

A Integral de Itô e suas Aplicações

Parte 1

L. Cioletti

Outubro de 2025

Resumo

Este texto constitui a primeira parte de uma série de notas de aula, em desenvolvimento, sobre Cálculo Estocástico de Itô. Nesta parte inicial, revisamos a teoria clássica de integração de Riemann-Stieltjes e investigamos suas limitações quando o integrador não possui variação limitada. Apresentamos exemplos concretos mostrando que, existem funções na classe das Hölder contínuas com expoente $1/2$ (e um pouco mais regulares que as trajetórias típicas do movimento browniano), para as quais a integral de Riemann-Stieltjes não está bem definida, mesmo quando integrando e o integrador são funções contínuas. Demonstramos também, como aplicação Teorema de Banach-Steinhaus, que se a integral de Riemann-Stieltjes existe para toda função contínua, definida em um intervalo compacto, então o integrador necessariamente possui variação limitada. Estes resultados motivam a necessidade da introdução de uma nova teoria de integração, no caso será a teoria de integração no sentido de Itô, que será apresentada nas partes subsequentes destas notas.

1. Introdução e Motivação

Uma das primeiras aplicações do Movimento Browniano (ou *processo de Wiener*) à modelagem financeira foi proposta por Louis Bachelier por volta de 1900. Em sua tese, inovadora para a época, Bachelier propôs o uso de um processo com incrementos gaussianos para estudar a dinâmica dos preços dos ativos na Bolsa de Paris. É claro que, por razões cronológicas, não havia a terminologia moderna “Movimento Browniano” ou “Processo de Wiener”; ainda assim, parte substancial da matemática ali desenvolvida equivale, na linguagem atual, ao que conhecemos hoje sobre a teoria moderna do Movimento Browniano $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$.

De forma resumida, Bachelier utilizou o movimento browniano para modelar as flutuações de preço de um ativo e, conseqüentemente, a evolução temporal de seu preço X_t . A hipótese era que incrementos infinitesimais de preço dX_t seriam proporcionais aos incrementos dB_t do Movimento Browniano, isto é,

$$dX_t = \sigma dB_t,$$

onde $\sigma > 0$ é uma constante. Com isso, a trajetória do preço com condição inicial $X_0 = x$ seria dada por

$$X_t = x + \sigma B_t, \quad t \geq 0.$$

Essa abordagem estava à frente de seu tempo, mas apresentava uma inconveniência: para qualquer $t > 0$, a variável X_t pode assumir valores negativos com probabilidade não nula. Para horizontes curtos, essa probabilidade é praticamente desprezível; porém, à medida que t cresce, a chance de $X_t < 0$ aumenta, afastando o modelo da realidade de preços estritamente positivos.

Uma alternativa natural para contornar essa falha é modelar o *retorno relativo* dX_t/X_t em vez do nível de preço. Assume-se, então, que as variações relativas causadas pelas flutuações de mercado são proporcionais a dB_t , o que leva a seguinte equação entre as “taxas de variação”

$$dX_t = \sigma X_t dB_t. \quad (1)$$

Surge, então, a questão fundamental: qual o significado matemático preciso dessas “taxas de variação”? A semelhança formal com equações diferenciais ordinárias é enganosa, pois as trajetórias amostrais de B_t são, quase certamente, não diferenciáveis em todo ponto.

A maneira de dar sentido rigoroso a expressões como as da equação (1) foi introduzida por Kiyoshi Itô, na década de 1940, por meio de sua teoria de *integrais estocásticas* e *equações diferenciais estocásticas* (EDEs). Nessa teoria, a equação (1) é interpretada como a equação integral da forma

$$X_t = x + \sigma \int_0^t X_s dB_s,$$

em que a integral com respeito ao processo estocástico $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$, no lado direito é a chamada *integral estocástica de Itô* (que será definida e estudada adiante).

À primeira vista, poderia parecer que a solução tem a forma $x e^{B_t}$; no entanto, no arcabouço da teoria de Itô a solução é na verdade dada por

$$X_t = x \exp\left(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right),$$

que é o *martingale exponencial* clássico, discutido na lista de exercícios. O fator adicional $e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t}$ decorre precisamente da não diferenciabilidade das trajetórias de B_t e da maneira como é formulado o cálculo de Itô. Observe que no sentido de Itô, se $x > 0$, então $X_t > 0$ para todo $t \geq 0$, uma propriedade desejável e importante em qualquer modelo de precificação de ativos.

Além das aplicações em Finanças Quantitativas, descritas acima, é importante ressaltar que hoje em dia as aplicações do Cálculo Estocástico transcendem em muito o problema de modelagem de precificação de ativos. A Integral de Itô fornece uma linguagem natural e rigorosa para descrever fenômenos em praticamente qualquer área da ciência onde sistemas dinâmicos evoluem sob a influência de perturbações aleatórias contínuas (ruídos). Na Física, por exemplo, ela é indispensável para o tratamento moderno da equação de Langevin, que descreve a trajetória de partículas sujeitas a forças térmicas flutuantes, permitindo uma conexão precisa entre a dinâmica microscópica e as leis macroscópicas de difusão e termodinâmica fora do equilíbrio.

Além da Física, a teoria de integração estocástica de Itô é uma ferramenta central em áreas como a Engenharia e a Biologia Matemática. Na engenharia elétrica e aeroespacial, a teoria é a base para estudo de filtros estocásticos (como os de Kalman-Bucy), essencial para estimar o estado real de sistemas, seja a posição de um satélite ou sinal de telecomunicação,

a partir de observações ruidosas. Analogamente, em ecologia e epidemiologia, equações diferenciais estocásticas são frequentemente preferidas aos modelos determinísticos clássicos por serem capazes de capturar a variabilidade inerente a dinâmicas populacionais e taxas de transmissão de doenças, especialmente quando as populações são pequenas ou sujeitas a ambientes instáveis.

Outro dos grandes triunfos desta teoria é a sua profunda conexão com a Análise Clássica, especificamente com as Equações Diferenciais Parciais (EDPs). Através de resultados como a célebre fórmula de Feynman-Kac, soluções determinísticas de problemas de valor inicial e de contorno para EDPs do tipo parabólicas e elípticas (que incluem a equação do calor e a equação de Schrödinger em tempo imaginário) podem ser representadas probabilisticamente como valores esperados de funcionais de processos de Itô. Essa dualidade não apenas fornece uma interpretação física intuitiva para as soluções dessas equações, mas também viabiliza métodos numéricos robustos, baseados em simulações de Monte Carlo, para resolver EDPs em altas dimensões onde métodos tradicionais de malha falham.

Por fim, o alcance do Cálculo Estocástico se estende a fronteiras da Matemática Pura. Ele é uma ferramenta que tem sido aplicada com bastante sucesso na Geometria Diferencial (por exemplo, no estudo do Movimento Browniano em variedades riemannianas e na teoria do potencial) e na Análise Harmônica. Surpreendentemente, encontramos também aplicações fascinantes na Teoria Analítica dos Números, onde a universalidade do Movimento Browniano aparece em teoremas de limites para funções aritméticas. Por exemplo, certas estatísticas associadas à distribuição dos valores da função Zeta de Riemann na linha crítica, ou à distribuição de números primos, podem ser modeladas ou aproximadas por leis associadas a trajetórias brownianas, revelando uma conexão profunda entre a aleatoriedade contínua e as estruturas discretas dos números.

Os resultados apresentados nestas notas são baseados nas seguintes referências [2, 5, 6]. Para a parte básica sobre o Movimento Browniano o leitor pode consultar as várias referências clássicas sobre o assunto bem como [1, 3].

2. Integrais de Riemann, Stieltjes e Lebesgue

Uma das aplicações centrais de uma teoria de integração é reconstruir uma função a partir de suas taxas de variação. Por exemplo, se conhecemos o valor de uma função em x_0 , bem como sua derivada

$$\frac{df}{dx}(x) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

em cada ponto do interior do domínio, e se essa derivada possui regularidade adequada (por exemplo, é contínua), então o Teorema Fundamental do Cálculo garante que

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{df}{dx}(t) dt.$$

À medida que a regularidade dessas “taxas de variação” diminui, torna-se necessário recorrer a conceitos mais sofisticados de integral para resolver problemas de reconstrução. As integrais de Riemann–Stieltjes e de Lebesgue–Stieltjes estendem a integral de Riemann e são particularmente eficazes quando há controle da variação total do *integrador*. Em diversos contextos, entretanto, o integrador natural apresenta variação total infinita (como ocorre, quase certamente, com as trajetórias do Movimento Browniano em qualquer intervalo).

Nesses casos, a integral de Riemann–Stieltjes, em geral, não está definida, e o tratamento via Lebesgue–Stieltjes também é insuficiente.

Nesta seção, recordaremos as definições e algumas propriedades elementares das integrais de Riemann, Riemann–Stieltjes e Lebesgue–Stieltjes, e apresentaremos exemplos simples de suas limitações quando o integrador não tem variação limitada. Isso motivará, nas seções seguintes, a introdução da teoria de integração no sentido de Itô, adequada para integrais com respeito ao Movimento Browniano e crucial para a formulação rigorosa de EDEs como as que aparecem em (1).

2.1. Integral de Riemann

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ satisfazendo $a < b$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Dizemos que f é *Riemann integrável*, no sentido de Darboux, se o supremo das somas inferiores coincide com o ínfimo das somas superiores. Isto é equivalentemente a existência do seguinte limite

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\tau_i)(t_i - t_{i-1}),$$

onde $\Delta_n = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ é uma partição de $[a, b]$ com a convenção $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$, $\|\Delta_n\| = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$, e τ_i é um ponto escolhido arbitrariamente no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

Se f é uma função contínua em $[a, b]$, então ela é Riemann integrável. Além disso, é bem conhecido que uma função limitada em $[a, b]$ é Riemann integrável se, e somente se, o conjunto de seus pontos de descontinuidade possui medida de Lebesgue nula.

2.2. Integral de Riemann–Stieltjes

Seja g uma função monótona não-decrescente em um intervalo fechado finito $[a, b]$. Uma função limitada f definida em $[a, b]$ é dita ser *Riemann–Stieltjes integrável*, com respeito a g , se o seguinte limite existe:

$$\int_a^b f(t) dg(t) = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\tau_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})), \quad (2)$$

onde a partição Δ_n e os pontos de avaliação τ_i são dados como acima. Na integral que aparece acima, dizemos que a função f está fazendo o papel do integrando, enquanto g faz papel do **integrador**. É um fato bem conhecido que funções contínuas em $[a, b]$ são Riemann–Stieltjes integráveis com respeito a qualquer função monótona não decrescente em $[a, b]$.

É possível também fazer uma pequena extensão do resultado mencionado acima para incluir integradores um pouco mais gerais, apenas contínuos, em compensação o integrando precisa ser uma função monótona não crescente ou não decrescente. Mais precisamente, Suponha que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função monótona não-decrescente e contínua. Se a função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então podemos nos inspirar na fórmula de integração por partes para definir a integral de Riemann–Stieltjes de f , com respeito a g , como segue

$$\int_a^b f(t) dg(t) \equiv f(t)g(t) \Big|_a^b - \int_a^b g(t) df(t), \quad (3)$$

onde a integral no lado direito é definida como em (2), mas agora com f sendo o integrador e g o integrando. Isso nos leva à seguinte pergunta.

Pergunta 1. Para quaisquer funções contínuas f e g em $[a, b]$, podemos definir a integral $\int_a^b f(t) dg(t)$ pelo limite que aparece em (2)?

Para responder a esta pergunta vamos considerar o caso particular em que $f = g$. Ou seja, vamos verificar se apenas sob a hipótese de continuidade de f é possível definir

$$\int_a^b f(t) df(t)$$

pelo limite que aparece em (2).

Seja $\Delta_n = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$. Sejam L_n e R_n as correspondentes somas de Riemann com os pontos de avaliação $\tau_i = t_{i-1}$ e $\tau_i = t_i$, respectivamente, a saber,

$$L_n \equiv \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}) (f(t_i) - f(t_{i-1})),$$

$$R_n \equiv \sum_{i=1}^n f(t_i) (f(t_i) - f(t_{i-1})).$$

Observamos que uma condição necessária para a existência do limite em (2) e que $\lim L_n = \lim R_n$, quando $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$. Vamos investigar o que acontece neste caso.

Primeiro, observe que a diferença e a soma de L_n e R_n satisfazem as identidades mostradas abaixo

$$R_n - L_n = \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2, \quad (4)$$

$$R_n + L_n = \sum_{i=1}^n (f(t_i)^2 - f(t_{i-1})^2) = f(b)^2 - f(a)^2.$$

Somando ambos os lados das identidades acima e também subtraindo a segunda identidade da primeira obtemos as seguintes expressões para R_n e L_n , respectivamente

$$R_n = \frac{1}{2} \left(f(b)^2 - f(a)^2 + \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 \right),$$

$$L_n = \frac{1}{2} \left(f(b)^2 - f(a)^2 - \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 \right). \quad (5)$$

Uma observação. O limite do lado direito de (4), quando $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$, caso exista, coincide com a chamada *variação quadrática* da função f em $[a, b]$.

Segue das expressões acima que

$$\lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} R_n \neq \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} L_n$$

se, e somente se, a variação quadrática da função f é não nula.

Uma característica muito importante do argumento acima é que ele é de natureza completamente algébrica ou combinatória. Para a obtenção das expressões para R_n e L_n não é preciso apelar para nenhuma hipótese de regularidade da função f .

Vamos considerar dois exemplos simples.

Exemplo 2. Seja f uma função $C^1([a, b], \mathbb{R})$, isto é, $f'(t)$ é uma função contínua em $[a, b]$. Considere novamente o problema de definir $\int_a^b f(t) df(t)$ pelo limite (2). Neste caso observe que segue da identidade (4) e do Teorema do Valor Médio que

$$\begin{aligned} |R_n - L_n| &= \sum_{i=1}^n \left(f'(t_i^*)(t_i - t_{i-1}) \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \|f'\|_\infty^2 (t_i - t_{i-1})^2 \\ &\leq \|f'\|_\infty^2 \|\Delta_n\| \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = \|f'\|_\infty^2 \|\Delta_n\| (b - a) \\ &\rightarrow 0, \quad \text{quando } \|\Delta_n\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

onde $t_{i-1} < t_i^* < t_i$ e $\|\cdot\|_\infty$ é a norma do supremo. Assim $\lim L_n = \lim R_n$ quando $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$. Além do mais, podemos usar a identidade (5) para calcular explicitamente

$$\lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} R_n = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} L_n = \frac{1}{2} (f(b)^2 - f(a)^2). \quad (6)$$

Por outro lado, no caso de funções de classe $C^1([a, b], \mathbb{R})$, podemos simplesmente definir a integral $\int_a^b f(t) df(t)$ por

$$\int_a^b f(t) df(t) = \int_a^b f(t) f'(t) dt$$

e obter novamente, mas agora pelo Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\int_a^b f(t) df(t) = \int_a^b f(t) f'(t) dt = \frac{1}{2} (f(b)^2 - f(a)^2).$$

Exemplo 3. Neste exemplo vamos estudar o mesmo problema do exemplo anterior, mas para uma $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ muito menos regular que as funções do espaço $C^1([a, b], \mathbb{R})$. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função satisfazendo a seguinte condição. Existem constantes positivas $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$ tais que

$$K_1 |t - s|^{1/2} \leq |f(t) - f(s)| \leq K_2 |t - s|^{1/2}, \quad (7)$$

para todos $s, t \in [a, b]$ satisfazendo $|s - t| < \delta$.

Observe que segue da identidade (4) e da condição (7) que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ temos $\|\Delta_n\| < \delta$ e que valem as seguintes desigualdades

$$K_1^2 (b - a) \leq |R_n - L_n| \leq K_2^2 (b - a). \quad (8)$$

Logo as somas de Riemann–Stieltjes não podem convergir para um único limite independente da escolha de τ_i , e portanto para qualquer função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo (7) a integral $\int_a^b f(t) df(t)$ não existe, no sentido de Riemann–Stieltjes.

Observe que embora a função deste exemplo seja irregular em um certo sentido ela é uma função uniformemente contínua. Na verdade, mais ainda ela é uma função Hölder contínua.

Os exemplos acima revelam que o problema de definir a integral $\int_a^b f(t) dg(t)$, mesmo quando $f = g$, é um problema altamente não-trivial. De fato, não há uma resposta simples e definitiva para a **Pergunta 1**.

A conclusão impactante obtida no exemplo **Exemplo 3** nos leva naturalmente a fazer uma outra pergunta.

Pergunta 4. Existem funções contínuas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a condição

$$K_1|t - s|^{1/2} \leq |f(t) - f(s)| \leq K_2|t - s|^{1/2}$$

para todos $s, t \in [a, b]$ tais que $|t - s| < \delta$?

Vamos abordar agora o problema de definir a integral de Riemann-Stieltjes de uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com respeito a uma função g , pela expressão

$$\int_a^b f(t) dg(t) = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\tau_i) (g(t_i) - g(t_{i-1})), \quad (9)$$

onde o limite é tomado como no início da seção, de um ponto de vista um pouco mais voltado para Análise Funcional. Vamos mostrar que se o limite acima existe para toda função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, então a função g é necessariamente uma função de variação limitada. Mais precisamente, seja $\mathcal{P}([a, b])$ a coleção de todas as partições do intervalo $[a, b]$ satisfazendo a convenção mencionada no início desta seção, isto é, se $\Delta \in \mathcal{P}([a, b])$ então $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, para algum $n \in \mathbb{N}$ e $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Dizemos que uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de variação limitada em $[a, b]$ se a seguinte condição é satisfeita

$$\sup_{\Delta \in \mathcal{P}([a, b])} \text{Var}_1(f, \Delta) < +\infty,$$

onde para cada partição Δ da forma $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$

$$\text{Var}_1(f, \Delta) \equiv \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|.$$

Para provar a afirmação feita acima, vamos precisar do Teorema de Banach-Steinhaus cuja prova pode ser encontrada em diversos livros introdutórios de Análise Funcional, como, por exemplo, na referência [4].

Para o enunciado do teorema vamos precisar lembrar da noção de norma de operador. Sejam $(B, \|\cdot\|_B)$ um espaço de Banach, $(N, \|\cdot\|_N)$ um espaço normado. Dizemos que um operador linear $T : B \rightarrow N$ é contínuo (ou limitado), se existe alguma constante $K \geq 0$ tal que $\|T(v)\|_N \leq K\|v\|_B$, para todo $v \in B$.

Se $T : B \rightarrow N$ é um operador linear contínuo, definimos a norma do operador T , notação $\|T\|_{\text{op}}$, pela seguinte expressão

$$\|T\|_{\text{op}} \equiv \sup_{\substack{v \in B \\ 0 < \|v\|_B \leq 1}} \frac{\|T(v)\|_N}{\|v\|_B}.$$

Observe que segue diretamente das definições que $T : B \rightarrow N$ é um operador linear contínuo, se e somente se, $\|T\|_{\text{op}} < +\infty$.

Teorema 5 (Banach-Steinhaus). Sejam $(B, \|\cdot\|_B)$ um espaço de Banach, $(N, \|\cdot\|_N)$ um espaço normado. Seja Γ um conjunto de índices arbitrário e $\{T_\alpha : B \rightarrow N\}_{\alpha \in \Gamma}$ uma família de operadores contínuos tais que, para cada $v \in B$ fixado, a família de vetores $\{T_\alpha(v) : \alpha \in \Gamma\}$ define um conjunto limitado em N . Então a família de números reais $\{\|T_\alpha\|_{\text{op}} : \alpha \in \Gamma\}$ é limitada, equivalentemente

$$\sup_{\alpha \in \Gamma} \|T_\alpha\|_{\text{op}} < +\infty.$$

Lema 6. Sejam $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e para cada $n \in \mathbb{N}$ considere a partição do intervalo $[0, 1]$ por racionais diádicos positivos dada por $\Delta_n \equiv \{j/2^n : j = 0, \dots, 2^n\}$. Então

$$\sup_{\Delta \in \mathcal{P}([0,1])} \text{Var}_1(f, \Delta) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \text{Var}_1(f, \Delta_n).$$

Prova. Já que a família $\{\Delta_n : n \in \mathbb{N}\}$ está contida na família $\mathcal{P}([0, 1])$, temos imediatamente da definição de supremo que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \text{Var}_1(f, \Delta_n) \leq \sup_{\Delta \in \mathcal{P}([0,1])} \text{Var}_1(f, \Delta).$$

Reciprocamente, seja $\Delta \equiv \{t_0, \dots, t_k\} \in \mathcal{P}([0, 1])$ uma partição arbitrária e $\varepsilon > 0$. Como estamos assumindo que $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $[0, 1]$ é compacto, podemos afirmar que a função f é uniformemente contínua em $[0, 1]$. Desta forma podemos garantir que existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{k}, \quad \forall s, t \in [0, 1] \text{ satisfazendo } |s - t| < \delta.$$

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\frac{1}{2^{n_0}} = \|\Delta_{n_0}\| < \min \left\{ \delta, \frac{1}{2} \min\{t_j - t_{j-1} : j = 1, \dots, k\} \right\}.$$

Observe que podemos particionar o intervalo fechado $[0, 1]$ da seguinte maneira

$$\left[0, \frac{1}{2^{n_0}}\right) \cup \left[\frac{1}{2^{n_0}}, \frac{2}{2^{n_0}}\right) \cup \dots \cup \left[\frac{j-1}{2^{n_0}}, \frac{j}{2^{n_0}}\right) \cup \dots \cup \left[\frac{2^{n_0}-1}{2^{n_0}}, \frac{2^{n_0}}{2^{n_0}}\right] = [0, 1].$$

Para facilitar a notação denotamos por

$$D_j = \begin{cases} \left[\frac{j}{2^{n_0}}, \frac{j+1}{2^{n_0}}\right), & 0 \leq j < 2^{n_0} - 1; \\ \left[\frac{2^{n_0}-1}{2^{n_0}}, 1\right], & j = 2^{n_0} - 1, \end{cases}$$

Como a coleção de intervalos D_j 's define uma partição de $[0, 1]$, podemos afirmar que para cada índice $r \in \{0, \dots, k\}$ existe um único índice $j(r) \in \{0, \dots, 2^{n_0} - 1\}$ tal que $t_r \in D_{j(r)}$. Note que

$$\begin{aligned} j(r) &= \min \{j \in \{0, \dots, 2^{n_0} - 1\} : t_r \in D_j\} \\ &= \min \left\{ j \in \{0, \dots, 2^{n_0} - 1\} : \frac{j}{2^{n_0}} \leq t_r \leq \frac{j+1}{2^{n_0}} \right\} \\ &= \min \left\{ 2^{n_0} - 1, \lfloor 2^{n_0} t_r \rfloor \right\}. \end{aligned}$$

Além do mais, como o diâmetro do conjunto D_j é dado por $\text{Diam}(D_j) = 2^{-n_0}$, segue da escolha de n_0 que não é possível ter mais do que um elemento da partição Δ em um único intervalo da forma D_j .

Fixe $r \in \{0, \dots, k-1\}$ e considere os pontos $t_r, t_{r+1} \in \Delta$. Então sabemos que existem $j(r) < j(r+1)$ tais que

$$\{t_r, t_{r+1}\} \subseteq \bigcup_{j=j(r)}^{j(r+1)} D_j.$$

Além do mais, segue da construção de $j(r)$ e $j(r+1)$ que os pontos t_r e t_{r+1} são os únicos pontos da partição Δ que pertencem a união acima. Note que por um argumento telescópico temos

$$\begin{aligned} f(t_{r+1}) - f(t_r) &= f(t_{r+1}) - f\left(\frac{j(r)}{2^{n_0}}\right) + f\left(\frac{j(r)}{2^{n_0}}\right) - f(t_r) \\ &= f(t_{r+1}) - f\left(\frac{j(r)+1}{2^{n_0}}\right) + f\left(\frac{j(r)+1}{2^{n_0}}\right) - f\left(\frac{j(r)}{2^{n_0}}\right) + f\left(\frac{j(r)}{2^{n_0}}\right) - f(t_r) \\ &= f(t_{r+1}) - f\left(\frac{j(r+1)}{2^{n_0}}\right) + \sum_{m=j(r)}^{j(r+1)-1} f\left(\frac{m+1}{2^{n_0}}\right) - f\left(\frac{m}{2^{n_0}}\right) + f\left(\frac{j(r)}{2^{n_0}}\right) - f(t_r). \end{aligned}$$

Usando a identidade acima, a desigualdade triangular, a continuidade uniforme de f e a escolha de n_0 , temos para cada $r \in \{0, \dots, k-1\}$ a seguinte cota superior

$$|f(t_{r+1}) - f(t_r)| \leq 2\frac{\varepsilon}{k} + \sum_{m=j(r)}^{j(r+1)-1} \left| f\left(\frac{m+1}{2^{n_0}}\right) - f\left(\frac{m}{2^{n_0}}\right) \right|.$$

Observe que o somatório que aparece acima correspondente a contribuição da variação de f ao longo dos pontos da partição Δ_{n_0} que estão entre t_r e t_{r+1} . Somando a desigualdade acima sobre r ficamos com

$$\sum_{r=0}^{k-1} |f(t_{r+1}) - f(t_r)| \leq 2\varepsilon + \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{m=j(r)}^{j(r+1)-1} \left| f\left(\frac{m+1}{2^{n_0}}\right) - f\left(\frac{m}{2^{n_0}}\right) \right|.$$

Portanto segue das observações acima que

$$\text{Var}_1(f, \Delta) \leq 2\varepsilon + \text{Var}_1(f, \Delta_{n_0}).$$

Observando que $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e consequentemente que a aplicação $n \mapsto \text{Var}_1(f, \Delta_n)$ é monótona não-decrescente segue da desigualdade acima que

$$\text{Var}_1(f, \Delta) \leq 2\varepsilon + \sup_{n \in \mathbb{N}} \text{Var}_1(f, \Delta_n).$$

Como a desigualdade acima é válida para uma partição arbitrária $\Delta \in \mathcal{P}([0, 1])$ e para qualquer escolha de $\varepsilon > 0$, então podemos concluir que

$$\sup_{\Delta \in \mathcal{P}([0, 1])} \text{Var}_1(f, \Delta) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \text{Var}_1(f, \Delta_n).$$

o que finaliza a prova do lema. ■

Teorema 7. Seja $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponha que para toda $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ existe a integral de Riemann-Stieltjes de f , com respeito a g , ou seja, existe o limite

$$\int_0^1 f(t) dg(t) = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\tau_i) (g(t_i) - g(t_{i-1}))$$

onde $\Delta_n = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ é uma partição genérica do intervalo fechado $[0, 1]$ com a convenção $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$, $\|\Delta_n\| = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$, e τ_i é um ponto escolhido arbitrariamente no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Então g tem variação total finita, isto é,

$$\sup_{\Delta \in \mathcal{P}([0, 1])} \text{Var}_1(g, \Delta) < +\infty.$$

Prova. A ideia é aplicar o Teorema de Banach-Steinhaus. A seguir mostramos como isto pode ser feito.

Primeiro, o espaço de Banach $(B, \|\cdot\|_B)$ que aparece no enunciado do Teorema de Banach-Steinhaus será o espaço $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ das funções reais contínuas definidas sobre o intervalo $[0, 1]$ munido da norma do supremo. Já o espaço normado $(N, \|\cdot\|_N)$ será tomado como sendo a reta real munida da norma induzida pelo valor absoluto, isto é, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

O conjunto de índices Γ e a família de operadores que aparecem no enunciado do teorema serão escolhidos da seguinte maneira. O conjunto de índices Γ será o conjunto dos números naturais isto é, $\Gamma = \mathbb{N}$.

Próximo passo será definir a família de operadores. Para facilitar a compreensão dos argumentos, no que segue, para cada $n \in \mathbb{N}$, usamos a notação Δ_n para designar a partição do intervalo $[0, 1]$, por racionais diádicos positivos, dada da seguinte forma

$$\Delta_n = \left\{ \frac{j}{2^n} : j = 0, \dots, 2^n \right\}.$$

Vamos prosseguir na construção da família de operadores. Considere a função contínua $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fixada no enunciado deste teorema (a função que desempenha o papel do integrador na integral de Riemann-Stieltjes $\int_0^1 f(t) dg(t)$) e para cada $n \in \mathbb{N}$ defina o operador linear $T_{g,n} \equiv T_n : C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte maneira

$$T_n(f) \equiv \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{k}{2^n}\right) \left(g\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - g\left(\frac{k}{2^n}\right) \right), \quad \forall f \in C([0, 1], \mathbb{R}).$$

Afirmamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $\|T_n\|_{\text{op}} = \text{Var}_1(g, \Delta_n)$. De fato, dada uma função $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ satisfazendo $0 < \|f\|_\infty \leq 1$ temos

$$\begin{aligned} |T_n(f)| &\leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \left| f\left(\frac{k}{2^n}\right) \right| \cdot \left| g\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - g\left(\frac{k}{2^n}\right) \right| \\ &\leq \|f\|_\infty \sum_{k=0}^{2^n-1} \left| g\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - g\left(\frac{k}{2^n}\right) \right| \\ &= \|f\|_\infty \text{Var}_1(g, \Delta_n). \end{aligned}$$

O que mostra que $\|T_n\|_{\text{op}} \leq \text{Var}_1(g, \Delta_n)$. Próximo passo é mostrar que vale a desigualdade reversa. Para verificar isto, basta observar que para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado podemos afirmar que

existe alguma função contínua $h_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $-1 \leq h_n(x) \leq 1$ e que sua imagem nos pontos da partição Δ_n satisfaz

$$h_n\left(\frac{k}{2^n}\right) = \text{sign}\left(g\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - g\left(\frac{k}{2^n}\right)\right).$$

Na verdade, como o conjunto de pontos diádicos de Δ_n é finito, podemos tomar $h_n \in C([0, 1], \mathbb{R})$ como sendo uma função linear por partes em cada subintervalo diádico.

Vamos verificar que esta função satura a cota obtida acima para $\|T_n\|_{\text{op}}$. De fato, já que para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que $|x| = x \cdot \text{sign}(x)$ e $\|h_n\|_{\infty} = 1$, então temos

$$\begin{aligned} |T_n(h_n)| &= \left| \sum_{k=0}^{2^n-1} h_n\left(\frac{k}{2^n}\right) \cdot \left(g\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - g\left(\frac{k}{2^n}\right)\right) \right| \\ &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \left| g\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - g\left(\frac{k}{2^n}\right) \right| \\ &= \|h_n\|_{\infty} \text{Var}_1(g, \Delta_n). \end{aligned}$$

O que conclui a prova de que

$$\|T_n\|_{\text{op}} = \text{Var}_1(g, \Delta_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

Próximo passo é mostrar a validade da última hipótese necessária para aplicar o Teorema de Banach-Steinhaus. Para isto começamos observando que a hipótese do teorema garante que se $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua arbitrária, então existe o limite das somas de Riemann-Stieltjes de f , com respeito a g , ao longo de qualquer sequência de partições em $\mathcal{P}([0, 1])$ cuja norma da partição tende a zero, ou seja, existe o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{k}{2^n}\right) \left(g\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - g\left(\frac{k}{2^n}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(f).$$

Em particular, segue da igualdade acima que a família de números reais $\{T_n(f) : n \in \mathbb{N}\}$ é uma família limitada, para cada $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ fixada. Desta forma todas as hipóteses do Teorema de Banach-Steinhaus são satisfeitas. Portanto segue da identidade (10) e do Teorema de Banach-Steinhaus que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \text{Var}_1(g, \Delta_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\text{op}} < +\infty.$$

Como estamos assumindo que $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua podemos aplicar o **Lema 6** e a desigualdade acima para concluir finalmente que

$$\sup_{\Delta \in \mathcal{P}([0, 1])} \text{Var}_1(g, \Delta) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \text{Var}_1(g, \Delta_n) < +\infty,$$

ou seja, que g possui variação total finita. ■

Referências

- [1] P. Billingsley. *Probability and measure*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, anniversary edition, 2012. With a foreword by Steve Lalley and a brief biography of Billingsley by Steve Koppes.
- [2] Zdzisław Brzeźniak and Tomasz Zastawniak. *Basic stochastic processes*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag London, Ltd., London, 1999. A course through exercises.
- [3] L. Cioletti and L. Lucinger. O Teorema da Existência de Kolmogorov e o Movimento Browniano. <https://mat.unb.br/cioletti/ensino/kolmogorov-browniano.pdf>, 2025.
- [4] J. B. Conway. *A Course in Functional Analysis*, volume 96 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.
- [5] Hui-Hsiung Kuo. *Introduction to stochastic integration*. Universitext. Springer, New York, 2006.
- [6] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.