

**Topologia Geral**  
**Lista 1/02 – Verão/2020**

---

**Atenção:** Claro que “descrever da melhor maneira possível” é uma questão subjetiva e nada bem definida. Dê o seu melhor! :-)

**Exercício 1.** Faça os exercícios 2.3.1 e 2.3.2 das notas de aula.

**Exercício 2.** Seja  $A \subset \mathbb{Q}$ , onde  $\mathbb{Q}$  é munido da métrica induzida dos reais

$$d: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \quad . \\ (p, q) \mapsto |q - p|$$

Descreva da melhor forma possível, quando é que a função indicadora

$$I_A: \mathbb{Q} \rightarrow \{0, 1\} \\ x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

é contínua, nos seguintes casos:

1.  $A = (a, b)$ .
2.  $A = [a, b]$ .
3.  $A = ]a, b)$ .
4.  $A$  é um subconjunto **qualquer** de  $\mathbb{Q}$ .

**Exercício 3.** Seja  $A \subset \mathbb{R}$ , onde  $\mathbb{R}$  é munido da métrica induzida pelo valor absoluto

$$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad . \\ (x, y) \mapsto |y - x|$$

Descreva da melhor forma possível, quando é que a função indicadora é contínua. E quando não é contínua, quais são os pontos de descontinuidade de  $I_A$ ?

**Exercício 4.** Considere o conjunto  $X = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ , munido da métrica

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \quad , \\ (x, y) \mapsto \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right|$$

onde  $\frac{1}{\infty} = 0$ . Dada a sequência  $x_n \in \mathbb{C}$ . Descreva da melhor forma possível, o que significa dizer que a função

$$f: X \rightarrow \mathbb{C} \\ n \mapsto \begin{cases} x_n, & n \in \mathbb{N}^* \\ \sqrt{2} + 3i, & n = \infty \end{cases}$$

é contínua.

---

---

**Exercício 5.** Sejam  $(X, d)$  e  $(Y, m)$  espaços pseudo-métricos. Seja  $a \in Y$  um elemento fixado de  $Y$ . Exatamente quando é que a função constante

$$f: X \rightarrow Y \\ x \mapsto a$$

é contínua?

**Exercício 6.** Sejam  $(X, d)$  e  $(Y, m)$  espaços pseudo-métricos, onde  $m$  é a métrica discreta em  $Y$ . Exatamente quando é que funções  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow X$  são contínuas?

**Exercício 7.** Sejam  $(X, d)$  e  $(Y, m)$  espaços pseudo-métricos, com  $m = 0$ . Exatamente quando é que funções  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow X$  são contínuas?

**Exercício 8.** Mostre que

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é descontínua em 0.

**Exercício 9.** Mostre que

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é contínua em 0.

**Exercício 10.** Se você fez os exercícios anteriores usando, por exemplo, sequências, faça também com epsilons e deltas, bolas e vizinhanças.

---