Introdução

Em um espaço topológico X, podemos definir vários conceitos. Quais são os conjuntos abertos, quais são os *fechados*, ou quais são as *vizinhanças* de cada ponto, ou como se comporta o *operador de fecho*, ou como se comporta o *operador de interior*, etc. Se conhecermos um desses, podemos definir os outros a partir do que já está especificado. Por exemplo, se sabemos quais são as vizinhanças de cada um dos pontos de X, podemos definir os conjuntos abertos como aqueles que são vizinhança de cada um de seus pontos. Se, por outro lado, sabemos quem são os abertos, podemos definir as vizinhanças de um ponto x como os conjuntos que contém um aberto que contém x.

A seguir estão listados alguns *axiomas* que podem ser utilizados. E também está listada a maneira como se pode definir os demais conceitos a partir do primeiro, que foi axiomatizado.

Começando, por exemplo com uma topologia definida através de uma família de abertos τ, definindo o que são as vizinhanças de cada $x \in X$, e utilizando essa noção de vizinhança pra definir os abertos de uma topologia γ — como formada pelos conjuntos que são vizinhanças de todos os seus pontos —, é importante que, de fato, $\gamma = \tau$.

Capítulo 1

Abertos

1.1 Axiomas

Uma família de subconjuntos de X

$$\tau \subset \mathscr{P}(X)$$

é uma *topologia* quando:

1. $X, \emptyset \in \tau$.

2. $\Gamma \subset \tau$, $\#\Gamma < \infty \Rightarrow \bigcap \Gamma \in \tau$.

3. $\Gamma \subset \tau \Rightarrow \bigcup \Gamma \in \tau$.

1.2 Notação

Dado $x \in X$, denotamos por

$$\tau(x) = \left\{ A \in \tau \;\middle|\; x \in A \right\}$$

o conunto das *vizinhanças abertas* de x.

1.3 Definições Derivadas

1.3.1 Vizinhanças

Dado $x \in X$, uma *vizinhança* de x é um conjunto que contém um aberto que contém x. O *filtro de vizinhanças* de x é

$$\mathscr{V}(x) = \left\{ V \subset X \,\middle|\, \exists A \in \tau(x),\, A \subset V \right\}.$$

1.3.2 Fechados

F é *fechado* quando $F^c \in \tau$.

1.3.3 Fecho

Dado $S \subset X$, o *fecho* de S é o conjunto

$$\overline{S} = \left\{ x \in X \,\middle|\, \forall A \in \tau(x),\, A \cap S \neq \emptyset \right\}.$$

São os pontos que estão *"próximos"* de S.

1.3.4 Interior

Dado $S \subset X$, o *interior* de S é o conjunto

$$\mathring{S} = \bigcup \left\{ A \in \tau \,\middle|\, A \subset S \right\}.$$

Como τ é fechado por união arbitrária, o interior é o maior aberto contido em S.

Alternativamente,

$$\mathring{S} = \left\{ x \in S \,\middle|\, \exists A \in \tau(x),\, A \subset S \right\}.$$

Capítulo 2

Fechados

2.1 Axiomas

Uma família de subconjuntos de X

$$\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$$

são os *fechados de uma topologia* quando:

1. $X, \emptyset \in \mathscr{F}$.
2. $\Gamma \subset \mathscr{F}$, $\#\Gamma < \infty \Rightarrow \bigcup \Gamma \in \mathscr{F}$.
3. $\Gamma \subset \mathscr{F} \Rightarrow \bigcap \Gamma \in \mathscr{F}$.

2.2 Definições Derivadas

2.2.1 Abertos

A é *aberto* quando $A^c \in \mathscr{F}$.

2.2.2 fecho

Dado $S \subset X$, o *fecho* de S é o conjunto

$$\overline{S} = \bigcap \left\{ F \in \mathscr{F} \;\middle|\; S \subset F \right\}.$$

Como $\mathscr{F}$ é fechado por interseção arbitrária, o fecho é o menor fechado que contém S.

Capítulo 3

Filtros de Vizinhanças

3.1 Axiomas

Para cada $x \in X$, seja $\mathscr{V}(x)$ uma família de subconjuntos de X. Com essa família, definimos a operação de *interior*:

$$\mathring{B} = \left\{ x \in B \,\middle|\, B \in \mathscr{V}(x) \right\}.$$

As famílias $\mathscr{V}(x)$ são *filtros de vizinhanças* de x que definem uma topologia em X quando:

1. $V \in \mathscr{V}(x) \Rightarrow x \in V$.

2. $\Gamma \subset \mathscr{V}(x)$, $\#\Gamma < \infty \Rightarrow \bigcap \Gamma \in \mathscr{V}(x)$.

3. $V \in \mathscr{V}(x)$, $V \subset W \Rightarrow W \in \mathscr{V}(x)$.

4. $V \in \mathscr{V}(x) \Rightarrow \mathring{V} \in \mathscr{V}(x)$.

3.1.1 Alternativa: idempotência

O item 4 pode ser substituido por

4'. A operação de interior é idempotênte: $\mathring{\mathring{B}} = \mathring{B}$.

3.1.2 Alternativa: base de abertos

Através das famílias $\mathscr{V}(x)$, podemos definir os abertos como sendo os conjuntos que são vizinhanças de todos os seus pontos:

$$\tau = \left\{ A \subset X \;\middle|\; x \in A \Rightarrow A \in \mathscr{V}(x) \right\}.$$

Os abertos que contém um determinado ponto $x \in X$

$$\tau(x) = \left\{ A \in \tau \;\middle|\; x \in A \right\}$$

também são chamados de *vizinhanças abertas de x*. São chamados assim justamente porque o item 4 dos axiomas de $\mathscr{V}(x)$ pode ser substituído por

4''. $\tau(x)$ é base de $\mathscr{V}(x)$.

3.2 Definições Derivadas

3.2.1 Abertos

Os *abertos* da topologia são dados por

$$\tau = \left\{ A \subset X \;\middle|\; x \in A \Rightarrow A \in \mathscr{V}(x) \right\}.$$

Ou seja, os abertos são os conjuntos que são vizinhança de seus pontos.

3.2.2 Fechados

Um conjunto $F \subset X$ é *fechado* se quando $x \in X$ é tal que

$$V \in \mathscr{V}(x) \Rightarrow V \cap F \neq \emptyset,$$

então $x \in F$. Ou seja, todo ponto *"próximo"* de F está contido em F.

3.2.3 Fecho

Dado $S \subset X$, o *fecho* de S é o conjunto

$$\overline{S} = \left\{ x \in X \;\middle|\; \forall V \in \mathscr{V}(x),\, A \cap S \neq \emptyset \right\}.$$

São os pontos que estão *"próximos"* de S.

3.2.4 Interior

Dado $S \subset X$, o *interior* de S é o conjunto

$$\mathring{S} = \left\{ x \in S \,\middle|\, S \in \mathscr{V}(x) \right\}.$$

Quando $S \in \mathscr{V}(x)$, dizemos que x é um *ponto interior* de S.