)
Assinatura:

Atenção: quando tratamos da matriz de uma transformação linear ou vice-versa, estamos considerando *vetores coluna* sendo multiplicados à direita da matriz.

Questão 1 **(1,0 ponto):** Encontre duas retas **ortogonais** entre si, que sejam paralelas ao plano

$$P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 4x + 8y + 4z = 5y + 6z - 1675 \right\},$$

e que passem pelo ponto $(-1, -4, 5)$.

$$r = \left\{ \boxed{} + t \boxed{} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$
$$s = \left\{ \boxed{} + t \boxed{} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Questão 2 **(1,0 ponto):** Encontre o plano Q, que é paralelo ao plano

$$P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x + 6y + 5z = 3y + 6z - 342 \right\},$$

e que passa pelo ponto $\vec{q} = (-7, 2, -1)$.

$$Q = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \boxed{} \cdot \vec{v} = \boxed{} \right\}.$$

Questão 3 **(1,0 ponto):** Decompanha o vetor $\vec{v} = (87, 71, -53)$ em uma componente paralela ao vetor $(4, 3, -2)$, e uma componente ortogonal:

$$\vec{v} = \boxed{}(4, 3, -2) + \boxed{}.$$

Questão 4 **(1,0 ponto):** Considere a transformação linear

$$S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

tal que

$$S\vec{e}_1 = (1, 1, -2), \quad S\vec{e}_2 = (-1, 1, -1) \quad \text{e} \quad S\vec{e}_3 = (0, 1, 0),$$

e a transformação

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ \vec{v} &\mapsto (4, 3, -1) \cdot \vec{v} \end{aligned}.$$

Então, o vetor $\vec{a}$ tal que

$$\begin{aligned} T \circ S : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ \vec{v} &\mapsto \vec{a} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

é

$$\vec{a} = \boxed{}.$$

Questão 5 **(1,0 ponto):** A interseção dos planos

$$P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x + 1y + 2z = -3 \right\}$$
$$Q = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -1x + 2y + 2z = 7 \right\}$$

é dada pela reta

$$P \cap Q = \left\{ \boxed{} + t \boxed{} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nome: **Matrícula**

Assinatura:

Questão 6 **(1,0 ponto):** Seja $P \subset \mathbb{R}^3$ o plano que passa pelos pontos $\vec{p} = (1, 2, 3)$, $\vec{q} = (4, 5, 6)$ e $\vec{r} = (7, 8, 9)$; e uma de suas direções tangentes é dada pelo vetor $\vec{t} = (1, 1, -1)$. Então,

$$P = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \det(\vec{v}, \vec{a}, \vec{b}) = \det(\vec{r}, \vec{a}, \vec{b}) \right\},$$

onde $\vec{a}$ e $\vec{b}$ podem ser, por exemplo,

$$\vec{a} = \boxed{} \quad \text{e} \quad \vec{b} = \boxed{}.$$

Questão 7 **(1,0 ponto):** Seja

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

uma transformação linear. Sabendo que

$$T(-3, 2, 2) = T(2, 1, 1) = 0 \quad \text{e} \quad T(0, 0, 1) = -3,$$

então, o vetor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, tal que

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & \vec{v} & \mapsto & \vec{a} \cdot \vec{v} \end{array}$$

é

$$\vec{a} = \boxed{}.$$

Questão 8 **(1,0 ponto):** Considere os vetores $\vec{w} = (1, 2, 3)$, $\vec{k} = (1, 1, 1)$ e $\vec{h} = (1, 1, 0)$. Então, o vetor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ tal que para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$,

$$\det(\vec{v} + \vec{w}, \vec{w}, \vec{k} + \vec{v} + \vec{h}) = \vec{a} \cdot \vec{v}$$

é

$$\vec{a} = \boxed{}.$$

Questão 9 **(1,0 ponto):** Seja P um plano que passa pelo ponto $(5, 6, 7)$, e que não intersecta as retas

$$r(t) = (5 + t, 9 + t, t - 3)$$
$$s(t) = (5 + t, 7 + 2t, 3t - 3).$$

Então,

$$P = \left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \det(\vec{v}, \vec{b}, \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \right\},$$

onde $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ podem ser, por exemplo,

$$\vec{a} = \boxed{\qquad\qquad}, \quad \vec{b} = \boxed{\qquad\qquad} \quad \text{e} \quad \vec{c} = \boxed{\qquad\qquad}.$$

Questão 10 **(1,0 ponto):** Seja $P \subset \mathbb{R}^3$ um plano que passa pela origem. Suponha que os pontos $\vec{p} = (1, 2, 3)$ e $\vec{q} = (1, 1, 1)$ estão no plano, e que

$$\det \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 1 \end{bmatrix} = 11.$$

Então, a distância d entre o ponto (x, y, z) até o plano P é dada por

$$d = \boxed{\qquad}.$$