Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Topologia Geral
Lista 2/03 – Verão/2022

Atenção: Muito pouca gente participa do fórum. Devo entender que todos estão tranquilos?

Pra você utilizar o fórum, eu não preciso mandar. Se tem algo que você não esteja entendendo, acho uma boa ideia perguntar no fórum!

Exercício 1. Faça os exercícios 7.1.2, 7.2.7, 7.2.8 e 7.2.9 das notas de aula.

Topologia Induzida em um Subconjunto

Exercício 2. Em um espaço topológico, um conjunto pode ser aberto e fechado ao mesmo tempo. Neste caso, alguns gostam de dizer que o conjunto é *clopen*.

Em $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, mostre que $[a, b) \cap \mathbb{Q}$ é *clopen* em $\mathbb{Q}$ se, e somente se, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercício 3. Mostre que $B = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ **não é** aberto nem fechado em $\mathbb{Q}$.

Exercício 4. Seja $q_n \in \mathbb{Q}$ tal que $q_n \to \sqrt{2}$. Mostre que

$$B = \left\{ q_n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

é fechado mas não é aberto.

Exercício 5. Mostre que $B = \left\{ 3 + \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ é aberto e não é fechado em

$$X = \left\{ m + \frac{1}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{N},\, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Exercício 6. Seja $q_n \in \mathbb{Q}$ tal que $q_n \to \sqrt{2}$. Mostre que $B = \left\{ q_n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ é *clopen* em

$$X = \left\{ m + q_n \,\middle|\, m \in \mathbb{N},\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Exercício 7. Sejam X um espaço topológico e $Y \subset X$ um subespaço de X. Ou seja, Y é munido da topologia induzida por X.

Dado $B \subset Y$, podemos considerar a *operação de fecho* em Y, $\mathrm{cl}_Y(B)$, referente à topologia induzida em Y; ou a operação de fecho em X, $\mathrm{cl}_X(B)$. Mostre que

$$\mathrm{cl}_Y(B) = \mathrm{cl}_X(B) \cap Y.$$

Conclua que em particular, $B \subset Y$ é fechado em Y se, e somente se, $B = \mathrm{cl}_X(B) \cap Y$.

Exercício 8. Se você não já o fez, use o exercício 7 e melhore a resolução dos exercícios 2 a 6 usando a operação de fecho para determinar se determinado conjunto é ou não fechado na topologia induzida.

Topologia Inicial

Exercício 9. Suponha que (X, τ) seja um espaço topológico, e que $\mathscr{F}$ seja uma família de funções

$$f : X \to (Y_f, \gamma_f)$$

de X em algum espaço topológico Y_f. Denote por τ_w a topologia inicial gerada pela família $\mathscr{F}$. Explique porque a condição $\tau_w \subset \tau$ equivale à continuidade de cada uma das $f \in \mathscr{F}$, quando consideramos a topologia τ em X.

Exercício 10. Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado de **dimensão infinita**. Considere a topologia fraca em E: τ_w. Ou seja, a *topologia inicial* gerada pelos funcionais lineares que são contínuos (na topologia da norma). Mostre que todo aberto fraco não vazio ($\emptyset \neq A \in \tau_w$) é um conjunto ilimitado.

Conclua que no **caso de dimensão infinita**, a topologia fraca é estritamente mais fraca (tem menos abertos) que a topologia da norma.

Exercício 11. Considere a *norma do máximo* $\|\cdot\|_\infty$ em $\mathbb{R}^n$ (na verdade, o exercício funciona com qualquer norma em $\mathbb{R}^n$, pois todas são equivalentes). Mostre que a topologia fraca em $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ é igual à topologia inicial gerada pelas projeções

$$\begin{array}{rrcl} \pi_j : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & x_j \end{array}.$$

E por sua vez, a topologia incial gerada pelas projeções é igual à topologia da *norma do máximo.*

Exercício 12. (Série A) Em um espaço de Banach de dimensão infinita, a topologia fraca é estritamente mais fraca que a topologia da norma. Isso significa que muitos conjuntos que são fechados na topolgia da norma, não são fechados na *topologia fraca.*

Enuncie e use o *teorema de Hahn-Banach* para mostrar que qualquer convexo fechado (na topologia da norma) é um conjunto fechado também na *topolgia fraca.*