

Formas Normais para Lógicas Modais

Cláudia Nalon

<http://www.cic.unb.br/docentes/nalon>

`nalon@{cic.unb.br, unb.br}`

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Ciência da Computação

Motivação – I

● Formas Normais Modais

Motivação

● **Motivação – I**

● Motivação – II

● Motivação – III

Roteiro

Lógica Proposicional

Lógica de Conhecimento

Conclusões

- Linguagens lógicas estão intrinsicamente ligadas ao conceito de computação (e.g. circuitos implementando um computador digital podem ser descritos através de linguagem proposicional).
- A utilização de linguagens lógicas para descrever problemas computacionais data da época em que os primeiros computadores digitais foram construídos.
- Datam da mesma época também, os esforços para se implementar provadores automáticos de teoremas.

Motivação – II

● Formas Normais Modais

Motivação

● Motivação – I

● Motivação – II

● Motivação – III

Roteiro

Lógica Proposicional

Lógica de Conhecimento

Conclusões

- Desenvolvimentos teóricos, datando desta mesma época, fizeram com que as linguagens modais deixassem o contexto da discussão filosófica e fossem adotadas na descrição de problemas matemáticos e computacionais.
- Linguagens modais expressam tais problemas de modo natural, através, por exemplo, do uso das noções de necessidade, conhecimento, crença e tempo.
- Linguagens modais possuem **boas** características, ou seja, os problemas de decisão relativos a tais linguagens são computacionalmente tratáveis.

Motivação – III

● Formas Normais Modais

Motivação

● Motivação – I

● Motivação – II

● Motivação – III

Roteiro

Lógica Proposicional

Lógica de Conhecimento

Conclusões

- Embora exista algum desenvolvimento de sistemas de prova para lógicas modais, estes sistemas não apresentam caráter homogêneo.
- Nosso esforço é no sentido de prover um **conjunto de sistemas de provas** para lógicas modais normais que seja homogêneo em vários aspectos.
- Além da homogeneidade, deseja-se que os sistemas de provas apresentem características que permitam o desempenho **eficiente** de provadores de teoremas.
- Nós consideraremos aqui apenas um aspecto relativo à homogeneidade e eficiência destes sistemas: a transformação de uma fórmula em sua forma normal.

Roteiro

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

● Roteiro

Lógica Proposicional

Lógica de Conhecimento

Conclusões

1. Lógica Proposicional;
2. Lógica de Primeira Ordem;
3. Lógicas Modais Proposicionais.

Introdução e Sintaxe

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

● **Introdução e Sintaxe**

● Semântica

● Propriedades Semânticas

● Métodos de Prova – I

● Semântica e Prova

● Resolução

● CNF

● Exemplo I

● Eficiência

● Exemplo II

● Eficiência II

● Renomeação

● Exemplo II

● Eficiência II

● Duplicação

● Exemplo III

● Exemplo III Revisitado

● Comparação

● Otter

● Lógicas Modais

Lógica de Conhecimento

Conclusões

- A mais simples das lógicas;
- Proposições – fatos – são representados através de símbolos proposicionais;
- Sentenças complexas são construídas a partir destes símbolos e de conectivos:

◆ *Símbolos Proposicionais:* $\mathcal{P} = \{p, q, r, p', q', r', \dots\}$;

◆ *Constantes:* true, false;

◆ *Operadores Clássicos:*

$\neg\varphi$	(negação),
$(\varphi \wedge \psi)$	(conjunção),
$(\varphi \vee \psi)$	(disjunção),
$(\varphi \rightarrow \psi)$	(implicação),
$(\varphi \leftrightarrow \psi)$	(dupla implicação).

Semântica

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

● Introdução e Sintaxe

● Semântica

● Propriedades Semânticas

● Métodos de Prova – I

● Semântica e Prova

● Resolução

● CNF

● Exemplo I

● Eficiência

● Exemplo II

● Eficiência II

● Renomeação

● Exemplo II

● Eficiência II

● Duplicação

● Exemplo III

● Exemplo III Revisitado

● Comparação

● Otter

● Lógicas Modais

Lógica de Conhecimento

Conclusões

- Uma **valoração** é uma função π_0 a qual atribui um *valor de verdade* a cada um dos símbolos proposicionais:

$$\pi_0 : \mathcal{P} \rightarrow \{true, false\}$$

- A função de valoração é estendida para lidar com fórmulas complexas, e.g.:

$$\pi(\neg\varphi) = true \text{ se, e somente se, } \pi_0(\varphi) = false$$

$$\pi(\varphi \wedge \psi) = true \text{ se, e somente se, } \pi_0(\varphi) = true \text{ e } \pi_0(\psi) = true$$

Propriedades Semânticas

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

● Introdução e Sintaxe

● Semântica

● **Propriedades Semânticas**

● Métodos de Prova – I

● Semântica e Prova

● Resolução

● CNF

● Exemplo I

● Eficiência

● Exemplo II

● Eficiência II

● Renomeação

● Exemplo II

● Eficiência II

● Duplicação

● Exemplo III

● Exemplo III Revisitado

● Comparação

● Otter

● Lógicas Modais

Lógica de Conhecimento

Conclusões

- Uma valoração π **satisfaz** uma fórmula φ se, e somente se, $\pi(\varphi) = true$.
- Uma fórmula φ é **válida** se, e somente se, $\pi(\varphi) = true$ para toda valoração π .
- Uma fórmula φ é uma **contradição** se, e somente se, $\pi(\varphi) = false$ para toda valoração π .
- $\Gamma \models \varphi$: φ é consequência lógica de Γ .
 $\models \varphi$ abrevia $\emptyset \models \varphi$: φ é válida.

Métodos de Prova – I

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

● Introdução e Sintaxe
● Semântica
● Propriedades Semânticas

● Métodos de Prova – I

● Semântica e Prova

● Resolução

● CNF

● Exemplo I

● Eficiência

● Exemplo II

● Eficiência II

● Renomeação

● Exemplo II

● Eficiência II

● Duplicação

● Exemplo III

● Exemplo III Revisitado

● Comparação

● Otter

● Lógicas Modais

Lógica de Conhecimento

Conclusões

- Um **cálculo** para uma determinada linguagem lógica consiste de um conjunto de **axiomas** e um conjunto de **regras de inferência**.

- A **prova de φ a partir de um conjunto de fórmulas Γ** é uma seqüência de fórmulas $\varphi_0, \dots, \varphi_n$, onde $\varphi_n = \varphi$ e cada φ_i é
 - ◆ um axioma;
 - ◆ um membro de Γ ; ou
 - ◆ foi obtido a partir da aplicação das regras de inferência às fórmulas anteriores na seqüência.

- $\Gamma \vdash \varphi$: existe uma prova de φ a partir de Γ ;
 $\vdash \varphi$ abrevia $\emptyset \vdash \varphi$: φ é um **teorema**.

Relação entre Semântica e Prova

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova

- Resolução
- CNF
- Exemplo I
- Eficiência
- Exemplo II
- Eficiência II
- Renomeação
- Exemplo II
- Eficiência II
- Duplicação
- Exemplo III
- Exemplo III Revisitado
- Comparação
- Otter
- Lógicas Modais

Lógica de Conhecimento

Conclusões

- Um cálculo é **consistente** se todo teorema é uma fórmula válida.

$$\vdash \varphi \implies \models \varphi$$

- Um cálculo é **completo** se toda fórmula válida é um teorema.

$$\models \varphi \implies \vdash \varphi$$

- Uma lógica é **decidível** se existe um *procedimento*, cuja *terminação* seja garantida, que *determine* se uma determinada fórmula é um teorema ou não.

Resolução

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova

● Resolução

- CNF
- Exemplo I
- Eficiência
- Exemplo II
- Eficiência II
- Renomeação
- Exemplo II
- Eficiência II
- Duplicação
- Exemplo III
- Exemplo III Revisitado
- Comparação
- Otter
- Lógicas Modais

Lógica de Conhecimento

Conclusões

$$\text{[MRES1]} \quad \frac{(D \vee m_i) \quad (D' \vee \neg m_i)}{(D \vee D')}$$

- Fórmulas são primeiramente transformadas em uma *forma normal*.

$$(l_1 \vee \dots \vee l_n) \wedge (l_{n+1} \vee \dots \vee l_m) \wedge \dots \wedge (l_r \vee \dots \vee l_s)$$

- **Literal:** p ou $\neg p$, onde p é um símbolo proposicional.
- Disjunções de literais são chamadas de **cláusulas**.

Forma Normal Conjuntiva

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução

● CNF

- Exemplo I
- Eficiência
- Exemplo II
- Eficiência II
- Renomeação
- Exemplo II
- Eficiência II
- Duplicação
- Exemplo III
- Exemplo III Revisitado
- Comparação
- Otter
- Lógicas Modais

Lógica de Conhecimento

Conclusões

1. $\varphi \rightarrow \psi$ e $\varphi \leftrightarrow \psi$ são substituídos por $(\neg\varphi \vee \psi)$ e $(\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \neg\psi)$

2. negações são reescritas (De Morgan's):

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \longrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \longrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

3. duplas negações são eliminadas, i.e. $\neg\neg\varphi \longrightarrow \varphi$

4. leis distributivas são aplicadas:

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \longrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$$

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \longrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$$

Exemplo I

- Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF

- Exemplo I

- Eficiência
- Exemplo II
- Eficiência II
- Renomeação
- Exemplo II
- Eficiência II
- Duplicação
- Exemplo III
- Exemplo III Revisitado
- Comparação
- Otter
- Lógicas Modais

Lógica de Conhecimento

Conclusões

$$(p \leftrightarrow q) \vee (r \leftrightarrow s)$$

$$1. (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \vee ((r \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow r))$$

Exemplo I

- Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF

- Exemplo I

- Eficiência
- Exemplo II
- Eficiência II
- Renomeação
- Exemplo II
- Eficiência II
- Duplicação
- Exemplo III
- Exemplo III Revisitado
- Comparação
- Otter
- Lógicas Modais

Lógica de Conhecimento

Conclusões

$$(p \leftrightarrow q) \vee (r \leftrightarrow s)$$

1. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \vee ((r \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow r))$
2. $((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \vee ((\neg r \vee s) \wedge (\neg s \vee r))$

Exemplo I

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF

● Exemplo I

- Eficiência
- Exemplo II
- Eficiência II
- Renomeação
- Exemplo II
- Eficiência II
- Duplicação
- Exemplo III
- Exemplo III Revisitado
- Comparação
- Otter
- Lógicas Modais

Lógica de Conhecimento

Conclusões

$$(p \leftrightarrow q) \vee (r \leftrightarrow s)$$

1. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \vee ((r \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow r))$
2. $((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \vee ((\neg r \vee s) \wedge (\neg s \vee r))$
3. $((\neg p \vee q) \vee (\neg r \vee s)) \wedge ((\neg p \vee q) \vee (\neg s \vee r)) \wedge ((\neg q \vee p) \vee (\neg r \vee s)) \wedge ((\neg q \vee p) \vee (\neg s \vee r))$

Exemplo I

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF

● Exemplo I

- Eficiência
- Exemplo II
- Eficiência II
- Renomeação
- Exemplo II
- Eficiência II
- Duplicação
- Exemplo III
- Exemplo III Revisitado
- Comparação
- Otter
- Lógicas Modais

Lógica de Conhecimento

Conclusões

$$(p \leftrightarrow q) \vee (r \leftrightarrow s)$$

1. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \vee ((r \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow r))$
2. $((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \vee ((\neg r \vee s) \wedge (\neg s \vee r))$
3. $((\neg p \vee q) \vee (\neg r \vee s)) \wedge ((\neg p \vee q) \vee (\neg s \vee r)) \wedge ((\neg q \vee p) \vee (\neg r \vee s)) \wedge ((\neg q \vee p) \vee (\neg s \vee r))$

$$\begin{aligned} & ((\neg p \vee q \vee \neg r \vee s) \wedge \\ & (\neg p \vee q \vee r \vee \neg s) \wedge \\ & (p \vee \neg q \vee \neg r \vee s) \wedge \\ & (p \vee \neg q \vee r \vee \neg s)) \end{aligned}$$

Eficiência

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF
- Exemplo I
- **Eficiência**
- Exemplo II
- Eficiência II
- Renomeação
- Exemplo II
- Eficiência II
- Duplicação
- Exemplo III
- Exemplo III Revisitado
- Comparação
- Otter
- Lógicas Modais

Lógica de Conhecimento

Conclusões

$$\begin{array}{l} (\neg R \vee R \vee \neg P \vee P) \wedge (\neg S \vee R \vee \neg P \vee P) \wedge \\ (\neg R \vee S \vee \neg P \vee P) \wedge (\neg S \vee S \vee \neg P \vee P) \wedge \\ (\neg R \vee R \vee \neg Q \vee P) \wedge (\neg S \vee R \vee \neg Q \vee P) \wedge \\ (\neg R \vee S \vee \neg Q \vee P) \wedge (\neg S \vee S \vee \neg Q \vee P) \wedge \\ (\neg R \vee R \vee \neg P \vee Q) \wedge (\neg S \vee R \vee \neg P \vee Q) \wedge \\ (\neg R \vee S \vee \neg P \vee Q) \wedge (\neg S \vee S \vee \neg P \vee Q) \wedge \\ (\neg R \vee R \vee \neg Q \vee Q) \wedge (\neg S \vee R \vee \neg Q \vee Q) \wedge \\ (\neg R \vee S \vee \neg Q \vee Q) \wedge (\neg S \vee S \vee \neg Q \vee Q) \end{array}$$

Eficiência

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF
- Exemplo I
- Eficiência
- Exemplo II
- Eficiência II
- Renomeação
- Exemplo II
- Eficiência II
- Duplicação
- Exemplo III
- Exemplo III Revisitado
- Comparação
- Otter
- Lógicas Modais

Lógica de Conhecimento

Conclusões

$$\begin{array}{l} (\neg R \vee R \vee \neg P \vee P) \wedge (\neg S \vee R \vee \neg P \vee P) \wedge \\ (\neg R \vee S \vee \neg P \vee P) \wedge (\neg S \vee S \vee \neg P \vee P) \wedge \\ (\neg R \vee R \vee \neg Q \vee P) \wedge (\neg S \vee R \vee \neg Q \vee P) \wedge \\ (\neg R \vee S \vee \neg Q \vee P) \wedge (\neg S \vee S \vee \neg Q \vee P) \wedge \\ (\neg R \vee R \vee \neg P \vee Q) \wedge (\neg S \vee R \vee \neg P \vee Q) \wedge \\ (\neg R \vee S \vee \neg P \vee Q) \wedge (\neg S \vee S \vee \neg P \vee Q) \wedge \\ (\neg R \vee R \vee \neg Q \vee Q) \wedge (\neg S \vee R \vee \neg Q \vee Q) \wedge \\ (\neg R \vee S \vee \neg Q \vee Q) \wedge (\neg S \vee S \vee \neg Q \vee Q) \end{array}$$

Exemplo II

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF
- Exemplo I
- Eficiência
- Exemplo II
- Eficiência II
- Renomeação
- Exemplo II
- Eficiência II
- Duplicação
- Exemplo III
- Exemplo III Revisitado
- Comparação
- Otter
- Lógicas Modais

Lógica de Conhecimento

Conclusões

$$(a \wedge b) \vee (c \wedge d)$$

$$\Rightarrow ((a \vee c) \wedge (a \vee d) \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee d))$$

Exemplo II

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF
- Exemplo I
- Eficiência
- Exemplo II
- Eficiência II
- Renomeação
- Exemplo II
- Eficiência II
- Duplicação
- Exemplo III
- Exemplo III Revisitado
- Comparação
- Otter
- Lógicas Modais

Lógica de Conhecimento

Conclusões

$$(a \wedge b) \vee (c \wedge d)$$

$$\Rightarrow ((a \vee c) \wedge (a \vee d) \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee d))$$

$$(a \wedge b) \vee (c \wedge d \wedge e)$$

$$\Rightarrow ((a \vee c) \wedge (a \vee d) \wedge (a \vee e) \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee d) \wedge (b \vee e))$$

Exemplo II

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF
- Exemplo I
- Eficiência
- Exemplo II
- Eficiência II
- Renomeação
- Exemplo II
- Eficiência II
- Duplicação
- Exemplo III
- Exemplo III Revisitado
- Comparação
- Otter
- Lógicas Modais

Lógica de Conhecimento

Conclusões

$$(a \wedge b) \vee (c \wedge d)$$

$$\Rightarrow ((a \vee c) \wedge (a \vee d) \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee d))$$

$$(a \wedge b) \vee (c \wedge d \wedge e)$$

$$\Rightarrow ((a \vee c) \wedge (a \vee d) \wedge (a \vee e) \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee d) \wedge (b \vee e))$$

$$(a \wedge b \wedge f) \vee (c \wedge d \wedge e)$$

$$\Rightarrow ((a \vee c) \wedge (a \vee d) \wedge (a \vee e) \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee d) \wedge (b \vee e) \wedge (f \vee c) \wedge (f \vee d) \wedge (f \vee e))$$

Eficiência II

- Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF
- Exemplo I
- Eficiência
- Exemplo II
- Eficiência II
- Renomeação
- Exemplo II
- Eficiência II
- Duplicação
- Exemplo III
- Exemplo III Revisitado
- Comparação
- Otter
- Lógicas Modais

Lógica de Conhecimento

Conclusões

■ Explosão combinatorial:

$$(l_1 \wedge \dots \wedge l_m) \vee (k_1 \wedge \dots \wedge k_n) \Rightarrow O(m \times n)$$

■ Em geral:

ψ	$p(\psi)$	$\bar{p}(\psi)$
$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$	$\sum_{i=1}^n p(\varphi_i)$	$\prod_{i=1}^n \bar{p}(\varphi_i)$
$\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$	$\prod_{i=1}^n p(\varphi_i)$	$\sum_{i=1}^n \bar{p}(\varphi_i)$
$\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$	$\bar{p}(\varphi_1)p(\varphi_2)$	$p(\varphi_1) + \bar{p}(\varphi_2)$
$\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$	$p(\varphi_1)\bar{p}(\varphi_2) + \bar{p}(\varphi_1)p(\varphi_2)$	$p(\varphi_1)p(\varphi_2) + \bar{p}(\varphi_1)\bar{p}(\varphi_2)$
$\neg\varphi$	$\bar{p}(\varphi)$	$p(\varphi)$
atômico	1	1

Renomeação

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF
- Exemplo I
- Eficiência
- Exemplo II
- Eficiência II
- Renomeação
- Exemplo II
- Eficiência II
- Duplicação
- Exemplo III
- Exemplo III Revisitado
- Comparação
- Otter
- Lógicas Modais

Lógica de Conhecimento

Conclusões

- Técnica baseada na introdução de novos literais;
- Literais substituem subfórmulas;
- Introduce também cláusulas que dão significado a estes novos literais, dependendo da polaridade:

Seja φ a fórmula a ser substituída, então:

$$Pol(\varphi) > 0 \Rightarrow new_{\varphi} \rightarrow \varphi$$

$$Pol(\varphi) < 0 \Rightarrow \varphi \rightarrow new_{\varphi}$$

$$Pol(\varphi) = 0 \Rightarrow new_{\varphi} \leftrightarrow \varphi$$

Exemplo II

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF
- Exemplo I
- Eficiência
- Exemplo II
- Eficiência II
- Renomeação
- **Exemplo II**
- Eficiência II
- Duplicação
- Exemplo III
- Exemplo III Revisitado
- Comparação
- Otter
- Lógicas Modais

Lógica de Conhecimento

Conclusões

$$(a \wedge b \wedge f) \vee (c \wedge d \wedge e)$$

Exemplo II

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF
- Exemplo I
- Eficiência
- Exemplo II
- Eficiência II
- Renomeação
- Exemplo II
- Eficiência II
- Duplicação
- Exemplo III
- Exemplo III Revisitado
- Comparação
- Otter
- Lógicas Modais

Lógica de Conhecimento

Conclusões

$$(a \wedge b \wedge f) \vee (c \wedge d \wedge e)$$

$$new_{(a \wedge b \wedge f)} \vee new_{(c \wedge d \wedge e)}$$

$$new_{(a \wedge b \wedge f)} \rightarrow (a \wedge b \wedge f) \quad new_{(c \wedge d \wedge e)} \rightarrow (c \wedge d \wedge e)$$

Exemplo II

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF
- Exemplo I
- Eficiência
- Exemplo II
- Eficiência II
- Renomeação
- Exemplo II
- Eficiência II
- Duplicação
- Exemplo III
- Exemplo III Revisitado
- Comparação
- Otter
- Lógicas Modais

Lógica de Conhecimento

Conclusões

$$(a \wedge b \wedge f) \vee (c \wedge d \wedge e)$$

$$new_{(a \wedge b \wedge f)} \vee new_{(c \wedge d \wedge e)}$$

$$new_{(a \wedge b \wedge f)} \rightarrow (a \wedge b \wedge f) \quad new_{(c \wedge d \wedge e)} \rightarrow (c \wedge d \wedge e)$$

$$\neg new_{(a \wedge b \wedge f)} \vee a$$

$$\neg new_{(c \wedge d \wedge e)} \vee c$$

$$\neg new_{(a \wedge b \wedge f)} \vee b$$

$$\neg new_{(c \wedge d \wedge e)} \vee d$$

$$\neg new_{(a \wedge b \wedge f)} \vee f$$

$$\neg new_{(c \wedge d \wedge e)} \vee e$$

Eficiência II

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF
- Exemplo I
- Eficiência
- Exemplo II
- Eficiência II
- Renomeação
- Exemplo II
- **Eficiência II**
- Duplicação
- Exemplo III
- Exemplo III Revisitado
- Comparação
- Otter
- Lógicas Modais

Lógica de Conhecimento

Conclusões

- Renomeação **pode** evitar explosão combinatorial:
 $O(m + n) \times O(m \times n)$;
- Pode-se computar, em tempo linear, se renomear uma subfórmula é mais vantajoso do que utilizar o procedimento padrão de transformação na forma clausal:

[Nonnengart at all, On Generating Small Clause Normal Forms]

- Esta verificação é feita através de um cálculo baseado em coeficientes, os quais determinam o quão frequentemente uma determinada subfórmula e sua negação serão duplicadas no decorrer da transformação padrão;
- A partir do cálculo destes coeficientes uma determinada inequação pode, então, ser resolvida e determinar se é melhor renomear ou não.

Duplicação

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF
- Exemplo I
- Eficiência
- Exemplo II
- Eficiência II
- Renomeação
- Exemplo II
- Eficiência II
- Duplicação
- Exemplo III
- Exemplo III Revisitado
- Comparação
- Otter
- Lógicas Modais

Lógica de Conhecimento

Conclusões

$$\varphi \leftrightarrow \psi$$

Linearização dependente da polaridade:

$$Pol(\varphi \leftrightarrow \psi) < 0 \quad (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\psi \wedge \neg\varphi)$$

$$Pol(\varphi \leftrightarrow \psi) > 0 \quad (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$$

Exemplo:

$$((a \vee b) \leftrightarrow (c \vee d))$$

$$\Rightarrow ((a \vee b) \wedge (c \vee d)) \vee (\neg(c \vee d) \wedge \neg(a \vee b))$$

Problema:

$$((a \vee b) \leftrightarrow (c \vee d)) \rightarrow ((c \vee d) \leftrightarrow (a \vee b))$$

Exemplo III

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF
- Exemplo I
- Eficiência
- Exemplo II
- Eficiência II
- Renomeação
- Exemplo II
- Eficiência II
- Duplicação
- Exemplo III
- Exemplo III Revisitado
- Comparação
- Otter
- Lógicas Modais

Lógica de Conhecimento

Conclusões

$$\neg(((c \wedge d) \rightarrow \neg b) \rightarrow (((c \wedge d) \rightarrow b) \rightarrow \neg(c \wedge d)))$$

1. $\neg t_1 \vee t_2 \vee \neg b$
2. $\neg t_2 \vee \neg c \vee \neg d$
3. $\neg t_1 \vee t_3 \vee b$
4. $\neg t_3 \vee \neg c \vee \neg d$
5. $\neg t_1 \vee c$
6. $\neg t_1 \vee d$

Exemplo III Revisitado

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF
- Exemplo I
- Eficiência
- Exemplo II
- Eficiência II
- Renomeação
- Exemplo II
- Eficiência II
- Duplicação
- Exemplo III
- Exemplo III Revisitado
- Comparação
- Otter
- Lógicas Modais

Lógica de Conhecimento

Conclusões

$$\neg(((c \wedge d) \rightarrow \neg b) \rightarrow (((c \wedge d) \rightarrow b) \rightarrow \neg(c \wedge d)))$$

$$1. \neg t_4 \vee c$$

$$2. \neg t_4 \vee d$$

$$3. t_4 \vee \neg c \vee \neg d$$

$$4. \neg t_1 \vee \neg t_4 \vee \neg b$$

$$5. \neg t_1 \vee \neg t_4 \vee b$$

$$6. \neg t_1 \vee t_4$$

Comparação

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF
- Exemplo I
- Eficiência
- Exemplo II
- Eficiência II
- Renomeação
- Exemplo II
- Eficiência II
- Duplicação
- Exemplo III
- Exemplo III Revisitado

● Comparação

- Otter
- Lógicas Modais

Lógica de Conhecimento

Conclusões

$$\neg(((c \wedge d) \rightarrow \neg b) \rightarrow (((c \wedge d) \rightarrow b) \rightarrow \neg(c \wedge d)))$$

1. $\neg t_1 \vee t_2 \vee \neg b$

2. $\neg t_2 \vee \neg c \vee \neg d$

3. $\neg t_1 \vee t_3 \vee b$

4. $\neg t_3 \vee \neg c \vee \neg d$

5. $\neg t_1 \vee c$

6. $\neg t_1 \vee d$

CPUTime: 0.62

Inferences: 93.099

Local Stack: 331.432

Global Stack: 82.048

Trail Stack: 14.476

1. $\neg t_4 \vee c$

2. $\neg t_4 \vee d$

3. $t_4 \vee \neg c \vee \neg d$

4. $\neg t_1 \vee \neg t_4 \vee \neg b$

5. $\neg t_1 \vee \neg t_4 \vee b$

6. $\neg t_1 \vee t_4$

CPUTime: 0.11

Inferences: 14.617

Local Stack: 80.212

Global Stack: 18.348

Trail Stack: 2.492

Otter

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

- Introdução e Sintaxe
- Semântica
- Propriedades Semânticas
- Métodos de Prova – I
- Semântica e Prova
- Resolução
- CNF
- Exemplo I
- Eficiência
- Exemplo II
- Eficiência II
- Renomeação
- Exemplo II
- Eficiência II
- Duplicação
- Exemplo III
- Exemplo III Revisitado
- Comparação
- **Otter**
- Lógicas Modais

Lógica de Conhecimento

Conclusões

$$\neg(((c \wedge d) \rightarrow \neg b) \rightarrow (((c \wedge d) \rightarrow b) \rightarrow \neg(c \wedge d)))$$

	Exemplo III	Revisitado
clauses given	10	8
clauses generated	8	5
- binary-res generated	8	5
clauses forward subsumed	1	1
- (subsumed by sos)	1	1
unit deletions	16	7
clauses kept	11	9
empty clauses	3	4
clauses back subsumed	4	2
Kbytes malloced	191	191

Lógicas Modais

Introdução

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

Lógica de Conhecimento

● **Introdução**

● Sintaxe

● Semântica

● Regras de Inferência

● Forma Normal Clausal

● Transformação

● Exemplo

● Exemplo Acabado

Conclusões

- Úteis na especificação de sistemas multi-agentes, sistemas distribuídos, protocolos, bases de conhecimento, etc.
- Introduce uma nova modalidade para cada agente: $K_i \varphi$.

K_{Alice} segredo

$K_{Alice} K_{Charlie}$ chave

$K_{Alice} K_{Charlie} (\text{chave} \wedge \text{send}(Alice, Charlie, msg) \rightarrow K_{Charlie} \text{segredo})$

$\text{send}(Alice, Charlie, msg) \rightarrow K_{Alice} K_{Charlie} \text{segredo}$

$K_{Alice} K_{Bob} \neg \text{chave} \rightarrow K_{Alice} K_{Bob} \neg \text{segredo}$

Sintaxe

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

Lógica de Conhecimento

● Introdução

● Sintaxe

● Semântica

● Regras de Inferência

● Forma Normal Clausal

● Transformação

● Exemplo

● Exemplo Acabado

Conclusões

Axiomatização: $KL_{(n)} = K, T, D, 4, 5.$

K:	$\vdash K_i (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (K_i \varphi \rightarrow K_i \psi)$
T:	$\vdash K_i \varphi \rightarrow \varphi$
D:	$\vdash K_i \varphi \rightarrow \neg K_i \neg \varphi$
4:	$\vdash K_i \varphi \rightarrow K_i K_i \varphi$
5:	$\vdash \neg K_i \neg \varphi \rightarrow K_i \neg K_i \neg \varphi$

Sintaxe:

- *Símbolos Proposicionais:* $\mathcal{P} = \{p, q, r, p', q', r', \dots\}$;
- *Constantes:* true, false;
- *Operadores Clássicos:* $\neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi)$;
- *Operadores Modais:* $K_i \varphi, \forall i \in \mathcal{A}$, where $\mathcal{A} = \{1, \dots, n\}$.

Semântica

- Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

Lógica de Conhecimento

- Introdução

- Sintaxe

- Semântica

- Regras de Inferência

- Forma Normal Clausal

- Transformação

- Exemplo

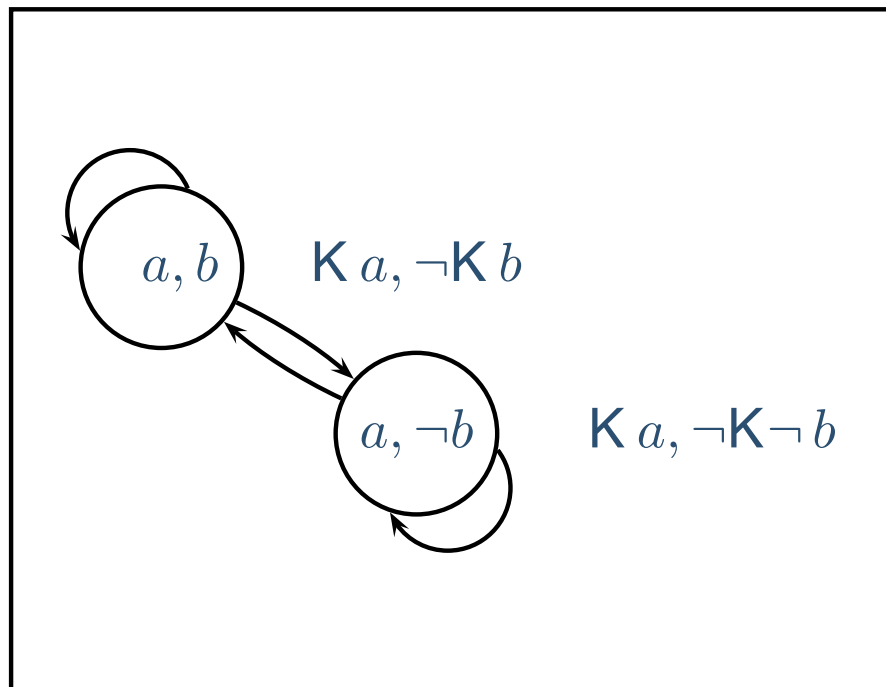
- Exemplo Acabado

Conclusões

Semântica baseada em estruturas de Kripke

$$M = \langle W, \mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n, \pi \rangle$$

onde W é um conjunto de mundos; \mathcal{K}_i são relações de equivalência; e $\pi : W \times \mathcal{P} \rightarrow \{true, false\}$ é uma função.



Regras de Inferência

- Formas Normais Modais

- Motivação

- Roteiro

- Lógica Proposicional

- Lógica de Conhecimento

- Introdução

- Sintaxe

- Semântica

- **Regras de Inferência**

- Forma Normal Clausal

- Transformação

- Exemplo

- Exemplo Acabado

- Conclusões

$$\begin{array}{l} \text{[MRES1]} \quad \text{true} \rightarrow (D \vee m_i) \\ \text{true} \rightarrow (D' \vee \neg m_i) \\ \hline \text{true} \rightarrow (D \vee D') \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{[MRES2]} \quad \text{true} \rightarrow (D \vee K_i l) \\ \text{true} \rightarrow (D' \vee K_i \neg l) \\ \hline \text{true} \rightarrow (D \vee D') \end{array}$$

Regras de Inferência

- Formas Normais Modais

- Motivação

- Roteiro

- Lógica Proposicional

- Lógica de Conhecimento

- Introdução

- Sintaxe

- Semântica

- Regras de Inferência

- Forma Normal Clausal

- Transformação

- Exemplo

- Exemplo Acabado

- Conclusões

$$\begin{array}{l} \text{[MRES3]} \quad \text{true} \rightarrow (D \vee K_i l) \\ \text{true} \rightarrow (D' \vee \neg l) \\ \hline \text{true} \rightarrow (D \vee D') \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{[MRES4]} \quad \text{true} \rightarrow (D \vee \neg K_i l) \\ \text{true} \rightarrow (D' \vee l) \\ \hline \text{true} \rightarrow (D \vee \neg K_i \neg D') \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{[MRES5]} \quad \text{true} \rightarrow (L \vee K_i l_1 \vee K_i l_2 \vee \dots) \\ \hline \text{true} \rightarrow (L \vee l_1 \vee l_2 \vee \dots) \end{array}$$

Forma Normal Clausal

- Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

Lógica de Conhecimento

- Introdução
- Sintaxe
- Semântica
- Regras de Inferência
- Forma Normal Clausal

● Transformação

● Exemplo

● Exemplo Acabado

Conclusões

Clausal: transformação elimina o aninhamento de operadores modais.

Inicial

$$\text{start} \rightarrow \bigvee_{b=1}^r l_b$$

K_i

$$\text{true} \rightarrow \bigvee_{b=1}^r m_{i_b}$$

Literais

$$\text{true} \rightarrow \bigvee_{b=1}^r l_b$$

Transformação

- Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

Lógica de Conhecimento

- Introdução
- Sintaxe
- Semântica
- Regras de Inferência
- Forma Normal Clausal
- **Transformação**
- Exemplo
- Exemplo Acabado

Conclusões

É baseada em três operações:

- remoção de operadores;
- renomeação de fórmulas;
- reescrita.

Exemplo

- Formas Normais Modais

- Motivação

- Roteiro

- Lógica Proposicional

- Lógica de Conhecimento

- Introdução
- Sintaxe
- Semântica
- Regras de Inferência
- Forma Normal Clausal
- Transformação
- Exemplo
- Exemplo Acabado

- Conclusões

$$K_1 K_2 (a \rightarrow b) \rightarrow K_1 (K_2 a \rightarrow K_2 b)$$

Exemplo

- Formas Normais Modais

- Motivação

- Roteiro

- Lógica Proposicional

- Lógica de Conhecimento

- Introdução
- Sintaxe
- Semântica
- Regras de Inferência
- Forma Normal Clausal
- Transformação
- Exemplo
- Exemplo Acabado

- Conclusões

$$K_1 K_2 (a \rightarrow b) \rightarrow K_1 (K_2 a \rightarrow K_2 b)$$

1. **start** $\rightarrow t_1$

2. $t_1 \rightarrow \neg K_1 K_2 (a \rightarrow b) \vee K_1 (K_2 a \rightarrow K_2 b)$

Exemplo

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

Lógica de Conhecimento

- Introdução
- Sintaxe
- Semântica
- Regras de Inferência
- Forma Normal Clausal
- Transformação
- Exemplo
- Exemplo Acabado

Conclusões

$$K_1 K_2 (a \rightarrow b) \rightarrow K_1 (K_2 a \rightarrow K_2 b)$$

1. $start \rightarrow t_1$

2. $t_1 \rightarrow \neg K_1 K_2 (a \rightarrow b) \vee K_1 (K_2 a \rightarrow K_2 b)$

3. $t_1 \rightarrow \neg K_1 \neg t_2 \vee K_1 t_3$

4. $t_2 \rightarrow \neg K_2 (a \rightarrow b)$

5. $t_3 \rightarrow (K_2 a \rightarrow K_2 b)$

Exemplo

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

Lógica de Conhecimento

- Introdução
- Sintaxe
- Semântica
- Regras de Inferência
- Forma Normal Clausal
- Transformação
- Exemplo
- Exemplo Acabado

Conclusões

$$K_1 K_2 (a \rightarrow b) \rightarrow K_1 (K_2 a \rightarrow K_2 b)$$

1. **start** $\rightarrow t_1$
2. $t_1 \rightarrow \neg K_1 K_2 (a \rightarrow b) \vee K_1 (K_2 a \rightarrow K_2 b)$
3. $t_1 \rightarrow \neg K_1 \neg t_2 \vee K_1 t_3$
4. $t_2 \rightarrow \neg K_2 (a \rightarrow b)$
5. $t_3 \rightarrow (K_2 a \rightarrow K_2 b)$
6. $\neg t_1 \vee \neg K_1 \neg t_2 \vee K_1 t_3$
7. $t_2 \rightarrow \neg K_2 \neg t_4$
8. $t_4 \rightarrow \neg(a \rightarrow b)$

Exemplo

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

Lógica de Conhecimento

- Introdução
- Sintaxe
- Semântica
- Regras de Inferência
- Forma Normal Clausal
- Transformação
- Exemplo
- Exemplo Acabado

Conclusões

$$K_1 K_2 (a \rightarrow b) \rightarrow K_1 (K_2 a \rightarrow K_2 b)$$

1. **start** $\rightarrow t_1$
2. $t_1 \rightarrow \neg K_1 K_2 (a \rightarrow b) \vee K_1 (K_2 a \rightarrow K_2 b)$
3. $t_1 \rightarrow \neg K_1 \neg t_2 \vee K_1 t_3$
4. $t_2 \rightarrow \neg K_2 (a \rightarrow b)$
5. $t_3 \rightarrow (K_2 a \rightarrow K_2 b)$
6. $\neg t_1 \vee \neg K_1 \neg t_2 \vee K_1 t_3$
7. $t_2 \rightarrow \neg K_2 \neg t_4$
8. $t_4 \rightarrow \neg(a \rightarrow b)$
9. $\neg t_2 \vee \neg K_2 \neg t_4$
10. $\neg t_4 \vee a$
11. $\neg t_4 \vee \neg b$

Exemplo

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

Lógica de Conhecimento

- Introdução
- Sintaxe
- Semântica
- Regras de Inferência
- Forma Normal Clausal
- Transformação
- Exemplo
- Exemplo Acabado

Conclusões

$$K_1 K_2 (a \rightarrow b) \rightarrow K_1 (K_2 a \rightarrow K_2 b)$$

1. **start** $\rightarrow t_1$
2. $t_1 \rightarrow \neg K_1 K_2 (a \rightarrow b) \vee K_1 (K_2 a \rightarrow K_2 b)$
3. $t_1 \rightarrow \neg K_1 \neg t_2 \vee K_1 t_3$
4. $t_2 \rightarrow \neg K_2 (a \rightarrow b)$
5. $t_3 \rightarrow (K_2 a \rightarrow K_2 b)$
6. $\neg t_1 \vee \neg K_1 \neg t_2 \vee K_1 t_3$
7. $t_2 \rightarrow \neg K_2 \neg t_4$
8. $t_4 \rightarrow \neg(a \rightarrow b)$
9. $\neg t_2 \vee \neg K_2 \neg t_4$
10. $\neg t_4 \vee a$
11. $\neg t_4 \vee \neg b$
12. $\neg t_3 \rightarrow \neg K_2 a \vee K_2 b$

Exemplo Acabado

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

Lógica de Conhecimento

- Introdução
- Sintaxe
- Semântica
- Regras de Inferência
- Forma Normal Clausal
- Transformação
- Exemplo
- Exemplo Acabado

Conclusões

$$K_1 K_2 (a \rightarrow b) \rightarrow K_1 (K_2 a \rightarrow K_2 b)$$

1. **start** $\rightarrow t_1$
2. $\neg t_1 \vee \neg K_1 \neg t_2 \vee K_1 t_3$
3. $\neg t_2 \vee \neg K_2 \neg t_4$
4. $\neg t_4 \vee a$
5. $\neg t_4 \vee \neg b$
6. $\neg t_3 \vee \neg K_2 a \vee K_2 b$

Resultados

● Formas Normais Modais

Motivação

Roteiro

Lógica Proposicional

Lógica de Conhecimento

Conclusões

● Resultados

- Forma Normal preserva satisfatibilidade;
- Entretanto, resultados podem melhorar:
 - ◆ utilização de métricas para verificar quando renomeação realmente produz melhor resultado;
 - ◆ desenvolvimento de algoritmos para reduzir o problema de duplicação;
 - ◆ maior separação entre diferentes literais modais e proposicionais:

$$\neg t_1 \vee \neg \mathbf{K}_1 \neg t_2 \vee \mathbf{K}_1 t_3$$

$$\begin{aligned} & \neg t_1 \vee t_6 \vee t_7 \\ & \neg t_6 \vee \neg \mathbf{K}_1 \neg t_2 \\ & \neg t_7 \vee \mathbf{K}_1 t_3 \end{aligned}$$