Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Topologia Geral
Lista 3/01 – Verão/2020

Exercício 1. Faça os exercícios 7.3.1 a 7.3.4 e 7.3.7 a 7.3.9 das notas de aula.

Exercício 2. Cosidere uma norma $\|\cdot\|$ qualquer em $\mathbb{R}^n$. Mostre que as aplicações

$$\begin{array}{rccc} f_a: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \|x-a\| \end{array},$$

para cada $a \in \mathbb{R}^n$ são contínuas na topologia produto.
O que isso permite você concluir sobre a relação entre a topologia produto e a topologia da norma?

Exercício 3. Seja $f : X \to Y$ uma função entre espaços topológicos. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rccc} F: & X & \to & \mathrm{Gr}\,(f) \\ & x & \mapsto & (x, f(x)) \end{array}.$$

Mostre que F é um homeomorfismo entre X e $\mathrm{Gr}\,(F)$.

Obs: O exercício não está bem redigido se não dissermos qual é a topologia de $\mathrm{Gr}\,(F)$. De um modo geral, quando não mencionamos, qual é a topologia natural de se usar?

Exercício 4. Em um espaço topológico X, o gráfico da função identidade é o conjunto

$$\Delta = \left\{(x,x) \;\middle|\; x \in X\right\}.$$

Mostre que $\Delta \subset X \times X$ é fechado **na topologia produto** se, e somente se, X é um espaço de Hausdorff.

Exercício 5. Sejam $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ funções contínuas entre espaços topológicos. Use o exercício 4 para mostrar que se Y é Hausdorff, então o conjunto

$$B = \left\{x \in X \;\middle|\; f(x) = g(x)\right\}$$

é fechado.

Exercício 6. Mostre que a topologia produto em $\mathbb{R}^n$ é a topologia inicial gerada pela família de funcionais lineares

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Exercício 7. Dados os espaços topológicos $(X_\lambda, \tau_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, mostre que o produto é Hausdorff se, e somente se, cada X_λ é Hausdorff.

Exercício 8. Mostre que a topologia produto e em $[0,1]^{\mathbb{R}}$ não é metrizável.

Dica: Os pontos não tem base de vizinhanças enumerável.