Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Topologia Geral
Lista 1/03 – Verão/2022

Atenção:
Dever de casa: TODOS os estudantes devem enunciar um exercício desta lista (ou das listas anteriores) no fórum *Talkyard*, na categoria *Resolução Completa / Exercícios da lista* (`https://topologia.talkyard.net/top/exercicios-da-lista`). Para exercícios com vários itens, cada item deve ser considerado um exercício diferente.

Todos devem apresentar a resolução completa de pelo menos um dos exercícios enunciados por outras pessoas.

O objetivo é que tenhamos ao final um gabarito da maioria das questões das listas, que esteja **bem escrito**: tanto o enunciado quanto a resolução.

No fórum, os exercícios devem ser marcados com as *tags*
Lista 1/01, **Lista 1/02** ou **Lista 1/03**,
para que possam ser facilmente identificados. Para colocar a *tag*, depois de salvar o post, aparece um símbolo $\boxed{+\dots}$.

Exercício 1. Para os casos a seguir, verifique que os sitemas de vizinhanças descritos definem uma topologia. Ou seja, verifique que satisfazem os axiomas de 1 a 5 descritos na vídeo aula.

Tente descrever em português o significado de $x \in \overline{B}$ em cada uma dessas topologias.

Descreva também quando é que uma sequência x_n converge para um ponto a em cada uma dessas topologias.

1. X é um conjunto qualquer e
$$\mathscr{V}(x) = \left\{V \subset X \,\middle|\, x \in V,\, V^c \text{ é finito}\right\}.$$
2. X é um conjunto qualquer e
$$\mathscr{V}(x) = \left\{V \subset X \,\middle|\, x \in V,\, V^c \text{ é enumerável}\right\}.$$
3. $X = C(\Omega)$ é o conjunto das funções contínuas de Ω em $\mathbb{R}$. Dado um conjunto $\Gamma \subset \Omega$, vamos utilizar a seguinte notação:
$$V(f,\Gamma) = \left\{g \in C(\Omega) \,\middle|\, g|_\Gamma = f|_\Gamma\right\}.$$
Com essa notação,
$$\mathscr{V}(f) = \left\{V(f,\Gamma) \,\middle|\, \Gamma \subset \Omega,\, \#\Gamma < \infty\right\}.$$
4. Com a mesma notação do item anterior, $X = C(\Omega)$ e
$$\mathscr{V}(f) = \left\{V(f,\Gamma) \,\middle|\, \Gamma \subset \Omega,\, \Gamma \text{ é enumerável}\right\}.$$

Exercício 2. Seja (X,d) um espaço métrico. Dado um ponto $a \in X$, considere a família de vizinhanças de a,
$$\mathscr{V}(a) = \left\{V \subset X \,\middle|\, \exists \varepsilon > 0,\, B_\varepsilon(a) \subset V\right\}.$$
Mostre que $\mathscr{V}(a)$ é um filtro. Ou seja,

1. $\mathscr{V}(a) \neq \emptyset$.
2. $\emptyset \notin \mathscr{V}(a)$.
3. $V, W \in \mathscr{V}(a) \Rightarrow V \cap W \in \mathscr{V}(a)$.
4. $V \in \mathscr{V}(a)$, $V \subset W \Rightarrow W \in \mathscr{V}(a)$.

Exercício 3. Seja (X, d) um espaço métrico. Considere o conjunto X^2 com a métrica do máximo

$$\begin{array}{rccl} m: & X^2 \times X^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (a, b) & \mapsto & \max(d(a_1, b_1), d(a_2, b_2)) \end{array}.$$

Mostre que a diagonal

$$\Delta = \left\{ (x, x) \,\middle|\, x \in X \right\}$$

é um conjunto fechado.
Faça o mesmo para as métricas

$$s(a, b) = d(a_1, b_1) + d(a_2, b_2) \quad \text{e} \quad e(a, b) = \sqrt{d(a_1, b_1)^2 + d(a_2, b_2)^2}.$$

Exercício 4. Seja (X, τ) um espaço topológico. E seja $F \subset X$ um subconjunto fechado. Mostre que se $x_n \in F$ converge para a, então $a \in F$.

Exercício 5. Sejam X e Y espaços topológicos. Mostre que se $f : X \rightarrow Y$ é contínua, então, para $x_n \in X$,

$$x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a).$$

Exercício 6. Sejam X e Y espaços topológicos. Suponha que cada ponto $x \in X$ é tal que $\mathscr{V}(x)$ tem uma base enumerável

$$\mathscr{B}_x = \{B_1(x), B_2(x), \dots\}.$$

Nesse caso, se f é sequêncialmente contínua, ou seja,

$$x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a),$$

então, podemos concluir que f é contínua.