Introdução a Álgebra Linear – Turma ___
Prova 3 – 2º/2019

Nome: **Matrícula** (1)
Assinatura:

> **Atenção:** quando tratamos da matriz de uma transformação linear ou vice-versa, estamos considerando *vetores coluna* sendo multiplicados à direita da matriz.

Questão 1 (2,0 pontos – penalização 0,2): Julgue (V)erdadeiro ou (F)also.

(a) (   ) Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 33 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 35 & 0 \\ 0 & 35 \end{bmatrix}.$$

Com respeito à transformação linear cuja representação matricial é dada por ADA^{-1}, $(25, 33)$ é autovetor de autovalor 5.

(b) (   ) Se a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tem representação matricial

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então $(34, 33, -54)$ é um autovetor não nulo de T.

(c) (   ) Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é tal que

$$T(25, 33) = 13(25, 33) \quad \text{e} \quad T(-35, 23) = 13(-35, 23),$$

então existe um elemento não nulo de $\mathbb{R}^2$ que não é autovetor de T.

(d) (   ) Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sempre tem um autovetor não nulo.

(e) (   ) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear, com $\vec{a}$ e $\vec{b}$ satisfazendo $T\vec{a} = \vec{a}$ e $T\vec{b} = -\vec{b}$. Então T é diagonalizavel.

Questão 2 **(1,0 ponto):** Encontre todos os autovalores reais de S e T:

1. $$S : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+4y, 4x+y) \end{array}.$$

   $$\text{Autovalores} = \boxed{}.$$

2. $$T : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+4z, 5y, 4x+z) \end{array}.$$

   $$\text{Autovalores} = \boxed{}.$$

Questão 3 **(2,0 pontos – penalização 0,3):** Julgue (V)erdadeiro ou (F)also.

(a) ( ) Três vetores de $\mathbb{R}^3$ podem formar ou não uma base.

(b) ( ) Quatro vetores de $\mathbb{R}^3$ são geradores.

(c) ( ) Quatro vetores de $\mathbb{R}^3$ são sempre linearmente depententes.

(d) ( ) Vetores de $\mathbb{R}^3$ que são linearmente independentes formam uma base.

Nome: **Matrícula**
Assinatura:

Questão 4 **(2,0 ponto)**: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que

$$
\begin{aligned}
&T(2,11) = (12,2) && T(6,1) = (4,22)\\
&T(-2,5) = (4,-10) && T(4,-2) = (0,16)\\
&T(-4,2) = (0,-16) && T(0,8) = (8,-4)\\
&T(2,3) = (4,6) && T(-2,13) = (12,-14).
\end{aligned}
$$

Encontre $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e uma matriz A tais que

$$[T] = A\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} A^{-1}.$$

Resposta:

$\alpha = \boxed{}$ $\beta = \boxed{}$ $A = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}.$

Questão 5 **(2,0 ponto):** Dada a transformação linear

$$T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (3x, 7x+2y) \end{array},$$

encontre $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e uma matriz A tais que

$$[T] = A \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} A^{-1}.$$

Resposta:

$$\alpha = \boxed{\quad\quad} \qquad \beta = \boxed{\quad\quad} \qquad A = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}.$$

Questão 6 **(1,0 ponto):** Considere as matrizes

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que as matrizes M e N são inversas uma da outra, escreva no retângulo abaixo um autovetor não nulo do produto NDM, correspondente ao autovalor 1.

Um autovetor não nulo de NDM: $\boxed{\quad\quad\quad\quad}$.

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Introdução a Álgebra Linear – Turma ___
Prova 3 – 2º/2019

Nome: **Matrícula** (2)
Assinatura:

> **Atenção:** quando tratamos da matriz de uma transformação linear ou vice-versa, estamos considerando *vetores coluna* sendo multiplicados à direita da matriz.

Questão 1 **(2,0 pontos – penalização 0,2):** Julgue (V)erdadeiro ou (F)also.

(a) (   ) Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 35 & 25 \\ 23 & -33 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 23 & 0 \\ 0 & 23 \end{bmatrix}.$$

Com respeito à transformação linear cuja representação matricial é dada por ADA^{-1}, $(35, 23)$ é autovetor de autovalor 1.

(b) (   ) Se a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tem representação matricial

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então $(34, 33, -33)$ é um autovetor não nulo de T.

(c) (   ) Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é tal que

$$T(35, 23) = 13(35, 23) \quad \text{e} \quad T(-25, 33) = 13(-25, 33),$$

então

$$[T] = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}.$$

(d) (   ) Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pode não ter nenhum autovetor não nulo.

(e) (   ) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear, com $\vec{a}$ e $\vec{b}$ satisfazendo $T\vec{a} = \vec{a}$ e $T\vec{b} = -\vec{b}$. Então T é diagonalizavel.

Questão 2 **(1,0 ponto):** Encontre todos os autovalores reais de S e T:

1. $$S : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + 5y, 5x + y) \end{array}.$$

   $$\text{Autovalores} = \boxed{}.$$

2. $$T : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + 5z, -7y, 5x + z) \end{array}.$$

   $$\text{Autovalores} = \boxed{}.$$

Questão 3 **(2,0 pontos – penalização 0,3):** Julgue (V)erdadeiro ou (F)also.

(a) (   ) Três vetores de $\mathbb{R}^3$ podem formar ou não uma base.

(b) (   ) Quatro vetores de $\mathbb{R}^3$ são geradores.

(c) (   ) Quatro vetores de $\mathbb{R}^3$ são sempre linearmente depententes.

(d) (   ) Vetores de $\mathbb{R}^3$ que são linearmente independentes formam uma base.

Nome: **Matrícula**

Assinatura:

Questão 4 **(2,0 ponto)**: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que

$$
\begin{aligned}
&T(6,-5) = (14,-15) && T(2,0) = (4,0) \\
&T(0,5) = (-2,15) && T(-2,10) = (-8,30) \\
&T(2,5) = (2,15) && T(-2,5) = (-6,15) \\
&T(-4,5) = (-10,15) && T(4,-5) = (10,-15).
\end{aligned}
$$

Encontre $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e uma matriz A tais que

$$[T] = A \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} A^{-1}.$$

Resposta:

$\alpha = \boxed{}$ $\quad \beta = \boxed{}$ $\quad A = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}.$

Questão 5 **(2,0 ponto):** Dada a transformação linear

$$T: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (6x, 7x+2y) \end{array},$$

encontre $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e uma matriz A tais que

$$[T] = A \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} A^{-1}.$$

Resposta:

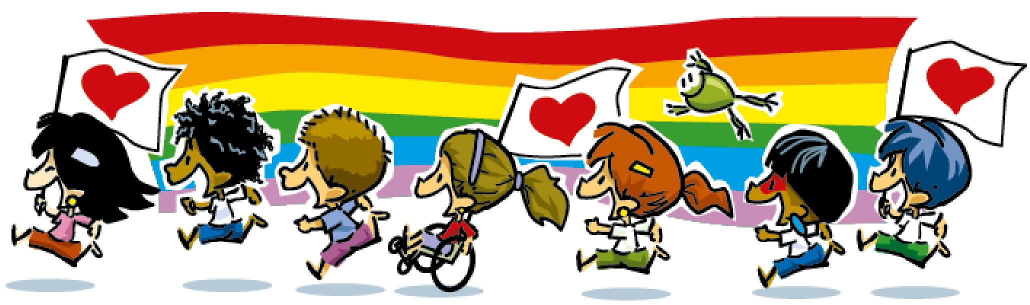
$$\alpha = \boxed{} \qquad \beta = \boxed{} \qquad A = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}.$$

Questão 6 **(1,0 ponto):** Considere as matrizes

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que as matrizes M e N são inversas uma da outra, escreva no retângulo abaixo um autovetor não nulo do produto NDM, correspondente ao autovalor 1.

Um autovetor não nulo de NDM: $\boxed{}$.



Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Introdução a Álgebra Linear – Turma ___
Prova 3 – 2º/2019

Nome: **Matrícula** (3)
Assinatura:

> **Atenção:** quando tratamos da matriz de uma transformação linear ou vice-versa, estamos considerando *vetores coluna* sendo multiplicados à direita da matriz.

Questão 1 **(2,0 pontos – penalização 0,2):** Julgue (V)erdadeiro ou (F)also.

(a) ( ) Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 35 & -15 \\ 23 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 35 \end{bmatrix}.$$

Com respeito à transformação linear cuja representação matricial é dada por ADA^{-1}, (-15,3) é autovetor de autovalor 1.

(b) ( ) Se a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tem representação matricial

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então $(76, 16, -14)$ é um autovetor não nulo de T.

(c) ( ) Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é tal que

$$T(25, 33) = 15(25, 33) \quad \text{e} \quad T(-35, 23) = 15(-35, 23),$$

então existe um elemento não nulo de $\mathbb{R}^2$ que não é autovetor de T.

(d) ( ) Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pode não ter nenhum autovalor real.

(e) ( ) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear, com $\vec{a}$ e $\vec{b}$ satisfazendo $T\vec{a} = \vec{a}$ e $T\vec{b} = -\vec{b}$. Então T é diagonalizavel.

Questão 2 **(1,0 ponto):** Encontre todos os autovalores reais de S e T:

1. $$S: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+4y, 4x+y) \end{array}.$$

   Autovalores = $\boxed{}$.

2. $$T: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+4z, -5y, 4x+z) \end{array}.$$

   Autovalores = $\boxed{}$.

Questão 3 **(2,0 pontos – penalização 0,3):** Julgue (V)erdadeiro ou (F)also.

(a) (   ) Três vetores de $\mathbb{R}^3$ podem formar ou não uma base.

(b) (   ) Quatro vetores de $\mathbb{R}^3$ são geradores.

(c) (   ) Quatro vetores de $\mathbb{R}^3$ são sempre linearmente depententes.

(d) (   ) Vetores de $\mathbb{R}^3$ que são linearmente independentes formam uma base.

Nome: **Matrícula**

Assinatura:

Questão 4 **(2,0 ponto):** Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que

$$\begin{array}{ll} T(2,15) = (2,35) & T(-2,5) = (-6,15) \\ T(2,5) = (4,10) & T(6,5) = (14,5) \\ T(4,0) = (10,-5) & T(-4,0) = (-10,5) \\ T(0,10) = (-2,25) & T(-2,15) = (-8,40). \end{array}$$

Encontre $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e uma matriz A tais que

$$[T] = A \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} A^{-1}.$$

Resposta:

$$\alpha = \boxed{\quad\quad} \qquad \beta = \boxed{\quad\quad} \qquad A = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}.$$

Questão 5 **(2,0 ponto):** Dada a transformação linear

$$T : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (5x, 7x + 2y) \end{array},$$

encontre $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e uma matriz A tais que

$$[T] = A \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} A^{-1}.$$

Resposta:

$$\alpha = \boxed{} \qquad \beta = \boxed{} \qquad A = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}.$$

Questão 6 **(1,0 ponto):** Considere as matrizes

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que as matrizes M e N são inversas uma da outra, escreva no retângulo abaixo um autovetor não nulo do produto NDM, correspondente ao autovalor 3.

Um autovetor não nulo de NDM: $\boxed{}$.