Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

# Cálculo 1

## Integral indefinida

O Teorema Fundamental do Cálculo afirma que, se $f$ é contínua em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

desde que $F$ seja uma primitiva de $f$ em $[a,b]$. Deste modo, é importante estabelecermos estratégias que nos permitam encontrar primitivas explicitamente.

Se $F$ é uma primitiva de $f$ então, para todo $K \in \mathbb{R}$, temos que $(F(x)+K)' = f(x)$, de modo que $F(x)+K$ também é uma primitiva. Além disso, se o domínio de $f$ é um intervalo e $G$ é uma outra primitiva de $f$, então

$$\frac{d}{dx}(G(x) - F(x)) = f(x) - f(x) = 0.$$

O Teorema do Valor Médio garante que existe um constante $K \in \mathbb{R}$, tal que $G(x) = F(x)+K$. Isso mostra que a família de funções $\{F(x)+K\}_{K\in\mathbb{R}}$ contém todas as primitivas de $f$. Esta família de funções é chamada *integral indefinida* de $f$ e é denotada da seguinte maneira

$$\int f(x)dx = F(x) + K.$$

Na expressão acima, $K \in \mathbb{R}$ é chamada *constante de integração*.

É importante que fique claro a diferença entre a integral definida e a indefinida. A primeira é um número, enquanto a segunda representa uma família de funções. Ela pode ser calculada encontrando uma primitiva de $f$ e, em seguida, adicionando a constante de integração. Por exemplo,

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + K, \qquad \text{pois} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + K\right) = x^2.$$

Antes de apresentar alguns exemplos vamos observar que você sempre pode checar se acertou o cálculo de uma integral indefinida. Para tanto, basta verificar se a derivada do resultado coincide com a função que está sendo integrada.

**Exemplo 1.** Temos que, se $n \neq -1$, então

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K,$$

pois

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + K\right) = (n+1)\frac{x^{n+1-1}}{(n+1)} = x^n,$$

onde usamos a regra da potência para derivadas. □

Note que a fórmula de integração acima não faz sentido quando $n = -1$. Esse caso pode ser facilmente tratado, conforme mostrar o próximo exemplo.

**Exemplo 2.** Temos que

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + K,$$

uma vez que $(\ln|x| + K)' = 1/x$. □

A justificativa que demos para somar a constante de integração após encontrar uma primitiva foi baseada no Teorema do Valor Médio. Deste modo, é importante garantir que estamos trabalhando em um intervalo. Daqui para frente, sempre que escrevermos uma fórmula geral de integração, vamos assumir que ela é válida em um intervalo. Assim, quando escrevemos

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + K,$$

estamos entendo que isso é válido no intervalo $(-\infty, 0)$ ou $(0, +\infty)$. Assim

$$\int_{-e}^{-1} \frac{1}{x}\, dx = (\ln|x| + K)\Big|_{x=-e}^{-1} = (\ln(-x) + K)\Big|_{x=-e}^{-1} = \ln(1) - \ln(e) = -1,$$

pois $|x| = -x$ no intervalo $(-e, -1)$.

**Exemplo 3.** As integrais abaixo podem ser verificas a partir das regras usuais de derivação:

$$\int e^x dx = e^x + K, \qquad \int \cos(x) dx = \operatorname{sen}(x) + K,$$

$$\int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x) + K, \qquad \int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x) + K,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen}(x) + K.$$

Conforme veremos depois, existe uma técnica que permite calcular as duas últimas integrais acima, sem ter que memorizá-la. As 3 primeiras, juntamente com as dos dois exemplos anteriores, são integrais básicas que você precisa saber. □

As propriedades de linearidade da derivada são transmitidas de maneira imediata para a integral indefinida. Deste modo, é muito simples verificar que

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx,$$

e, para $c \in \mathbb{R}$,

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx.$$

**Exemplo 4.** Suponha que a velocidade de um carro seja dada por $v(t) = 2t + e^t$ e queremos determinar a sua posição $s(t)$ em um instante $t \geq 0$. Como a taxa de variação da posição é a velocidade, temos que

$$s'(t) = 2t + e^t.$$

Integrando os dois lados com respeito à $t$, obtemos

$$s(t) + K_1 = \int s'(t)dt = \int (2t + e^t)dt = t^2 + e^t + K_2.$$

De início, a primeira igualdade acima pode parecer confusa mas, na verdade, ela é muito simples. De fato, ao tentarmos calcular $\int s'(t)dt$ estamos procurando uma função cuja deravada seja $s'(t)$. Ora, tal função é exatamente $s(t)$ acrescida de qualquer constante $K_1$. A igualdade acima pode ser reescrita da seguinte maneira

$$s(t) = t^2 + e^t + K,$$

onde a constante arbitrária $K$ foi obtida juntando-se todas as constantes que apareciam anteriormente.

Uma primeira análise do resultado do parágrafo anterior nos deixa um pouco frustrados. O aparecimento da constante (arbitrária) $K$ nos levaria à conclusão de que o problema tem infinitas soluções. Isto soa estranho porque, em um dado instante $t > 0$, o carro só pode estar em uma posição. Para entender o que está acontecendo suponha que temos agora dois carros partindo de posições iniciais diferentes, mas com mesma velocidade $v(t) = 2t + e^t$. Ora, ainda que eles tenham a mesma velocidade, a posição deles será sempre diferente, porque partiram de posições diferentes. O que vai ocorrer é que, em cada instante $t > 0$, a distância entre eles será sempre a mesma, sendo exatamente igual à distância entre os pontos de partida.

A observação feita acima mostra que obtivemos infinitas soluções porque o conjunto de dados que temos é incompleto. De fato, para determinar a posição do carro, além da velocidade, precisamos saber o ponto de partida, digamos $s(0) = 5$. Com esta nova informação somos levados a resolver o seguinte problema: determinar uma função $s : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ que satisfaz

$$\begin{cases} s'(t) = 2t + e^t, & t \in (0, +\infty), \\ s(0) = 5. \end{cases}$$

Conforme verificado anteriormente, as soluções da primeira equação são da forma $s(t) = t^2 + e^t + K$. Precisamos agora escolher a constante $K$ de modo que a *condição inicial* $s(0) = 5$ seja satisfeita. Isso pode ser feito simplesmente calculando a família de soluções no ponto $t = 0$:

$$5 = s(0) = 0^2 + e^0 + K = 1 + K \;\Rightarrow\; K = 4.$$

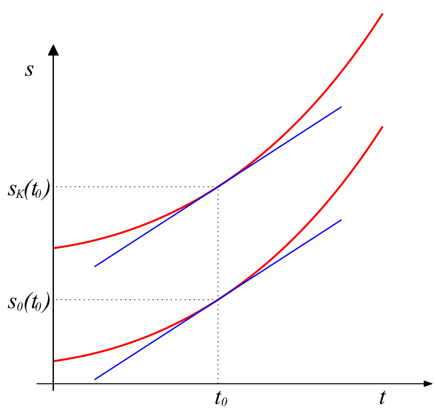
Deste modo, a solução do problema é dada por

$$s(t) = t^2 + e^t + 4, \;\; t \geq 0.$$

Este exemplo deve deixar claro a importância da constante de integração. $\square$

Vale destacar que, para obter a constante $K$ no exemplo acima, foi utilizado o fato de sabermos a posição no instante $t = 0$. Não existe nada de especial na escolha de $t = 0$. De fato, para determinamos a constante $K$, bastava saber a posição em qualquer instante $a \geq 0$. Assim, se soubéssemos por exemplo que $s(a) = b$, bastaria calcular $b = s(a) = a^2 + e^a + K$, para concluir que $K = b - a^2 - e^a$.

Para finalizar o texto vamos fazer a análise geométrica da família de primitivas da função $v(t)$. A exposição acima nos permitiu concluir que existem infinitas funções cuja derivada é $(2t + e^t)$, visto $\int (2t + e^t) dt = t^2 + e^t + K$. Do ponto de vista geométrico o que a constante $K$ faz é "levantar" (se $K > 0$) ou "abaixar" (se $K < 0$) em $K$ unidades o gráfico da função $s_0(t) = (t^2 + e^t)$. Assim, se denotarmos por $l_0$ a reta tangente ao gráfico de $s_0$ no ponto $(t_0, s_0(t_0))$, quando deslocamos o gráfico de $s_0$ para cima ou para baixo, o mesmo ocorre com sua reta tangente. Porém, nesse deslocamento, a inclinação da reta tangente permanece inalterada, de modo que a inclinação da reta tangente ao gráfico de $s_K(t) = t^2 + e^t + K$ no ponto $(t_0, s_K(t_0))$ é a mesma inclinação de $l_0$.




# Tarefa

Determine uma função $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y'(x) = \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}$ e cujo gráfico passe pelo ponto $(1, 4)$.