Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Topologia Geral
Lista 1/04 – Verão/2022

Atenção:
Dever de casa: TODOS os estudantes devem enunciar um exercício desta lista no fórum *Talkyard*, na categoria *Resolução Completa / Exercícios da lista* (`https://topologia.talkyard.net/top/exercicios-da-lista`). Para exercícios com vários itens, cada item deve ser considerado um exercício diferente.

Todos devem apresentar a resolução completa de pelo menos um dos exercícios enunciados por outras pessoas.

O objetivo é que tenhamos ao final um gabarito da maioria das questões das listas, que esteja **bem escrito**: tanto o enunciado quanto a resolução.

No fórum, os exercícios devem ser marcados com a *tag* **Lista 1/04**, para que possam ser facilmente identificados. Para colocar a *tag*, depois de salvar o post, aparece um símbolo $\boxed{+\dots}$.

Exercício 1. Seja (X, d) um espaço métrico. Dado um ponto $a \in X$, considere a família de vizinhanças de a,

$$\mathscr{V}(a) = \left\{ V \subset X \,\middle|\, \exists \varepsilon > 0,\, B_\varepsilon(a) \subset V \right\}.$$

Mostre que cada uma das famílias a seguir forma uma base para $\mathscr{V}(a)$.

1. $\mathscr{B}(a) = \left\{ B_\varepsilon(a) \,\middle|\, \varepsilon > 0 \right\}$.
2. $\mathscr{F} = \left\{ B_{\frac{1}{n^4+1}}(a) \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$.
3. Dada a sequência $\varepsilon_n > 0$, com $\varepsilon_n \downarrow 0$,
   $\mathscr{F} = \left\{ B_{\varepsilon_n}(a) \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$.
4. $\mathscr{F} = \left\{ B_\varepsilon(x) \,\middle|\, \varepsilon > 0,\, d(x, a) < \varepsilon \right\}$.
5. Vizinhanças abertas: $\tau(a) = \left\{ A \in \tau_d \,\middle|\, a \in A \right\}$.
6. Bolas fechadas:
   $\mathscr{F} = \left\{ \bar{B}_{\frac{1}{n+1}}(a) \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$.
7. Fecho de bolas:
   $\mathscr{F} = \left\{ \overline{B_{\frac{1}{n+1}}(a)} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$.
8. Vizinhanças fechadas:
   $\mathscr{F} = \mathscr{V}(a) \cap \left\{ A^c \,\middle|\, A \in \tau \right\}$.

Exercício 2. Seja (X, d) um espaço métrico. Dado um ponto $a \in X$, considere a família de vizinhanças de a,

$$\mathscr{V}(a) = \left\{ V \subset X \,\middle|\, \exists \varepsilon > 0,\, B_\varepsilon(a) \subset V \right\}.$$

Explique por que as famílias a seguir, dependendo da métrica d, NÃO formam uma base para $\mathscr{V}(a)$.

1. $\mathscr{F} = \left\{ \bar{B}_{\frac{1}{n+1}}(x) \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\, x \in X,\, d(a,x) \leq \frac{1}{n+1} \right\}$.

2. $\mathscr{F} = \left\{ \overline{B_{\frac{1}{n+1}}(x)} \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\, x \in X,\, d(a,x) \leq \frac{1}{n+1} \right\}$.

3. $\mathscr{F} = \left\{ B \subset X \,\middle|\, a \in B \right\}$.

4. $\mathscr{F} = \left\{ B_{\frac{n}{3n+1}}(x) \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$.

5. Fechados que contém a:
   $\mathscr{F} = \left\{ A^c \,\middle|\, A \in \tau,\, a \notin A \right\}$.

Exercício 3. Utilizando as bases do exercício 1, escreva definições de continuidade alternativas e *bizarras* — que substituam aquelas tradicionais com ε e δ — para $f : X \to Y$, onde X e Y são espaços métricos.
Dica: pra ficar ainda mais bizarro, escolha um item do exercício 1 para usar como base de X, e um item diferente para usar como base de Y.

Exercício 4. Seja (X, τ) um espaço topológico, tal que para cada $x \in X$, existe uma base enumerável

$$\mathscr{B}(x) = \{B_1(x), B_2(x), \ldots\}$$

para $\mathscr{V}(x)$. Pense nas bolas de raio $\frac{1}{n}$ em um espaço métrico. Mostre que $F \subset X$ é fechado, se, e somente se,

$$x_n \in F,\, x_n \to a \Rightarrow a \in F.$$

Pergunta super intrigante: será que existe um espaço topológico tal que essa caracterização de conjunto fechado não funcione?

Exercício 5. Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que $f : X \to Y$ é contínua em $a \in X$, quando

$$f^{-1}(\mathscr{V}(f(a))) \subset \mathscr{V}(a).$$

Ou seja, imagem inversa de vizinhança é vizinhança.
Mostre que "basta verificar para uma base de vizinhaças de a". Ou seja, se $\mathscr{B}$ é uma base de $\mathscr{V}(f(a))$, então f é contínua em a se, e somente se,

$$f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{V}(a).$$

Topologia Geral
Lista 1/04 – Verão/2022

Exercício 6. Nas mesmas situações do exercício 5, mostre que f é contínua em todo ponto se, e somente se,
$$f^{-1}(\tau_Y) \subset \tau_X.$$

Dica: sua resposta será mais elegante se utilizar, não apenas as hipóteses, mas também o resultado do exercício 5.

Exercício 7. Seja X um espaço topológico onde determinado $x \in X$ é tal que $\mathscr{V}(x)$ tem uma base enumerável
$$\mathscr{B} = \{B_1, B_2, \ldots\}.$$

Mostre que x possui uma base de vizinhanças *encaixadas*. Ou seja, uma base de vizinhanças
$$\mathscr{D} = \{D_1, D_2, \ldots\},$$

onde
$$B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$$

Dica: esse exercício permite utilizar em outras questões argumentos do tipo

> "Podemos assumir sem perda de generalidade que x possui uma base de vizinhanças encaixadas."

Exercício 8. Seja X um espaço topológico onde cada ponto $x \in X$ é tal que $\mathscr{V}(x)$ tem uma base enumerável
$$\mathscr{B}(x) = \{B_1(x), B_2(x), \ldots\}.$$

Suponha que as sequências $a_n^k \in X$ convirjam para a_n, e que $a_n \to a$. Ou seja,
$$\begin{array}{r} a_1^1,\, a_1^2,\, a_1^3,\, \ldots \to a_1 \\ a_2^1,\, a_2^2,\, a_2^3,\, \ldots \to a_2 \\ a_3^1,\, a_3^2,\, a_3^3,\, \ldots \to a_3 \\ \vdots\downarrow \\ a. \end{array}$$

Mostre que podemos tomar uma sequência $k_n \to \infty$, tal que
$$a_n^{k_n} \to a.$$

Dica: depois que fizer o exercício, verifique se você utilizou o resultado do exercício 7 em algum lugar no seu argumento.

Exercício 9. Mostre que no exercício 8, não podemos simplesmente tomar a sequência a_n^n. Ou seja, k_n precisa ser escolhido com cuidado.

Exercício 10. Seja X um espaço topológico e $\mathscr{B}$ uma base de vizinhanças de um determinado ponto x. Escolhida uma vizinhaça qualquer de x, $V \in \mathscr{V}(x)$, mostre que a família

$$\mathscr{B} \cap V = \left\{ B \cap V \,\middle|\, B \in \mathscr{B} \right\}$$

também é uma base de vizinhanças de x.

Exercício 11. Considere a topologia usual em $\mathbb{R}$. Mostre que

$$\mathscr{B} = \left\{ \left[\sqrt{2} - \frac{4}{n^2+1}, \sqrt{2} + \frac{1}{n} \right] \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

é uma base de vizinhanças para o ponto $\sqrt{2}$.