

Topologia Geral
Lista 1/01 – Verão/2022

Atenção: Claro que “descrever da melhor maneira possível” é uma questão subjetiva e nada bem definida. Dê o seu melhor! :-)

Exercício 1. Faça os exercícios 1.3.1 a 1.3.5, 2.3.3 e 2.3.4 das notas de aula.

Exercício 2. Para cada espaço métrico (ou pseudo-métrico) (X, d) a seguir, descreva, da forma que achar mais interessante, **as sequências convergentes, as bolas, as vizinhanças de um ponto e os abertos.**

1. **(pseudo-métrica caótica)** O conjunto X é qualquer conjunto não vazio.

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R} . \\ (x, y) \mapsto 0$$

2. **(métrica discreta)** O conjunto X é qualquer conjunto não vazio.

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases} .$$

3. **(norma do máximo)** $X = \mathbb{R}^n$. A métrica é induzida pela norma $\|\cdot\|_\infty$, dada por

$$\|\vec{v}\|_\infty = \max \{|v_1|, \dots, |v_n|\} .$$

4. **(norma da soma)** $X = \mathbb{R}^n$. A métrica é induzida pela norma $\|\cdot\|_s$, dada por

$$\|\vec{v}\|_s = |v_1| + \dots + |v_n| .$$

5. **(norma euclideana)** $X = \mathbb{R}^n$. A métrica é induzida pela norma $\|\cdot\|$, dada por

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} .$$

6. $X = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, munido da métrica

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R} , \\ (x, y) \mapsto \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right|$$

onde $\frac{1}{\infty} = 0$.

7. Se (X, m) é um espaço métrico e $d(x, y) = 13m(x, y)$.

8. Se (X, m) é um espaço métrico e $d(x, y) = \max \{m(x, y), 7\}$.

9. Se (Y, m) é um espaço métrico, com $X \subset Y$ e

$$d(x, y) = m(x, y) .$$

10. Se X é um conjunto já munido das métricas m e n , e $d(x, y) = m(x, y) + n(x, y)$.

11. Se X é um conjunto já munido das métricas m e n , e $d(x, y) = \max \{m(x, y), n(x, y)\}$.

12. Se $X = \mathbb{R}^2$ e

$$d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto |w_2 - v_2|$$

13. Se $X = \mathbb{R}^p$, e d é a pseudo-métrica induzida pela seminorma

$$\|x\|_T = \|Tx\|,$$

onde $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_q^2}$, e

$$T: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$$

é uma transformação linear.

(**pergunta:** quando é que d é uma métrica?)

14. Se $X = [0, 1]^{\mathbb{N}^*}$ e

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sup \left\{ |y_j - x_j| \mid j \in \mathbb{N}^* \right\}$$

15. Se $X = [0, 1]^{\mathbb{N}^*}$ e

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sup \left\{ \frac{|y_j - x_j|}{j} \mid j \in \mathbb{N}^* \right\}$$

16. Se $X = [0, 1]^{\mathbb{N}^*}$ e

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sup \left\{ m(x_j, y_j) \mid j \in \mathbb{N}^* \right\},$$

onde m é a métrica discreta em $[0, 1]$.

17. Se $X = [0, 1]^{\mathbb{N}^*}$ e

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sup \left\{ \frac{m(x_j, y_j)}{j} \mid j \in \mathbb{N}^* \right\},$$

onde m é a métrica discreta em $[0, 1]$.

Exercício 3. Faça discussões no *Talkyard* falando sobre coisas interessantes que você observou nos exercícios dessa lista.

Veja se já tem um tópico falando sobre algo semelhante. Se já houver um tópico, participe da discussão. Se não tiver, crie um.

Exercício 4. Identifique no vídeo da primeira aula, onde está tudo o que o professor disse que é dever de casa. E então,

1. Enuncie com precisão o tal dever de casa. (essa é a parte mais difícil!)
2. Resolva o tal exercício proposto.