

Topologia Geral
Lista 1/02 – Verão/2022

Atenção: Claro que “descrever da melhor maneira possível” é uma questão subjetiva e nada bem definida. Dê o seu melhor! :-)

Exercício 1. Faça os exercícios 2.3.1 e 2.3.2 das notas de aula.

Exercício 2. Mostre que na topologia usual de \mathbb{R} ,

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ x, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é contínua em 0 e descontínua nos demais pontos de \mathbb{R} .

Exercício 3. Mostre que

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é descontínua em 0.

Exercício 4. Mostre que

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é contínua em 0.

Exercício 5. Sejam (X, d) e (Y, m) espaços pseudo-métricos. Seja $a \in Y$ um elemento fixado de Y . Exatamente quando é que a função constante

$$f : X \rightarrow Y \\ x \mapsto a$$

é contínua?

Exercício 6. Se você fez os exercícios anteriores usando, por exemplo, sequências, faça também com epsilons e deltas, bolas e vizinhanças.

Exercício 7. Sejam (X, d) e (Y, m) espaços pseudo-métricos, onde m é a métrica discreta em Y . Exatamente quando é que funções $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ são contínuas?

Exercício 8. Sejam (X, d) e (Y, m) espaços pseudo-métricos, com $m = 0$. Exatamente quando é que funções $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ são contínuas?

Exercício 9. Quando temos duas normas diferentes $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em um mesmo espaço X , dizemos que essas normas são *equivalentes*, quando existem $\alpha, \beta > 0$ tais que para todo $x \in X$,

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1.$$

O que significa duas normas serem equivalentes em termos dos sistemas de vizinhanças $\mathcal{V}_{\|\cdot\|_1}(x)$ e $\mathcal{V}_{\|\cdot\|_2}(x)$?

Resuma tudo em **uma frase**.

Exercício 10. Sejam (X, p) e (Y, q) , espaços métricos. Mostre que para cada $(x, y) \in X \times Y$, todas as métricas

1. $d_1(x, y) = p(x, y) + q(x, y)$,

2. $d_2(x, y) = \sqrt{p(x, y)^2 + q(x, y)^2}$ e

3. $d_3(x, y) = \max(p(x, y), q(x, y))$,

geram o mesmo sistema de vizinhanças $\mathcal{V}(x, y)$.

Ou seja, todas essas métricas são _____.

Exercício 11. Seja $A \subset \mathbb{R}$, onde \mathbb{R} é munido da métrica induzida pelo valor absoluto

$$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto |y - x|$$

Descreva da melhor forma possível, quando é que a função indicadora é contínua.

E quando não é contínua, quais são os pontos de descontinuidade de I_A ?

Exercício 12. Seja $A \subset \mathbb{Q}$, onde \mathbb{Q} é munido da métrica induzida dos reais

$$d: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) \mapsto |q - p|$$

Descreva da melhor forma possível, quando é que a função indicadora

$$I_A: \mathbb{Q} \rightarrow \{0, 1\} \\ x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

é contínua, nos seguintes casos:

1. $A = (a, b)$.

2. $A = [a, b]$.

3. $A = [a, b)$.

4. A é um subconjunto **qualquer** de \mathbb{Q} .

Exercício 13. Considere o conjunto $X = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, munido da métrica

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right|,$$

onde $\frac{1}{\infty} = 0$. Dada a sequência $x_n \in \mathbb{C}$. Descreva da melhor forma possível, o que significa dizer que a função

$$f: X \rightarrow \mathbb{C} \\ n \mapsto \begin{cases} x_n, & n \in \mathbb{N}^* \\ \sqrt{2} + 3i, & n = \infty \end{cases}$$

é contínua.
