Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Topologia Geral
Lista 1/01 – Verão/2020

Atenção: Claro que *"descrever da melhor maneira possível"* é uma questão subjetiva e nada bem definida. Dê o seu melhor! :-)

Exercício 1. Faça os exercícios 1.3.1 a 1.3.5, 2.3.3 e 2.3.4 das notas de aula.

Exercício 2. Para cada espaço métrico (ou pseudo-métrico) (X, d) a seguir, descreva, da forma que achar mais interessante, **as sequências convergentes**, **as bolas**, **as vizinhanças de um ponto** e **os abertos**.

1. **(pseudo-métrica caótica)** O conjunto X é qualquer conjunto não vazio.
$$\begin{array}{rrcl} d: & X \times X & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & 0 \end{array}.$$

2. **(métrica discreta)** O conjunto X é qualquer conjunto não vazio.
$$\begin{array}{rrcl} d: & X \times X & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases} \end{array}.$$

3. **(norma do máximo)** $X = \mathbb{R}^n$. A métrica é induzida pela norma $\|\cdot\|_\infty$, dada por
$$\|\vec{v}\|_\infty = \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\}.$$

4. **(norma da soma)** $X = \mathbb{R}^n$. A métrica é induzida pela norma $\|\cdot\|_s$, dada por
$$\|\vec{v}\|_s = |v_1| + \cdots + |v_n|.$$

5. **(norma euclideana)** $X = \mathbb{R}^n$. A métrica é induzida pela norma $\|\cdot\|$, dada por
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

6. $X = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, munido da métrica
$$\begin{array}{rrcl} d: & X \times X & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| \end{array},$$
onde $\frac{1}{\infty} = 0$.

7. Se (X, m) é um espaço métrico e $d(x,y) = 13m(x,y)$.

8. Se (X, m) é um espaço métrico e $d(x,y) = \max\{m(x,y), 7\}$.

9. Se (Y, m) é um espaço métrico, com $X \subset Y$ e
$$d(x,y) = m(x,y).$$

10. Se X é um conjunto já munido das métricas m e n, e $d(x,y) = m(x,y) + n(x,y)$.

11. Se X é um conjunto já munido das métricas m e n, e $d(x,y) = \max\{m(x,y), n(x,y)\}$.

12. Se $X = \mathbb{R}^2$ e
$$d: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{w}) & \mapsto & |w_2 - v_2| \end{array}.$$

13. Seja
$$T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q.$$
Se $X = \mathbb{R}^p$, e d é a pseudo-métrica induzida pela seminorma
$$\|x\|_T = \|Tx\|,$$
onde $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_q^2}$.
(**pergunta:** quando é que d é uma métrica?)

14. Se $X = [0,1]^{\mathbb{N}^*}$ e
$$d: \begin{array}{rcl} X \times X & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \sup\left\{ |y_j - x_j| \,\middle|\, j \in \mathbb{N}^* \right\} \end{array}.$$

15. Se $X = [0,1]^{\mathbb{N}^*}$ e
$$d: \begin{array}{rcl} X \times X & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \sup\left\{ \frac{|y_j - x_j|}{j} \,\middle|\, j \in \mathbb{N}^* \right\} \end{array}.$$

16. Se $X = [0,1]^{\mathbb{N}^*}$ e
$$d: \begin{array}{rcl} X \times X & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \sup\left\{ m(x_j, y_j) \,\middle|\, j \in \mathbb{N}^* \right\} \end{array},$$
onde m é a métrica discreta em $[0,1]$.

17. Se $X = [0,1]^{\mathbb{N}^*}$ e
$$d: \begin{array}{rcl} X \times X & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \sup\left\{ \frac{m(x_j, y_j)}{j} \,\middle|\, j \in \mathbb{N}^* \right\} \end{array},$$
onde m é a métrica discreta em $[0,1]$.