Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Topologia Geral
Lista 1/04 – Verão/2020

Exercício 1. Seja (X, τ) um espaço topológico. E seja $F \subset X$ um subconjunto fechado. Mostre que se $x_n \in F$ converge para a, então $a \in F$.

Exercício 2. Seja (X, τ) um espaço topológico, tal que para cada $x \in X$, existe uma base enumerável

$$\mathscr{B}(x) = \{B_1(x), B_2(x), \dots\}$$

para $\mathscr{V}(x)$. Pense nas bolas de raio $\frac{1}{n}$ em um espaço métrico. Mostre que $F \subset X$ é fechado, se, e somente se,

$$x_n \in F,\ x_n \to a \Rightarrow a \in F.$$

Pergunta super intrigante: será que existe um espaço topológico tal que essa caracterização de conjunto fechado não funcione?

Exercício 3. Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que $f : X \to Y$ é contínua em $a \in X$, quando

$$f^{-1}(\mathscr{V}(f(a))) \subset \mathscr{V}(a).$$

Ou seja, imagem inversa de vizinhança é vizinhança.
Mostre que "basta verificar para uma base de vizinhaças de a". Ou seja, se $\mathscr{B}$ é uma base de $\mathscr{V}(f(a))$, então f é contínua em a se, e somente se,

$$f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{V}(a).$$

Exercício 4. Nas mesmas situações do exercício 3, mostre que f é contínua em todo ponto se, e somente se,

$$f^{-1}(\tau_Y) \subset \tau_X.$$

Dica: sua resposta será mais elegante se utilizar, não apenas as hipóteses, mas também o resultado do exercício 3.

Exercício 5. Seja X um espaço topológico onde determinado $x \in X$ é tal que $\mathscr{V}(x)$ tem uma base enumerável

$$\mathscr{B} = \{B_1, B_2, \dots\}.$$

Mostre que x possui uma base de vizinhanças *encaixadas*. Ou seja, uma base de vizinhanças

$$\mathscr{D} = \{D_1, D_2, \dots\},$$

onde

$$B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$$

Dica: esse exercício permite utilizar em outras questões argumentos do tipo

> "Podemos assumir sem perda de generalidade que x possui uma base de vizinhanças encaixadas."

Exercício 6. Sejam X e Y espaços topológicos. Mostre que se $f : X \to Y$ é contínua, então, para $x_n \in X$,

$$x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a).$$

Exercício 7. Sejam X e Y espaços topológicos. Suponha que cada ponto $x \in X$ é tal que $\mathscr{V}(x)$ tem uma base enumerável

$$\mathscr{B}_x = \{B_1(x), B_2(x), \dots\}.$$

Nesse caso, se f é sequêncialmente contínua, ou seja,

$$x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a),$$

então, podemos concluir que f é contínua.

Exercício 8. Seja X um espaço topológico onde cada ponto $x \in X$ é tal que $\mathscr{V}(x)$ tem uma base enumerável
$$\mathscr{B}(x) = \{B_1(x), B_2(x), \ldots\}.$$
Suponha que as sequências $a_n^k \in X$ convirjam para a_n, e que $a_n \to a$. Ou seja,

$$\begin{array}{c}
a_1^1,\, a_1^2,\, a_1^3,\, \ldots \to a_1 \\
a_2^1,\, a_2^2,\, a_2^3,\, \ldots \to a_2 \\
a_3^1,\, a_3^2,\, a_3^3,\, \ldots \to a_3 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \downarrow \\
\qquad\qquad\qquad\quad a.
\end{array}$$

Mostre que podemos tomar uma sequência $k_n \to \infty$, tal que
$$a_n^{k_n} \to a.$$

Dica: depois que fizer o exercício, verifique se você utilizou o resultado do exercício 5 em algum lugar no seu argumento.

Exercício 9. Mostre que no exercício 8, não podemos simplesmente tomar a sequência a_n^n. Ou seja, k_n precisa ser escolhido com cuidado.

Exercício 10. Seja X um espaço topológico e $\mathscr{B}$ uma base de vizinhanças de um determinado ponto x. Escolhida uma vizinhaça qualquer de x, $V \in \mathscr{V}(x)$, mostre que a família
$$\mathscr{B} \cap V = \left\{ B \cap V \;\middle|\; B \in \mathscr{B} \right\}$$
também é uma base de vizinhanças de x.

Exercício 11. Nem sempre uma base de vizinhaças precisa ser formada por abertos! Seja X um espaço métrico. Mostre que para cada $x \in X$, as bolas fechadas centradas em x formam uma base para $\mathscr{V}(x)$.

Exercício 12. Considere a topologia usual em $\mathbb{R}$. Mostre que
$$\mathscr{B} = \left\{ \left[\sqrt{2} - \frac{4}{n^2+1}, \sqrt{2} + \frac{1}{n} \right] \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$$
é uma base de vizinhanças para o ponto $\sqrt{2}$.