

Topologia Geral
Lista 2/02 – Verão/2022

Exercício 1. Seja (X, τ) um espaço topológico que satisfaz determinado *axioma de separação*: T_0 , T_1 , Hausdorff, regular, T_3 , etc. Mostre que se tomarmos τ' , um *refinamento* de τ , τ' satisfaz esse mesmo axioma de separação.

Exercício 2. Mostre que se um espaço topológico é T_3 , então dados dois pontos distintos a e b , existem vizinhanças fechadas de a e b que são disjuntas.

Exercício 3. Suponha que X é um espaço T_4 , e que

$$f : X \rightarrow Y$$

é contínua, sobrejetiva e fechada. Mostre que Y também é T_4 .

Em sua demonstração, observe onde foi utilizada cada uma das hipóteses.

Dica: Lembre-se de mostrar que Y é *normal*, e que os conjuntos unitários são fechados.

Exercício 4. O conjunto dos racionais com sua topologia usual é um espaço normal? Se for, apresente uma função contínua

$$f : \mathbb{Q} \rightarrow [0, 1]$$

que separe os conjuntos $[1, 2]$ e $[3, 4]$.

Exercício 5. Seja (X, d) um espaço métrico. Dado um fechado $F \subsetneq X$, mostre que a função

$$\begin{aligned} d_F : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \inf d(x, F) \end{aligned}$$

é contínua.

Tome $a \in X \setminus F$, utilize d_F para construir uma função contínua

$$f : X \rightarrow [0, 1]$$

tal que $f|_F = 0$ e $f(a) = 1$.

Dica: Primeiro construa $f : X \rightarrow [0, \infty)$.

Exercício 6. Seja X um espaço T_3 , e $\mathcal{F}(x)$ a família das vizinhanças fechadas de x .

Dado um conjunto $D \subset X$, mostre que $a \in \overline{D}$ se, e somente se,

$$\emptyset \notin \mathcal{F}(a)|_D.$$

Exercício 7. No *Talkyard*, foi criada uma categoria chamada Lema de Urysohn. Cada estudante deve postar uma demonstração do Lema de Urysohn. Não basta copiar a demonstração de algum lugar. Quero que seja uma demonstração com personalidade. Que mostre sua maneira de enxergar o problema, e sua maneira de enxergar as técnicas utilizadas.

ATENÇÃO: Todos os estudantes precisam entregar essa tarefa. Faz parte da avaliação do uso do fórum.
