Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Topologia Geral
Lista 2/05 – Verão/2022

Atenção: Utilizem o fórum. Quem quiser só enunciar exercícios, pode. Quem quiser só responder, pode. Quem quiser enunciar e responder, pode. Quem quiser fazer perguntas, pode.

Exercício 1. Mostre que se X_λ $(\lambda \in \Lambda)$ são espaços de Hausdorff, então

$$X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

também é Hausdorff.

Exercício 2. Seja $C([a,b])$ o espaço das funções contínuas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ munido da topologia produto. Mostre que as aplicações a seguir são contínuas:

1. $$\begin{array}{rccc} \varphi : & C([-3,6]) & \to & C([3,5]) \\ & f & \mapsto & f|_{[3,5]} \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rcccccc} \varphi : & C([3,5]) & \to & C([-3,6]) & & & \\ & f & \mapsto & \varphi(f) : & [-3,6] & \to & \mathbb{R} \\ & & & & x & \mapsto & f(3) \end{array}$$

3. $$\begin{array}{rcccccc} \varphi : & C([3,5]) & \to & C([-3,6]) & & & \\ & f & \mapsto & \varphi(f) : & [-3,6] & \to & \mathbb{R} \\ & & & & x & \mapsto & f\left(\frac{2(x+3)}{9} + 3\right) \end{array}$$

Exercício 3. O verdadeiro cubo de Hilbert é o espaço topológico

$$[0,1] \times [0,1/2] \times [0,1/3] \times [0,1/4] \times [0,1/5] \times \cdots .$$

Mostre que esse cubo é homeomorfo ao cubo

$$[0,1]^{\mathbb{N}}.$$

Exercício 4. A topologia produto no cubo $\Omega = [0,1]^{\mathbb{N}}$ é *metrizável*. Isto é, existe uma métrica em Ω que gera sua topologia. Encontre uma tal métrica. Responda também, do ponto de vista topológico, qual é a relação entre essa métrica e a do supremo.

Exercício 5. O verdadeiro cubo de Hilbert é da forma

$$\Omega = [0,1] \times [0,1/2] \times [0,1/3] \times [0,1/4] \times [0,1/5] \times \cdots .$$

Mostre que a topologia produto no cubo de Hilbert é dada pela métrica do supremo.

Exercício 6. *(Série A)* Vamos adaptar o cubo de Hilbert original, e construir o espaço

$$\Omega = [0,1] \times [0,1/2^2] \times [0,1/3^2] \times [0,1/4^2] \times [0,1/5^2] \times \cdots .$$

A topologia em Ω induzida pela métrica da soma é a topologia produto? Demonstre.

Exercício 7. Seja $S \subset \mathbb{C}$ o círculo unitário. E seja $S' = S \setminus \{1\}$. Considere Ω, o espaço de todas as funções contínuas $f : S' \to S$. Mostre que S' é homeomorfo a um subespaço de S^Ω. Ou seja, mostre que existe uma função

$$\varphi : S' \to S^\Omega,$$

injetiva, contínua e com inversa (quando o contradomínio é restrito à imagem de φ) contínua.

Exercício 8. Seja $S \subset \mathbb{C}$ o círculo unitário. E seja $S' = S \setminus \{1\}$. Mostre que a transformação (o sistema dinâmico)

$$\begin{array}{rcl} T: \quad S' & \to & S' \\ (a,b) & \mapsto & T(a,b) = \begin{cases} (a,b), & b \geq 0 \\ -1, & b < 0 \end{cases} \end{array}$$

não pode ser continuamente estendida para uma transformação

$$\tilde{T} : S \to S.$$

Ou seja, não existe uma tal $\tilde{T}$ contínua tal que para todo $x \in S'$, $\tilde{T}x = Tx$.

Exercício 9. *(Série A — desafio)* Seja $S \subset \mathbb{C}$ o círculo unitário. E seja $S' = S \setminus \{1\}$. Seja

$$T : S' \to S'$$

uma transformação contínua qualquer (um sistema dinâmico). O exercício 8 mostra que nem sempre conseguimos uma estensão de T a uma transformação

$$\tilde{T} : S \to S.$$

No entanto, usando o exercício 7, quando identificamos $\iota : S' \to S^\Omega$, a transformação T pode ser facilmente estendida à transformação

$$\begin{array}{rcl} \tilde{T}: \quad S^\Omega & \to & S^\Omega \\ (x_f)_{f \in \Omega} & \mapsto & (x_{f \circ T})_{f \in \Omega} \end{array}.$$

Mostre que

1. $\tilde{T}$ é contínua.
2. De fato, $\tilde{T}$ estende T. Ou seja,

   $$\iota(T(x)) = \tilde{T}(\iota(x)).$$

   Em termos de diagramas comutativos:

   $$\begin{tikzcd} S' \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\iota"] & S' \arrow[d, "\iota"] \\ S^\Omega \arrow[r, "\tilde{T}"] & S^\Omega. \end{tikzcd}$$