Topologia Geral – Turma ___
Prova 2 – Verão/2020

Nome: **Matrícula** (1)
Assinatura: xxxxxxxxxx

Atenção: Sempre explique como você sabe que determinado conjunto é aberto, ou determinada função é contínua, e em qual topologia.

Quando a topologia não é mencionada, é a *topologia usual*.

Se determinada questão pedir para usar uma certa caracterização de alguma propriedade topológica, você deve usar a caracterização que foi solicitada. Caso contrário, poderá usar a caracterização/definição que julgar mais conveniente.

Questão 1 **(2,0 pontos)**: Seja (X, τ) um espaço topológico. Sabemos que $Y \subset X$ é conexo se, e somente se, toda função contínua de Y no espaço discreto $\{0, 1\}$ é necessariamente constante.

Use **essa caracterização** de conexidade para mostrar que se $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$ é uma família de conjuntos conexos com $\bigcap \mathscr{C} \neq \emptyset$, então $C = \bigcup \mathscr{C}$ é conexo.

Questão 2 **(2,0 pontos)**: Mostre que os conjuntos compactos de um espaço de Hausdorff são sempre fechados.

Questão 3 **(2,0 pontos)**: Seja X um espaço topológico localmente conexo por caminhos. Dado um ponto $x \in X$ qualquer, denote por C_x a componente conexa que contém x. E por D_x, a componente conexa por caminhos que contém x. Mostre que

1. C_a é aberto.
2. C_a é conexo por caminhos.
3. $C_a = D_a$.

Questão 4 **(2,0 pontos)**: Um espaço topológico Z é conexo se, e somente se, os únicos conjuntos *clopen* são $\emptyset$ e o próprio Z.

Utilizando **essa caracterização de conexidade**, mostre que se $f : X \to Y$ é uma função contínua entre espaços topológicos, e se $C \subset X$ é conexo, então $f(C) \subset Y$ é conexo.

Questão 5 **(2,0 pontos)**: Considere a função contínua e injetiva

$$\begin{array}{rccc} f: & \{0,2\}^{\mathbb{N}^*} & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \end{array}.$$

A imagem de f é o conjunto de cantor $C \subset [0,1]$, munido da topologia induzida da topologia usual de $[0,1]$. Mostre que existe um homeomorfismo entre C e $C \times C$.

Topologia Geral – Turma ___
Prova 2 – Verão/2020

Nome: **Matrícula** (2)
Assinatura: xxxxxxxxxx

Atenção: Sempre explique como você sabe que determinado conjunto é aberto, ou determinada função é contínua, e em qual topologia.

Quando a topologia não é mencionada, é a *topologia usual*.

Se determinada questão pedir para usar uma certa caracterização de alguma propriedade topológica, você deve usar a caracterização que foi solicitada. Caso contrário, poderá usar a caracterização/definição que julgar mais conveniente.

Questão 1 (2,0 pontos): Seja (X, τ) um espaço topológico. Sabemos que $Y \subset X$ é conexo se, e somente se, toda função contínua de Y no espaço discreto $\{0, 1\}$ é necessariamente constante.

Use **essa caracterização** de conexidade para mostrar que se $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$ é uma família de conjuntos conexos com $\bigcap \mathscr{C} \neq \emptyset$, então $C = \bigcup \mathscr{C}$ é conexo.

Questão 2 (2,0 pontos): Mostre que os conjuntos compactos de um espaço de Hausdorff são sempre fechados.

Questão 3 (2,0 pontos): Seja X um espaço topológico localmente conexo por caminhos. Dado um ponto $x \in X$ qualquer, denote por C_x a componente conexa que contém x. E por D_x, a componente conexa por caminhos que contém x. Mostre que

1. C_a é aberto.
2. C_a é conexo por caminhos.
3. $C_a = D_a$.

Questão 4 (2,0 pontos)**:** Um espaço topológico Z é conexo se, e somente se, os únicos conjuntos *clopen* são $\emptyset$ e o próprio Z.

Utilizando **essa caracterização de conexidade**, mostre que se $f : X \to Y$ é uma função contínua entre espaços topológicos, e se $C \subset X$ é conexo, então $f(C) \subset Y$ é conexo.

Questão 5 (2,0 pontos)**:** Considere a função contínua e injetiva

$$\begin{array}{rccl} f: & \{0,2\}^{\mathbb{N}^*} & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \end{array} .$$

A imagem de f é o conjunto de cantor $C \subset [0,1]$, munido da topologia induzida da topologia usual de $[0,1]$. Mostre que existe um homeomorfismo entre C e $C \times C$.

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Topologia Geral – Turma ___
Prova 2 – Verão/2020

Nome: **Matrícula** (3)
Assinatura: xxxxxxxxxx

Atenção: Sempre explique como você sabe que determinado conjunto é aberto, ou determinada função é contínua, e em qual topologia.

Quando a topologia não é mencionada, é a *topologia usual*.

Se determinada questão pedir para usar uma certa caracterização de alguma propriedade topológica, você deve usar a caracterização que foi solicitada. Caso contrário, poderá usar a caracterização/definição que julgar mais conveniente.

Questão 1 (2,0 pontos): Seja (X, τ) um espaço topológico. Sabemos que $Y \subset X$ é conexo se, e somente se, toda função contínua de Y no espaço discreto $\{0, 1\}$ é necessariamente constante.

Use **essa caracterização** de conexidade para mostrar que se $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$ é uma família de conjuntos conexos com $\bigcap \mathscr{C} \neq \emptyset$, então $C = \bigcup \mathscr{C}$ é conexo.

Questão 2 (2,0 pontos): Mostre que os conjuntos compactos de um espaço de Hausdorff são sempre fechados.

Questão 3 (2,0 pontos): Seja X um espaço topológico localmente conexo por caminhos. Dado um ponto $x \in X$ qualquer, denote por C_x a componente conexa que contém x. E por D_x, a componente conexa por caminhos que contém x. Mostre que

1. C_a é aberto.
2. C_a é conexo por caminhos.
3. $C_a = D_a$.

Questão 4 (2,0 pontos): Um espaço topológico Z é conexo se, e somente se, os únicos conjuntos *clopen* são $\emptyset$ e o próprio Z.

Utilizando **essa caracterização de conexidade**, mostre que se $f : X \to Y$ é uma função contínua entre espaços topológicos, e se $C \subset X$ é conexo, então $f(C) \subset Y$ é conexo.

Questão 5 (2,0 pontos): Considere a função contínua e injetiva

$$\begin{aligned} f: \ \{0,2\}^{\mathbb{N}^*} &\to [0,1] \\ x &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \end{aligned} .$$

A imagem de f é o conjunto de cantor $C \subset [0,1]$, munido da topologia induzida da topologia usual de $[0,1]$. Mostre que existe um homeomorfismo entre C e $C \times C$.

Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Topologia Geral – Turma ___
Prova 2 – Verão/2020

Nome: **Matrícula** (4)
Assinatura: xxxxxxxxxx

Atenção: Sempre explique como você sabe que determinado conjunto é aberto, ou determinada função é contínua, e em qual topologia.

Quando a topologia não é mencionada, é a *topologia usual*.

Se determinada questão pedir para usar uma certa caracterização de alguma propriedade topológica, você deve usar a caracterização que foi solicitada. Caso contrário, poderá usar a caracterização/definição que julgar mais conveniente.

Questão 1 **(2,0 pontos):** Seja (X, τ) um espaço topológico. Sabemos que $Y \subset X$ é conexo se, e somente se, toda função contínua de Y no espaço discreto $\{0, 1\}$ é necessariamente constante.

Use **essa caracterização** de conexidade para mostrar que se $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$ é uma família de conjuntos conexos com $\bigcap \mathscr{C} \neq \emptyset$, então $C = \bigcup \mathscr{C}$ é conexo.

Questão 2 **(2,0 pontos):** Mostre que os conjuntos compactos de um espaço de Hausdorff são sempre fechados.

Questão 3 **(2,0 pontos):** Seja X um espaço topológico localmente conexo por caminhos. Dado um ponto $x \in X$ qualquer, denote por C_x a componente conexa que contém x. E por D_x, a componente conexa por caminhos que contém x. Mostre que

1. C_a é aberto.

2. C_a é conexo por caminhos.

3. $C_a = D_a$.

Questão 4 (2,0 pontos): Um espaço topológico Z é conexo se, e somente se, os únicos conjuntos *clopen* são $\emptyset$ e o próprio Z.

Utilizando **essa caracterização de conexidade**, mostre que se $f : X \to Y$ é uma função contínua entre espaços topológicos, e se $C \subset X$ é conexo, então $f(C) \subset Y$ é conexo.

Questão 5 (2,0 pontos): Considere a função contínua e injetiva

$$\begin{aligned} f: \{0,2\}^{\mathbb{N}^*} &\to [0,1] \\ x &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \end{aligned}.$$

A imagem de f é o conjunto de cantor $C \subset [0,1]$, munido da topologia induzida da topologia usual de $[0,1]$. Mostre que existe um homeomorfismo entre C e $C \times C$.