Topologia Geral
Lista 2/01 – Verão/2022

Atenção:
Dever de casa: TODOS os estudantes devem enunciar um exercício desta lista no fórum *Talkyard*, na categoria *Resolução Completa / Exercícios da lista* (`https://topologia.talkyard.net/top/exercicios-da-lista`). Para exercícios com vários itens, cada item deve ser considerado um exercício diferente.

Todos devem apresentar a resolução completa de pelo menos um dos exercícios enunciados por outras pessoas.

O objetivo é que tenhamos ao final um gabarito da maioria das questões das listas, que esteja **bem escrito**: tanto o enunciado quanto a resolução.

Exercício 1. Todos os exercícios do capítulo 5 da apostila.

Exercício 2. Seja X um conjunto não enumerável, considere a topologia discreta τ e a topologia co-enumerável γ. Mostre que a identidade

$$\begin{array}{cccc} f: & (X,\gamma) & \to & (X,\tau) \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

não é contínua, mas é sequencialmente contínua.

Exercício 3. Seja X um espaço topológico qualquer, e Y um espaço topológico discreto. Mostre que se

$$f : X \to Y$$

é contínua, então os subconjuntos de X da forma $f^{-1}(y)$ são abertos e fechados (*clopen*) ao mesmo tempo!

Exercício 4. Dizemos que uma função

$$f : X \to \mathbb{R},$$

saindo de um espaço topológico X é semicontínua superiormente quando os conjuntos da forma

$$\left\{x \in X \;\middle|\; f(x) < y\right\}$$

são abertos para todo $y \in \mathbb{R}$. E dizemos que é semicontínua inferiormente quando os conjuntos da forma

$$\left\{x \in X \;\middle|\; f(x) > y\right\}$$

são abertos para todo $y \in \mathbb{R}$.

Mostre que a função f é contínua se, e somente se, é semicontínua inferiormente e superiormente ao mesmo tempo.

Exercício 5. Para cada um dos casos abaixo, mostre que (X, τ) é uma topologia.

1. **Topologia discreta.** $X = [0, 1]$, $\tau = \mathscr{P}(X)$.

2. **Topologia caótica.** $X = [9, 15]$, $\tau = \{\emptyset, [9, 15]\}$.

3. $X = \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$.

   (a) τ é formado pelo vazio, e também pelas uniões arbitrárias de bolas da norma da soma $\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$.

   (b) τ é formado pelo vazio, e também pelas uniões arbitrárias de bolas da norma do supremo $\|x\|_\infty = \sup_{n=0}^{\infty} |x_n|$.

   (c) Considere a família

   $$\mathscr{B} = \left\{ (a_0, b_0) \times \cdots \times (a_n, b_n) \times \mathbb{R}^{\{n+1, n+2, \ldots\}} \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\, a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

   Seja $\tau = \left\{ \bigcup \mathscr{A} \,\middle|\, \mathscr{A} \subset \mathscr{B} \right\}$ o conjunto de todas as uniões possíveis dos elementos de $\mathscr{B}$. Use $\bigcup \emptyset = \emptyset$.

4. Seja $X = C([0, 1])$ o conjunto das funções contínuas de $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$.

   (a) τ é formado pelo vazio, e também pelas uniões arbitrárias de bolas da norma (da soma?) $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| \, \mathrm{d}x$.

   (b) τ é formado pelo vazio, e também pelas uniões arbitrárias de bolas da norma do supremo $\|f\|_\infty = \sup |f(x)|$.

5. Seja X um conjunto não enumerável. Por exemplo, $X = \mathbb{R}$.

   (a) $\tau = \{\emptyset\} \cup \left\{ A \subset X \,\middle|\, A^c \text{ é finito} \right\}$.

   (b) $\tau = \{\emptyset\} \cup \left\{ A \subset X \,\middle|\, A^c \text{ é enumerável} \right\}$.

6. **Reais estendidos.** $X = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Denote a topologia usual dos reais por γ. $\tau = \gamma \cup \left\{ [-\infty, a) \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ (a, \infty] \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ [-\infty, a) \cup (b, \infty] \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

7. **Compactificação por um ponto dos reais.** $X = \mathbb{R} \cup \{\bigstar\}$. Denote a topologia usual dos reais por γ.

   (a) $\tau = \gamma \cup \left\{ \{\bigstar\} \cup F^c \,\middle|\, F^c \in \gamma,\, F \text{ é limitado} \right\}$.

   (b) $\tau = \gamma \cup \left\{ \{\bigstar\} \cup (-\infty, a) \cup (b, \infty) \cup A \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R},\, A \in \gamma \right\}$.

   (c) $\tau = \gamma \cup \left\{ \{\bigstar\} \cup (-\infty, a) \cup (a, \infty) \cup A \,\middle|\, a \in \mathbb{R},\, A \in \gamma \right\}$.

8. **Complexos estendidos.** $X = \mathbb{C} \cup \{\bigstar\}$. Denote a topologia usual dos complexos por γ. $\tau = \gamma \cup \left\{ \{\bigstar\} \cup F^c \,\middle|\, F^c \in \gamma,\, F \text{ é limitado} \right\}$.

Topologia Geral
Lista 2/01 – Verão/2022

Exercício 6. Para cada um dos casos abaixo, mostre que (X, τ) é uma topologia.

1. **Topologias da continuidade inferior e superior.** $X = \mathbb{R}$.
   (a) $\tau = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \left\{(a, \infty) \,\middle|\, a \in \mathbb{R}\right\}$.
   (b) $\tau = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \left\{(-\infty, a) \,\middle|\, a \in \mathbb{R}\right\}$.
2. Esse item está incorreto! Vou estudar e corrigir…:-) (André Caldas) **Topologia de Zariski em $\mathbb{R}^2$.**
3. **Topologia usada por Furstenberg pra demonstrar que existem infinitos primos.** $X = \mathbb{Z}$.
   Os abertos são, além do vazio, as uniões de conjuntos da forma

$$S(a, b) = \left\{an + b \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Exercício 7. Descreva as sequências convergentes para as topologias dos exercícios anteriores. Pule os que você não fizer a menor ideia de como descrever… :-)

Exercício 8. Mostre que uma função

$$f : X \to Y$$

entre espaços topológicos é contínua se, e somente se, para todo $D \subset X$,

$$f\left(\overline{D}\right) \subset \overline{f(D)}.$$

Exercício 9. Considere as topologias do exercício 5.3. Mostre que para todas elas, as projeções na n-ésima coordenada

$$\begin{array}{rrcl} \pi_n : & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R} \\ & (x_j)_{j \in \mathbb{N}} & \mapsto & x_n \end{array}$$

são funções contínuas.

Mostre também que a família $\mathscr{B}$ deve estar contída em **qualquer topologia** onde as projeções π_n são contínuas.