Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

O Teorema do Valor Intermediário

Suponha que f é uma função contínua em todo o intervalo fechado $[a, b]$. Isto significa que, para todo $c \in (a, b)$, temos que $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Nas extremidades do intervalo o conceito de continuidade se expressa através de limites laterais:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

Para fixar ideias vamos supor que $f(a) < f(b)$ e considerar um número y_0 tal que

$$f(a) < y_0 < f(b).$$

A reta horizontal $y = y_0$ divide o plano cartesiano em dois pedaços disjuntos: um deles, que chamaremos de $\mathcal{R}_+$, contém todos os pontos que ficam acima da reta e o outro, que chamaremos $\mathcal{R}_-$, contém os pontos que ficam abaixo da reta. Como $f(a) < y_0 < f(b)$, devemos ter

$$A = (a, f(a)) \in \mathcal{R}_-, \qquad B = (b, f(b)) \in \mathcal{R}_+.$$

O gráfico de f é uma curva contínua ligando estes pontos. Assim, é natural afirmar que esta curva precisa tocar a reta horizontal em algum ponto (x_0, y_0). Este ponto pertence ao gráfico, de modo que $f(x_0) = y_0$ (veja a Figura 1 a seguir). Em outras palavras, ”se você está dentro de uma sala que não tem janelas e tem somente uma porta, a única maneira de sair da sala é passando pela porta...”

O argumento geométrico que usamos acima pode ser formalizado matematicamente. A sua conclusão é um importante resultado que enunciamos abaixo.

Teorema 1 (Teorema do Valor Intermediário)**.** *Suponha que f é uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Se y_0 é um valor entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe pelo menos um $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = y_0$.*

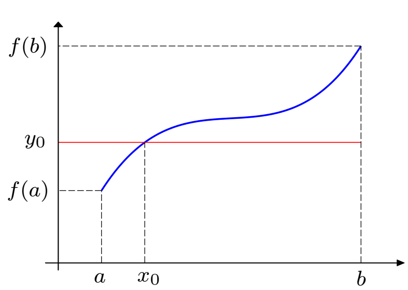


Figura 1: $f(a) < f(b)$

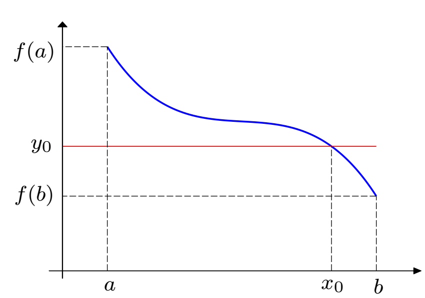
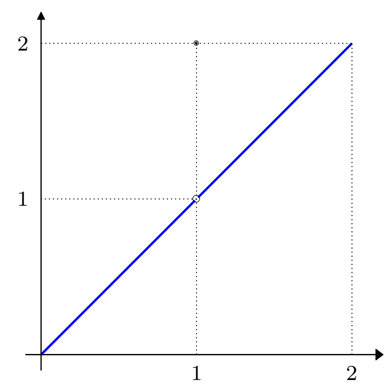


Figura 2: $f(a) > f(b)$

No enunciado acima, como não estamos supondo $f(a) < f(b)$, a frase "entre $f(a)$ e $f(b)$" deve ser entendida como entre o menor e o maior deles. As figuras acima ilustram primeiro o casos$f(a) < f(b)$ e, em seguida, o caso $f(a) > f(b)$. Se tivermos $f(a) = f(b)$, então a única opção seria $y_0 = f(a)$ e, neste caso o teorema claramente é verdadeiro bastando tomarmos $x_0 = a$, por exemplo.

Antes de apresentar aplicações vamos destacar que a conclusão do teorema pode ser falsa se a função f não for contínua. Um exemplo simples é a função

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in [0,2] \setminus \{1\}, \\ 2, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$



Esta função (descontínua) está definida no intervalo $[0, 2]$ e cumpre

$$f(0) = 0 < 1 < 2 = f(2).$$

No entanto, não existe nenhum elemento $x_0 \in [0, 2]$ tal que $f(x_0) = 1$.

No que se segue apresentamos alguns exemplos ilustrando a aplicação do TVI-Teorema do Valor Intermediário.

Exemplo 1. Vamos usar o TVI para encontrar aproximações para uma raiz da função

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 2.$$

Uma conta simples mostra que $f(2) = -10$, de modo que o ponto $(2, f(2))$ está abaixo do eixo $\mathcal{O}x$. Por outro lado, como $f(6) = 118$, o ponto $(6, f(6))$ se situa acima do eixo $\mathcal{O}x$. Sendo f contínua, o seu gráfico deve ligar esses dois pontos com uma curva suave, sem saltos. A curva deve então interceptar o eixo $\mathcal{O}x$ em um ponto cuja abscissa é uma raiz de $f(x)$.

Vamos colocar as coisas na notação do teorema: a função f é contínua no intervalo $[2, 6]$, por ser um polinômio. Além disso, se considerarmos $d = 0$, temos que

$$f(2) = -10 < d < 118 = f(6).$$

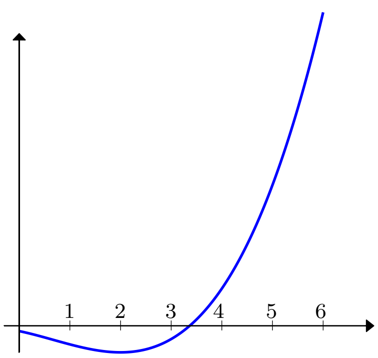
Segue do Teorema 1 que existe $x_0 \in [2, 6]$ tal que $f(x_0) = d = 0$. Logo, a função f possui pelo menos uma raiz no intervalo $[2, 6]$.

Observe que o teorema não nos permite encontrar a raiz. Contudo, como sabemos que no intervalo $[2, 6]$ existe uma raiz, podemos dizer que $x = 4$ é uma raiz aproximada. Nesta aproximação, estamos cometendo um erro de no máximo 2. Isso significa que, partindo da posição $x = 4$, se andarmos 2 unidades para a esquerda ou 2 unidades para o direita certamente encontraremos uma raiz. Para a aproximação, escolhemos o ponto médio do intervalo $[2,6]$, que é exatamente $x = 4$.

Se você considera que um erro de tamanho 2 não é aceitável, pode melhorar a aproximação usando o TVI mais uma vez: calculamos $f(4) = 14$ e percebemos que $x = 4$ não é uma raiz. Se considerarmos o intervalo $[4,6]$, temos que $f(4)$ e $f(6)$ são positivos. Assim, pode ser que o gráfico não cruze o eixo $\mathcal{O}x$ quando ligamos os pontos $(4,(f4))$ e $(6, f(6))$. Porém, olhando para o outro extremo do intervalo $[2,6]$, temos que

$$f(2) = -10 < 0 < 14 = f(4),$$

e portanto o TVI nos garante que existe uma raiz no intervalo $[2,4]$. Procedendo como antes, podemos considerar $x = 3$ (que é o ponto médio do intervalo $[2,4]$) como raiz aproximada. O erro cometido agora é de no máximo 1.



O processo acima pode ser continuando de modo a diminuir o erro o tanto que quisermos. A cada novo passo, o erro se reduz pela metade. Por exemplo, se fizermos mais um passo, temos que

$$f(3) = -5 < 0 < 14 = f(4),$$

e portanto existe raiz no intervalo $[3,4]$. A raiz aproximada seria $x = 3 + 1/2$ e o erro máximo seria igual a $1/2$. Na figura abaixo você pode conferir o gráfico da função no intervalo $[0,6]$.

Finalizamos o exemplo observando que, para o passo inicial do processo acima, é necessário descobrir valores a e b tais que os sinais de $f(a)$ e $f(b)$ são contrários. Embora isto possa parecer complicado e arbitrário, você deve concordar que é mais fácil do que tentar encontrar a raiz diretamente, ainda mais no caso em que a expressão da função f é muito complicada. $\square$

Exemplo 2. Vamos verificar que a equação

$$\sqrt[3]{x} = 1 - x$$

possui pelo menos uma solução. Para tanto, observe inicialmente que as soluções da equação acima são precisamente as raízes da função $f(x) = \sqrt[3]{x} - 1 + x$. Como

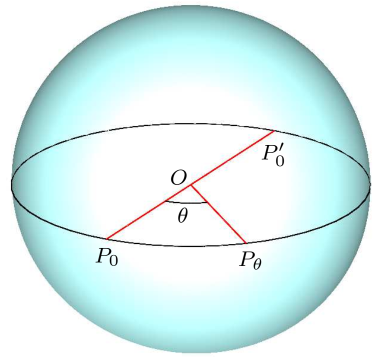
$$f(0) = -1 < 0 < 1 = f(1),$$

o TVI implica a existência de uma raiz no intervalo $[0,1]$, ou seja, a equação em questão possui uma solução neste intervalo. Se quisermos, podemos fazer aproximações desta solução procedendo como no Exemplo 1. $\square$

Exemplo 3. Seja P_0 um ponto qualquer na superfície da Terra, que vamos supor ser uma esfera. A semi-reta que liga P_0 ao centro da terra fura a superfície em outro ponto P_0', que chamamos de antípoda do ponto P_0.

Vamos usar o TVI para provar o seguinte fato curioso: em qualquer instante de tempo, existe um ponto sobre o equador da Terra cuja temperatura é a mesma do seu ponto antípoda.

Seja então P_0 um ponto fixo em cima do equador e O o centro da terra. Dado outro ponto P_θ sobre o equador, os segmentos OP_0 e OP_θ formam um ângulo $\theta \in (0, 2\pi)$, que vamos associar ao ponto P_θ. Desta forma, podemos construir uma função $T : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ da seguinte forma



$$T(\theta) = \begin{cases} \text{temperatura no ponto } P_\theta, & \text{se } 0 < \theta < 2\pi, \\ \text{temperatura no ponto } P_0, & \text{se } \theta \in \{0,\, 2\pi\}. \end{cases}$$

A intuição física nos permite afirmar que a função T é contínua, porque pontos próximos na superfície da terra têm temperaturas próximas. Vamos considerar agora a função contínua

$$g(\theta) = T(\theta) - T(\theta + \pi), \qquad \forall\, \theta \in [0, \pi],$$

que mede a diferença de temperatura entre dois pontos antípodas.

Note que

$$g(0) = T(0) - T(\pi), \qquad g(\pi) = T(\pi) - T(2\pi) = T(\pi) - T(0) = -g(0).$$

Se $g(0) = 0$, então a temperatura nos pontos P_0 e P_π são guais. Caso contrário, devemos ter $g(0) \neq 0$. Neste caso, como $g(\pi) = -g(0)$, os sinais de $g(0)$ e $g(\pi)$ são opostos. Segue então do TVI que $g(\theta_0) = 0$ par algum $\theta_0 \in (0, \pi)$. Assim, os pontos P_{θ_0} e $P_{\theta_0+\pi}$ estão sob a mesma temperatura.

O argumento acima permanece válido para qualquer outra medida escalar que varia continuamente sobre a superfície da Terra, por exemplo, a pressão, ou a elevação. Além disso, não precisamos nos deslocar sobre o equador, mas sim sobre qualquer círcunferência máxima, por exemplo todas aquelas imaginárias que determinam a longitude de um ponto na superfície terrestre. $\square$

Tarefa

Um *ponto fixo* de uma função é um ponto $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ tal que $f(x_0) = x_0$. Nem toda função possui pontos fixos, e o leitor está convidado a exibir uma que não possua. O resultado abaixo exibe uma classe de funções para os quais podemos afirmar que eles existem.

Teorema 2. *Se $f : [0,1] \to [0,1]$ é contínua, então f possui pelo menos um ponto fixo.*

O resultado acima é um caso particular do importante *Teorema do Ponto Fixo de Brower*. Nesta tarefa, vamos provar este caso particular através dos seguintes passos.

1. Desenhe, em um mesmo plano cartesiano, o gráfico da função $h(x) = x$ e de uma possível função contínua $f : [0,1] \to [0,1]$, para se convencer graficamente da veracidade do teorema;

2. Explique por que a função $g(x) = x - f(x)$ é contínua em $[0,1]$ e por que as suas (possíveis) raízes são exatamente os pontos fixos de f;

3. Após verificar que $g(0) \leq 0 \leq g(1)$, use o TVI para concluir que f possui pelo menos um ponto fixo.