

Topologia Geral
Lista 2/04 – Verão/2022

Atenção: Utilizem o fórum. Quem quiser só enunciar exercícios, pode. Quem quiser só responder, pode. Quem quiser enunciar e responder, pode. Quem quiser fazer perguntas, pode.

Exercício 1. Se X e Y são espaços topológicos, mostre que

$$\overline{A} \times \overline{B} = \overline{A \times B}.$$

Exercício 2. Em um espaço vetorial topológico E , um conjunto $D \subset E$ é chamado de *convexo* quando é fechado por combinações convexas. Ou seja, quando para quaisquer $\alpha, \beta \in [0, 1]$ tais que $\alpha + \beta = 1$, e quaisquer $x, y \in D$,

$$\alpha x + \beta y \in D.$$

Mostre que se D é convexo, então \overline{D} também é.

Exercício 3. Mostre que se X e Y são Hausdorff, então $X \times Y$ também é.

Exercício 4. Dada uma função $f : X \rightarrow Y$, denote por

$$\text{Gr}(f) = \left\{ (x, f(x)) \mid x \in X \right\},$$

o *gráfico* de f . E por

$$\begin{aligned} \text{gr}(f) : X &\rightarrow X \times Y \\ x &\mapsto (x, f(x)) \end{aligned}$$

a *função gráfico*. Mostre que $\text{gr}(f)$ é um homeomorfismo entre X e $\text{Gr}(f)$.

Exercício 5. Dada uma função contínua $f : X \rightarrow Y$. Mostre que se Y é Hausdorff, então o gráfico de f é fechado em $X \times Y$.

Exercício 6. Seja $f : X \rightarrow Z$ uma função qualquer. Mostre que f é contínua se, e somente se,

$$\begin{aligned} \tilde{f} : X \times Y &\rightarrow Z \\ (x, y) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

é contínua.

OBS: Se você fez com *abertos*, faça com *diagramas* e o auxílio de algumas funções básicas, que você já sabe que são contínuas.

Exercício 7. Dê um exemplo de uma função que seja descontínua, mas que tenha o gráfico fechado.

Exercício 8. Mostre que a projeção

$$\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$$

é aberta.

Exercício 9. Mostre que nem sempre a projeção

$$\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$$

é fechada.

Exercício 10. Suponha que X e Y sejam tais que a projeção

$$\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$$

é fechada. Mostre que se $f : X \rightarrow Y$ tem o gráfico fechado, então f é contínua.
