Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Topologia Geral
Lista 1/03 – Verão/2020

Exercício 1. Seja (X, d) um espaço métrico. Dado um ponto $a \in X$, considere a família de vizinhanças de a,

$$\mathscr{V}(a) = \left\{ V \subset X \,\middle|\, \exists \varepsilon > 0,\, B_\varepsilon(a) \subset V \right\}.$$

Mostre que $\mathscr{V}(a)$ é um filtro. Ou seja,

1. $\mathscr{V}(a) \neq \emptyset$.
2. $\emptyset \notin \mathscr{V}(a)$.
3. $V, W \in \mathscr{V}(a) \Rightarrow V \cap W \in \mathscr{V}(a)$.
4. $V \in \mathscr{V}(a)$, $V \subset W \Rightarrow W \in \mathscr{V}(a)$.

Exercício 2. Seja (X, d) um espaço métrico. Dado um ponto $a \in X$, considere a família de vizinhanças de a,

$$\mathscr{V}(a) = \left\{ V \subset X \,\middle|\, \exists \varepsilon > 0,\, B_\varepsilon(a) \subset V \right\}.$$

Mostre que cada uma das famílias a seguir forma uma base para $\mathscr{V}(a)$.

1. $\mathscr{B}(a) = \left\{ B_\varepsilon(a) \,\middle|\, \varepsilon > 0 \right\}$.
2. $\mathscr{F} = \left\{ B_{\frac{1}{n^4+1}}(a) \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$.
3. Dada a sequência $\varepsilon_n > 0$, com $\varepsilon_n \downarrow 0$,
   $\mathscr{F} = \left\{ B_{\varepsilon_n}(a) \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$.
4. $\mathscr{F} = \left\{ B_\varepsilon(x) \,\middle|\, \varepsilon > 0,\, d(x, a) < \varepsilon \right\}$.
5. Vizinhanças abertas: $\tau(a) = \left\{ A \in \tau_d \,\middle|\, a \in A \right\}$.
6. Bolas fechadas:
   $\mathscr{F} = \left\{ \bar{B}_{\frac{1}{n+1}}(a) \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$.
7. Fecho de bolas:
   $\mathscr{F} = \left\{ \overline{B_{\frac{1}{n+1}}(a)} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$.
8. Vizinhanças fechadas:
   $\mathscr{F} = \mathscr{V}(a) \cap \left\{ A^c \,\middle|\, A \in \tau \right\}$.

Exercício 3. Seja (X, d) um espaço métrico. Dado um ponto $a \in X$, considere a família de vizinhanças de a,

$$\mathscr{V}(a) = \left\{ V \subset X \,\middle|\, \exists \varepsilon > 0,\, B_\varepsilon(a) \subset V \right\}.$$

Explique por que as famílias a seguir, dependendo da métrica d, NÃO formam uma base para $\mathscr{V}(a)$.

1. $\mathscr{F} = \left\{ A^c \in \tau_d \,\middle|\, a \notin A \right\}$.

2. $\mathscr{F} = \left\{ \bar{B}_{\frac{1}{n+1}}(x) \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\, x \in X,\, d(a, x) \leq \frac{1}{n+1} \right\}$.

3. Dê um motivo diferente daquele usado no item anterior!
   $\mathscr{F} = \left\{ \overline{B_{\frac{1}{n+1}}(x)} \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\, x \in X,\, d(a, x) \leq \frac{1}{n+1} \right\}$.

4. $\mathscr{F} = \left\{ B \subset X \,\middle|\, a \in B \right\}$.

5. $\mathscr{F} = \left\{ B_{\frac{n}{3n+1}}(x) \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$.

6. Fechados que contém a:
   $\mathscr{F} = \left\{ A^c \,\middle|\, A \in \tau,\, a \notin A \right\}$.

Exercício 4. Utilizando as bases do exercício 2, escreva definições de continuidade alternativas e *bizarras* — que substituam aquelas tradicionais com ε e δ — para $f : X \to Y$, onde X e Y são espaços métricos.

Dica: pra ficar ainda mais bizarro, escolha um item do exercício 2 para usar como base de X, e um item diferente para usar como base de Y.

Exercício 5. Seja (X, d) um espaço métrico. Considere o conjunto X^2 com a métrica do máximo

$$\begin{array}{rrcl} m: & X^2 \times X^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (a, b) & \mapsto & \max(d(a_1, b_1), d(a_2, b_2)) \end{array}.$$

Mostre que a diagonal

$$\Delta = \left\{ (x, x) \,\middle|\, x \in X \right\}$$

é um conjunto fechado.
Faça o mesmo para as métricas

$$s(a, b) = d(a_1, b_1) + d(a_2, b_2) \quad \text{e} \quad e(a, b) = \sqrt{d(a_1, b_1)^2 + d(a_2, b_2)^2}.$$