# Topologia Geral – Turma ___
# Prova 1 – Verão/2020

**Nome:** **Matrícula** (1)
**Assinatura:** xxxxxxxxxx

**Atenção:** Sempre explique como você sabe que determinado conjunto é aberto, ou determinada função é contínua, e em qual topologia.

**Questão 1** **(2,0 pontos):** Seja $X$ um conjunto munido de uma topologia dada por uma família de abertos $\tau$. Com os elementos de $\tau$, para cada $x \in X$, podemos construir a família

$$\alpha(x) = \left\{V \subset X \,\middle|\, \exists A \in \tau,\, x \in A \subset V\right\}.$$

E agora, com as famílias $\alpha(x)$, podemos construir a família

$$\beta = \left\{A \subset X \,\middle|\, x \in A \Rightarrow A \in \alpha(x)\right\}.$$

Mostre que $\beta = \tau$.

**Questão 2** **(1,0 ponto):** Seja $f : X \to Y$ uma aplicação entre espaços topológicos. Mostre que a continuidade de $f$ equivale à validade da relação

$$f\left(\overline{B}\right) \subset \overline{f(B)},$$

para todo $B \subset X$.

**OBS:** Você pode usar qualquer caracterização da operação de fecho que quiser, e também pode usar qualquer caracterização de continuidade que seja diferente da apresentada na equação do enunciado.

**Questão 3** (1,0 ponto)**:** Seja $X$ um conunto e $\tau$ uma família de subconjuntos de $X$ formada pelos abertos de uma topologia em $X$. Então, para cada $x \in X$, podemos construir a família

$$\alpha(x) = \left\{ V \subset X \,\middle|\, \exists A \in \tau,\, x \in A \subset V \right\}.$$

E então, podemos definir a operação de fecho de duas formas diferentes:

1. $\mathrm{cl}_1(B) = \bigcap \left\{ F \subset X \,\middle|\, B \subset F,\, F^c \in \tau \right\}$.
2. $\mathrm{cl}_2(B) = \left\{ x \in X \,\middle|\, V \in \alpha(x) \Rightarrow V \cap B \neq \emptyset \right\}$.

Mostre que $\mathrm{cl}_1 = \mathrm{cl}_2$.

**Questão 4** (1,0 ponto)**:** Considere a métrica

$$\begin{array}{rccl} d: & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & \min\left(|x - y|, 1\right) \end{array}.$$

Mostre que a topologia da métrica

$$\begin{array}{rccl} m: & \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} & \to & \mathbb{R} \\ & (a, b) & \mapsto & \displaystyle\max_{j \in \mathbb{N}^*} \frac{d(a_j, b_j)}{2^j} \end{array}$$

é exatamente a topologia produto em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$.

**Nome:** **Matrícula**
**Assinatura:** xxxxxxxxxx

**Questão 5** (1,0 ponto)**:** Seja $f : X \to Y$ uma função entre espaços topológicos. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rrcl} F: & X & \to & \mathrm{Gr}\,(f) \\ & x & \mapsto & (x, f(x)) \end{array}.$$

Mostre que $F$ é um homeomorfismo entre $X$ e $\mathrm{Gr}\,(F)$, onde $\mathrm{Gr}\,(F)$ nada mais é do que a imagem de $F$, com a topologia induzida pela topologia produto em $X \times Y$.

**Questão 6** (1,0 ponto)**:**

1. Em um espaço topológico $X$, o gráfico da função identidade é o conjunto
$$\Delta = \left\{(x, x) \,\middle|\, x \in X\right\}.$$
Mostre que $\Delta \subset X \times X$ é fechado **na topologia produto** se, e somente se, $X$ é um espaço de Hausdorff.

2. Sejam $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ funções contínuas entre espaços topológicos. Mostre que se $Y$ é Hausdorff, então o conjunto
$$B = \left\{x \in X \,\middle|\, f(x) = g(x)\right\}$$
é fechado.

**Questão 7** **(1,0 ponto):** Seja $G$ um grupo topológico e $H$ um subgrupo de $G$. Mostre que se $\overset{\circ}{H} \neq \emptyset$, então $H$ é um subconjunto aberto e fechado de $G$.

**Questão 8** **(2,0 pontos):** Seja $G$ um grupo topológico e $N$ um subgrupo normal. Munindo $G/N$ com a topologia quociente, e $G/N \times G/N$ com a topologia produto, mostre que

$$\begin{array}{rrcl} p: & G/N \times G/N & \to & G/N \\ & (gN, hN) & \mapsto & ghN \end{array}$$

é contínua.

**OBS:** Não precisa mostrar que $p$ está bem-definida.


Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

# Topologia Geral – Turma ___
# Prova 1 – Verão/2020

**Nome:** **Matrícula** (2)
**Assinatura:** xxxxxxxxxx

**Atenção:** Sempre explique como você sabe que determinado conjunto é aberto, ou determinada função é contínua, e em qual topologia.

**Questão 1** **(2,0 pontos):** Seja $X$ um conjunto munido de uma topologia dada por uma família de abertos $\tau$. Com os elementos de $\tau$, para cada $x \in X$, podemos construir a família

$$\alpha(x) = \left\{V \subset X \,\middle|\, \exists A \in \tau,\, x \in A \subset V\right\}.$$

E agora, com as famílias $\alpha(x)$, podemos construir a família

$$\beta = \left\{A \subset X \,\middle|\, x \in A \Rightarrow A \in \alpha(x)\right\}.$$

Mostre que $\beta = \tau$.

**Questão 2** **(1,0 ponto):** Seja $f : X \to Y$ uma aplicação entre espaços topológicos. Mostre que a continuidade de $f$ equivale à validade da relação

$$f\left(\overline{B}\right) \subset \overline{f(B)},$$

para todo $B \subset X$.

**OBS:** Você pode usar qualquer caracterização da operação de fecho que quiser, e também pode usar qualquer caracterização de continuidade que seja diferente da apresentada na equação do enunciado.

**Questão 3** **(1,0 ponto):** Seja $X$ um conunto e $\tau$ uma família de subconjuntos de $X$ formada pelos abertos de uma topologia em $X$. Então, para cada $x \in X$, podemos construir a família

$$\alpha(x) = \left\{ V \subset X \,\middle|\, \exists A \in \tau,\, x \in A \subset V \right\}.$$

E então, podemos definir a operação de fecho de duas formas diferentes:

1. $\mathrm{cl}_1(B) = \bigcap \left\{ F \subset X \,\middle|\, B \subset F,\, F^c \in \tau \right\}$.
2. $\mathrm{cl}_2(B) = \left\{ x \in X \,\middle|\, V \in \alpha(x) \Rightarrow V \cap B \neq \emptyset \right\}$.

Mostre que $\mathrm{cl}_1 = \mathrm{cl}_2$.

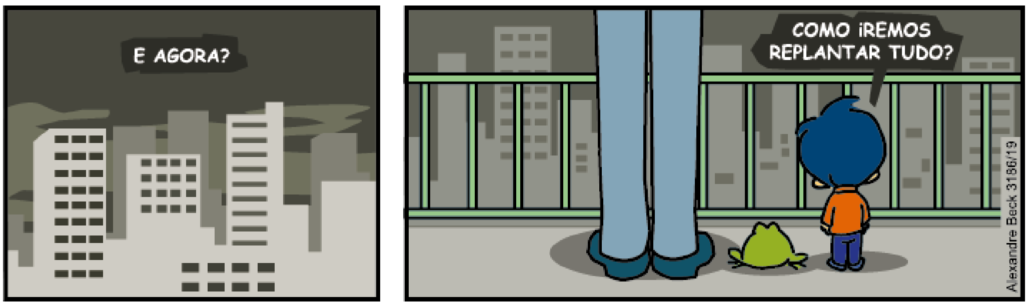
**Questão 4** **(1,0 ponto):** Considere a métrica

$$\begin{array}{rccl} d: & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & \min\left(|x - y|, 1\right) \end{array}.$$

Mostre que a topologia da métrica

$$\begin{array}{rccl} m: & \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} & \to & \mathbb{R} \\ & (a, b) & \mapsto & \max\limits_{j \in \mathbb{N}^*} \dfrac{d(a_j, b_j)}{2^j} \end{array}$$

é exatamente a topologia produto em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$.



**Nome:** **Matrícula**
**Assinatura:** xxxxxxxxxx

**Questão 5** **(1,0 ponto):** Seja $f : X \to Y$ uma função entre espaços topológicos. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rccl} F : & X & \to & \mathrm{Gr}\,(f) \\ & x & \mapsto & (x, f(x)) \end{array}.$$

Mostre que $F$ é um homeomorfismo entre $X$ e $\mathrm{Gr}\,(F)$, onde $\mathrm{Gr}\,(F)$ nada mais é do que a imagem de $F$, com a topologia induzida pela topologia produto em $X \times Y$.

**Questão 6** **(1,0 ponto):**

1. Em um espaço topológico $X$, o gráfico da função identidade é o conjunto
$$\Delta = \left\{ (x, x) \,\middle|\, x \in X \right\}.$$
Mostre que $\Delta \subset X \times X$ é fechado **na topologia produto** se, e somente se, $X$ é um espaço de Hausdorff.

2. Sejam $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ funções contínuas entre espaços topológicos. Mostre que se $Y$ é Hausdorff, então o conjunto
$$B = \left\{ x \in X \,\middle|\, f(x) = g(x) \right\}$$
é fechado.

**Questão 7** (1,0 ponto)**:** Seja $G$ um grupo topológico e $H$ um subgrupo de $G$. Mostre que se $\overset{\circ}{H} \neq \emptyset$, então $H$ é um subconjunto aberto e fechado de $G$.

**Questão 8** (2,0 pontos)**:** Seja $G$ um grupo topológico e $N$ um subgrupo normal. Munindo $G/N$ com a topologia quociente, e $G/N \times G/N$ com a topologia produto, mostre que

$$\begin{array}{rrcl} p: & G/N \times G/N & \to & G/N \\ & (gN, hN) & \mapsto & ghN \end{array}$$

é contínua.

**OBS:** Não precisa mostrar que $p$ está bem-definida.


# Topologia Geral – Turma ___
# Prova 1 – Verão/2020

**Nome:** **Matrícula** (3)
**Assinatura:** xxxxxxxxxx

**Atenção:** Sempre explique como você sabe que determinado conjunto é aberto, ou determinada função é contínua, e em qual topologia.

**Questão 1** **(2,0 pontos):** Seja $X$ um conjunto munido de uma topologia dada por uma família de abertos $\tau$. Com os elementos de $\tau$, para cada $x \in X$, podemos construir a família

$$\alpha(x) = \left\{ V \subset X \,\middle|\, \exists A \in \tau,\, x \in A \subset V \right\}.$$

E agora, com as famílias $\alpha(x)$, podemos construir a família

$$\beta = \left\{ A \subset X \,\middle|\, x \in A \Rightarrow A \in \alpha(x) \right\}.$$

Mostre que $\beta = \tau$.

**Questão 2** **(1,0 ponto):** Seja $f : X \to Y$ uma aplicação entre espaços topológicos. Mostre que a continuidade de $f$ equivale à validade da relação

$$f\left(\overline{B}\right) \subset \overline{f(B)},$$

para todo $B \subset X$.

**OBS:** Você pode usar qualquer caracterização da operação de fecho que quiser, e também pode usar qualquer caracterização de continuidade que seja diferente da apresentada na equação do enunciado.

**Questão 3** (1,0 ponto): Seja $X$ um conunto e $\tau$ uma família de subconjuntos de $X$ formada pelos abertos de uma topologia em $X$. Então, para cada $x \in X$, podemos construir a família

$$\alpha(x) = \left\{ V \subset X \,\middle|\, \exists A \in \tau,\, x \in A \subset V \right\}.$$

E então, podemos definir a operação de fecho de duas formas diferentes:

1. $\mathrm{cl}_1(B) = \bigcap \left\{ F \subset X \,\middle|\, B \subset F,\, F^c \in \tau \right\}$.
2. $\mathrm{cl}_2(B) = \left\{ x \in X \,\middle|\, V \in \alpha(x) \Rightarrow V \cap B \neq \emptyset \right\}$.

Mostre que $\mathrm{cl}_1 = \mathrm{cl}_2$.

**Questão 4** (1,0 ponto): Considere a métrica

$$\begin{array}{rrcl} d: & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & \min\left(|x - y|, 1\right) \end{array}.$$

Mostre que a topologia da métrica

$$\begin{array}{rrcl} m: & \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} & \to & \mathbb{R} \\ & (a, b) & \mapsto & \displaystyle\max_{j \in \mathbb{N}^*} \frac{d(a_j, b_j)}{2^j} \end{array}$$

é exatamente a topologia produto em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$.

| **Nome:** | **Matrícula** |
|---|---|
| **Assinatura:** | xxxxxxxxxx |

**Questão 5** **(1,0 ponto)**: Seja $f : X \to Y$ uma função entre espaços topológicos. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rrcl} F: & X & \to & \mathrm{Gr}\,(f) \\ & x & \mapsto & (x, f(x)) \end{array}.$$

Mostre que $F$ é um homeomorfismo entre $X$ e $\mathrm{Gr}\,(F)$, onde $\mathrm{Gr}\,(F)$ nada mais é do que a imagem de $F$, com a topologia induzida pela topologia produto em $X \times Y$.

**Questão 6** **(1,0 ponto)**:

1. Em um espaço topológico $X$, o gráfico da função identidade é o conjunto
$$\Delta = \left\{ (x, x) \,\middle|\, x \in X \right\}.$$
Mostre que $\Delta \subset X \times X$ é fechado **na topologia produto** se, e somente se, $X$ é um espaço de Hausdorff.

2. Sejam $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ funções contínuas entre espaços topológicos. Mostre que se $Y$ é Hausdorff, então o conjunto
$$B = \left\{ x \in X \,\middle|\, f(x) = g(x) \right\}$$
é fechado.

**Questão 7** (1,0 ponto)**:** Seja $G$ um grupo topológico e $H$ um subgrupo de $G$. Mostre que se $\mathring{H} \neq \emptyset$, então $H$ é um subconjunto aberto e fechado de $G$.

**Questão 8** (2,0 pontos)**:** Seja $G$ um grupo topológico e $N$ um subgrupo normal. Munindo $G/N$ com a topologia quociente, e $G/N \times G/N$ com a topologia produto, mostre que

$$\begin{array}{rcl} p: \ G/N \times G/N & \to & G/N \\ (gN, hN) & \mapsto & ghN \end{array}$$

é contínua.

**OBS:** Não precisa mostrar que $p$ está bem-definida.


Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

# Topologia Geral – Turma ___
# Prova 1 – Verão/2020

**Nome:** **Matrícula** (4)
**Assinatura:** xxxxxxxxxx

**Atenção:** Sempre explique como você sabe que determinado conjunto é aberto, ou determinada função é contínua, e em qual topologia.

**Questão 1 (2,0 pontos):** Seja $X$ um conjunto munido de uma topologia dada por uma família de abertos $\tau$. Com os elementos de $\tau$, para cada $x \in X$, podemos construir a família

$$\alpha(x) = \left\{ V \subset X \,\middle|\, \exists A \in \tau,\, x \in A \subset V \right\}.$$

E agora, com as famílias $\alpha(x)$, podemos construir a família

$$\beta = \left\{ A \subset X \,\middle|\, x \in A \Rightarrow A \in \alpha(x) \right\}.$$

Mostre que $\beta = \tau$.

**Questão 2 (1,0 ponto):** Seja $f : X \to Y$ uma aplicação entre espaços topológicos. Mostre que a continuidade de $f$ equivale à validade da relação

$$f\left(\overline{B}\right) \subset \overline{f(B)},$$

para todo $B \subset X$.

**OBS:** Você pode usar qualquer caracterização da operação de fecho que quiser, e também pode usar qualquer caracterização de continuidade que seja diferente da apresentada na equação do enunciado.

**Questão 3** **(1,0 ponto)**: Seja $X$ um conunto e $\tau$ uma família de subconjuntos de $X$ formada pelos abertos de uma topologia em $X$. Então, para cada $x \in X$, podemos construir a família

$$\alpha(x) = \left\{ V \subset X \,\middle|\, \exists A \in \tau,\, x \in A \subset V \right\}.$$

E então, podemos definir a operação de fecho de duas formas diferentes:

1. $\mathrm{cl}_1(B) = \bigcap \left\{ F \subset X \,\middle|\, B \subset F,\, F^c \in \tau \right\}$.
2. $\mathrm{cl}_2(B) = \left\{ x \in X \,\middle|\, V \in \alpha(x) \Rightarrow V \cap B \neq \emptyset \right\}$.

Mostre que $\mathrm{cl}_1 = \mathrm{cl}_2$.

**Questão 4** **(1,0 ponto)**: Considere a métrica

$$\begin{array}{rrcl} d: & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & \min\left(|x - y|, 1\right) \end{array}.$$

Mostre que a topologia da métrica

$$\begin{array}{rrcl} m: & \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} & \to & \mathbb{R} \\ & (a, b) & \mapsto & \displaystyle\max_{j \in \mathbb{N}^*} \frac{d(a_j, b_j)}{2^j} \end{array}$$

é exatamente a topologia produto em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$.

| **Nome:** | **Matrícula** |
|---|---|
| **Assinatura:** | xxxxxxxxxx |

**Questão 5** (1,0 ponto)**:** Seja $f : X \to Y$ uma função entre espaços topológicos. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rccl} F: & X & \to & \mathrm{Gr}\,(f) \\ & x & \mapsto & (x, f(x)) \end{array}.$$

Mostre que $F$ é um homeomorfismo entre $X$ e $\mathrm{Gr}\,(F)$, onde $\mathrm{Gr}\,(F)$ nada mais é do que a imagem de $F$, com a topologia induzida pela topologia produto em $X \times Y$.

**Questão 6** (1,0 ponto)**:**

1. Em um espaço topológico $X$, o gráfico da função identidade é o conjunto
$$\Delta = \left\{ (x, x) \,\middle|\, x \in X \right\}.$$
Mostre que $\Delta \subset X \times X$ é fechado **na topologia produto** se, e somente se, $X$ é um espaço de Hausdorff.

2. Sejam $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ funções contínuas entre espaços topológicos. Mostre que se $Y$ é Hausdorff, então o conjunto
$$B = \left\{ x \in X \,\middle|\, f(x) = g(x) \right\}$$
é fechado.

**<u>Questão 7 (1,0 ponto)</u>:** Seja $G$ um grupo topológico e $H$ um subgrupo de $G$. Mostre que se $\overset{\circ}{H} \neq \emptyset$, então $H$ é um subconjunto aberto e fechado de $G$.

**<u>Questão 8 (2,0 pontos)</u>:** Seja $G$ um grupo topológico e $N$ um subgrupo normal. Munindo $G/N$ com a topologia quociente, e $G/N \times G/N$ com a topologia produto, mostre que

$$\begin{array}{rrcl} p: & G/N \times G/N & \to & G/N \\ & (gN, hN) & \mapsto & ghN \end{array}$$

é contínua.

**OBS:** Não precisa mostrar que $p$ está bem-definida.


Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

# Topologia Geral – Turma ___
# Prova 1 – Verão/2020

**Nome:** **Matrícula** (5)
**Assinatura:** xxxxxxxxxx

**Atenção:** Sempre explique como você sabe que determinado conjunto é aberto, ou determinada função é contínua, e em qual topologia.

**Questão 1** (2,0 pontos): Seja $X$ um conjunto munido de uma topologia dada por uma família de abertos $\tau$. Com os elementos de $\tau$, para cada $x \in X$, podemos construir a família

$$\alpha(x) = \{V \subset X \mid \exists A \in \tau,\, x \in A \subset V\}.$$

E agora, com as famílias $\alpha(x)$, podemos construir a família

$$\beta = \left\{A \subset X \,\middle|\, x \in A \Rightarrow A \in \alpha(x)\right\}.$$

Mostre que $\beta = \tau$.

**Questão 2** (1,0 ponto): Seja $f : X \to Y$ uma aplicação entre espaços topológicos. Mostre que a continuidade de $f$ equivale à validade da relação

$$f\left(\overline{B}\right) \subset \overline{f(B)},$$

para todo $B \subset X$.

**OBS:** Você pode usar qualquer caracterização da operação de fecho que quiser, e também pode usar qualquer caracterização de continuidade que seja diferente da apresentada na equação do enunciado.

**Questão 3** **(1,0 ponto):** Seja $X$ um conunto e $\tau$ uma família de subconjuntos de $X$ formada pelos abertos de uma topologia em $X$. Então, para cada $x \in X$, podemos construir a família

$$\alpha(x) = \left\{ V \subset X \,\middle|\, \exists A \in \tau,\, x \in A \subset V \right\}.$$

E então, podemos definir a operação de fecho de duas formas diferentes:

1. $\mathrm{cl}_1(B) = \bigcap \left\{ F \subset X \,\middle|\, B \subset F,\, F^c \in \tau \right\}$.
2. $\mathrm{cl}_2(B) = \left\{ x \in X \,\middle|\, V \in \alpha(x) \Rightarrow V \cap B \neq \emptyset \right\}$.

Mostre que $\mathrm{cl}_1 = \mathrm{cl}_2$.

**Questão 4** **(1,0 ponto):** Considere a métrica

$$\begin{array}{rrcl} d: & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & \min\left(|x - y|, 1\right) \end{array}.$$

Mostre que a topologia da métrica

$$\begin{array}{rrcl} m: & \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} & \to & \mathbb{R} \\ & (a, b) & \mapsto & \displaystyle\max_{j \in \mathbb{N}^*} \frac{d(a_j, b_j)}{2^j} \end{array}$$

é exatamente a topologia produto em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$.

| | |
|---|---|
| **Nome:** | **Matrícula** |
| **Assinatura:** | xxxxxxxxx |

**Questão 5** **(1,0 ponto):** Seja $f : X \to Y$ uma função entre espaços topológicos. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rccl} F: & X & \to & \mathrm{Gr}\,(f) \\ & x & \mapsto & (x, f(x)) \end{array}.$$

Mostre que $F$ é um homeomorfismo entre $X$ e $\mathrm{Gr}\,(F)$, onde $\mathrm{Gr}\,(F)$ nada mais é do que a imagem de $F$, com a topologia induzida pela topologia produto em $X \times Y$.

**Questão 6** **(1,0 ponto):**

1. Em um espaço topológico $X$, o gráfico da função identidade é o conjunto
$$\Delta = \left\{ (x, x) \,\middle|\, x \in X \right\}.$$
Mostre que $\Delta \subset X \times X$ é fechado **na topologia produto** se, e somente se, $X$ é um espaço de Hausdorff.

2. Sejam $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ funções contínuas entre espaços topológicos. Mostre que se $Y$ é Hausdorff, então o conjunto
$$B = \left\{ x \in X \,\middle|\, f(x) = g(x) \right\}$$
é fechado.

**Questão 7** **(1,0 ponto):** Seja $G$ um grupo topológico e $H$ um subgrupo de $G$. Mostre que se $\mathring{H} \neq \emptyset$, então $H$ é um subconjunto aberto e fechado de $G$.

**Questão 8** **(2,0 pontos):** Seja $G$ um grupo topológico e $N$ um subgrupo normal. Munindo $G/N$ com a topologia quociente, e $G/N \times G/N$ com a topologia produto, mostre que

$$\begin{array}{rrcl} p: & G/N \times G/N & \to & G/N \\ & (gN, hN) & \mapsto & ghN \end{array}$$

é contínua.

**OBS:** Não precisa mostrar que $p$ está bem-definida.