

A Integral de Itô e suas Aplicações

L. Cioletti

Outubro de 2025

Resumo

Neste texto apresentamos a integral de Ito e algumas de suas aplicações.

1. Introdução e Motivação

Uma das primeiras aplicações do Movimento Browniano (ou *processo de Wiener*) à modelagem financeira foi proposta por Louis Bachelier por volta de 1900. Em sua tese, inovadora para a época, Bachelier propôs o uso de um processo com incrementos gaussianos para estudar a dinâmica dos preços dos ativos na Bolsa de Paris. É claro que, por razões cronológicas, não havia a terminologia moderna “Movimento Browniano” ou “Processo de Wiener”; ainda assim, parte substancial da matemática ali desenvolvida equivale, na linguagem atual, ao que conhecemos hoje sobre a teoria moderna do Movimento Browniano $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$.

De forma resumida, Bachelier utilizou o movimento browniano para modelar as flutuações de preço de um ativo e, conseqüentemente, a evolução temporal de seu preço X_t . A hipótese era que incrementos infinitesimais de preço dX_t seriam proporcionais aos incrementos dB_t do Movimento Browniano, isto é,

$$dX_t = \sigma dB_t,$$

onde $\sigma > 0$ é uma constante. Com isso, a trajetória do preço com condição inicial $X_0 = x$ seria dada por

$$X_t = x + \sigma B_t, \quad t \geq 0.$$

Essa abordagem estava à frente de seu tempo, mas apresentava uma inconveniência: para qualquer $t > 0$, a variável X_t pode assumir valores negativos com probabilidade não nula. Para horizontes curtos, essa probabilidade é praticamente desprezível; porém, à medida que t cresce, a chance de $X_t < 0$ aumenta, afastando o modelo da realidade de preços estritamente positivos.



Uma alternativa natural para contornar essa falha é modelar o *retorno relativo* dX_t/X_t em vez do nível de preço. Assume-se, então, que as variações relativas causadas pelas flutuações de mercado são proporcionais a dB_t , o que leva a seguinte equação entre as “taxas de variação”

$$dX_t = \sigma X_t dB_t. \quad (1)$$

Surge, então, a questão fundamental: qual o significado matemático preciso dessas “taxas de variação”? A semelhança formal com equações diferenciais ordinárias é enganosa, pois as trajetórias amostrais de B_t são, quase certamente, não diferenciáveis em todo ponto.

A maneira de dar sentido rigoroso a expressões como as da equação (1) foi introduzida por Kiyoshi Itô, na década de 1940, por meio de sua teoria de *integrais estocásticas* e *equações diferenciais estocásticas* (EDEs). Nessa teoria, a equação (1) é interpretada como a equação integral da forma

$$X_t = x + \sigma \int_0^t X_s dB_s,$$

em que a integral com respeito ao processo estocástico $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$, no lado direito é a chamada *integral estocástica de Itô* (que será definida e estudada adiante).

À primeira vista, poderia parecer que a solução tem a forma $x e^{B_t}$; no entanto, no arcabouço da teoria de Itô a solução é na verdade dada por

$$X_t = x \exp\left(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right),$$

que é o *martingale exponencial* clássico, discutido na lista de exercícios. O fator adicional $e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t}$ decorre precisamente da não diferenciabilidade das trajetórias de B_t e da maneira como é formulado o cálculo de Itô. Observe que no sentido de Itô, se $x > 0$, então $X_t > 0$ para todo $t \geq 0$, uma propriedade desejável e importante em qualquer modelo de precificação de ativos.

Além das aplicações em Finanças Quantitativas, descritas acima, é importante ressaltar que hoje em dia as aplicações do Cálculo Estocástico transcendem em muito o problema de modelagem de precificação de ativos. A Integral de Itô fornece uma linguagem natural e rigorosa para descrever fenômenos em praticamente qualquer área da ciência onde sistemas dinâmicos evoluem sob a influência de perturbações aleatórias contínuas (ruídos). Na Física, por exemplo, ela é indispensável para o tratamento moderno da equação de Langevin, que descreve a trajetória de partículas sujeitas a forças térmicas flutuantes, permitindo uma conexão precisa entre a dinâmica microscópica e as leis macroscópicas de difusão e termodinâmica fora do equilíbrio.

Além da Física, a teoria de integração estocástica de Itô é uma ferramenta central em áreas como a Engenharia e a Biologia Matemática. Na engenharia elétrica e aeroespacial, a teoria é a base para estudo de filtros estocásticos (como os de Kalman-Bucy), essencial para estimar o estado real de sistemas, seja a posição de um satélite ou sinal de telecomunicação, a partir de observações ruidosas. Analogamente, em ecologia e epidemiologia, equações diferenciais estocásticas são frequentemente preferidas aos modelos determinísticos clássicos por serem capazes de capturar a variabilidade inerente a dinâmicas populacionais e taxas de transmissão de doenças, especialmente quando as populações são pequenas ou sujeitas a ambientes instáveis.

Outro dos grandes triunfos desta teoria é a sua profunda conexão com a Análise Clássica, especificamente com as Equações Diferenciais Parciais (EDPs). Através de resultados como a célebre fórmula de Feynman-Kac, soluções determinísticas de problemas de valor inicial e

de contorno para EDPs do tipo parabólicas e elípticas (que incluem a equação do calor e a equação de Schrödinger em tempo imaginário) podem ser representadas probabilisticamente como valores esperados de funcionais de processos de Itô. Essa dualidade não apenas fornece uma interpretação física intuitiva para as soluções dessas equações, mas também viabiliza métodos numéricos robustos, baseados em simulações de Monte Carlo, para resolver EDPs em altas dimensões onde métodos tradicionais de malha falham.

Por fim, o alcance do Cálculo Estocástico se estende a fronteiras da Matemática Pura. Ele é uma ferramenta que tem sido aplicada com bastante sucesso na Geometria Diferencial (por exemplo, no estudo do Movimento Browniano em variedades riemannianas e na teoria do potencial) e na Análise Harmônica. Surpreendentemente, encontramos também aplicações fascinantes na Teoria Analítica dos Números, onde a universalidade do Movimento Browniano aparece em teoremas de limites para funções aritméticas. Por exemplo, certas estatísticas associadas à distribuição dos valores da função Zeta de Riemann na linha crítica, ou à distribuição de números primos, podem ser modeladas ou aproximadas por leis associadas a trajetórias brownianas, revelando uma conexão profunda entre a aleatoriedade contínua e as estruturas discretas dos números.

Os resultados apresentados nestas notas são baseados nas seguintes referências [1, 4, 5]

2. Integrais de Riemann, Stieltjes e Lebesgue

Uma das aplicações centrais de uma teoria de integração é reconstruir uma função a partir de suas taxas de variação. Por exemplo, se conhecemos o valor de uma função em x_0 , bem como sua derivada

$$\frac{df}{dx}(x) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

em cada ponto do interior do domínio, e se essa derivada possui regularidade adequada (por exemplo, é contínua), então o Teorema Fundamental do Cálculo garante que

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{df}{dx}(t) dt.$$

À medida que a regularidade dessas “taxas de variação” diminui, torna-se necessário recorrer a conceitos mais sofisticados de integral para resolver problemas de reconstrução. As integrais de Riemann–Stieltjes e de Lebesgue–Stieltjes estendem a integral de Riemann e são particularmente eficazes quando há controle da variação total do *integrador*. Em diversos contextos, entretanto, o integrador natural apresenta variação total infinita (como ocorre, quase certamente, com as trajetórias do Movimento Browniano em qualquer intervalo). Nesses casos, a integral de Riemann–Stieltjes, em geral, não está definida, e o tratamento via Lebesgue–Stieltjes também é insuficiente.

Nesta seção, recordaremos as definições e algumas propriedades elementares das integrais de Riemann, Riemann–Stieltjes e Lebesgue–Stieltjes, e apresentaremos exemplos simples de suas limitações quando o integrador não tem variação limitada. Isso motivará, nas seções seguintes, a introdução da teoria de integração no sentido de Itô, adequada para integrais com respeito ao Movimento Browniano e crucial para a formulação rigorosa de EDEs como as que aparecem em (1).

2.1. Integral de Riemann

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ satisfazendo $a < b$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Dizemos que f é *Riemann integrável*, no sentido de Darboux, se o supremo das somas inferiores coincide com o ínfimo das somas superiores. Isto é equivalentemente a existência do seguinte limite

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\tau_i)(t_i - t_{i-1}),$$

onde $\Delta_n = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ é uma partição de $[a, b]$ com a convenção $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$, $\|\Delta_n\| = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$, e τ_i é um ponto escolhido arbitrariamente no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

Se f é uma função contínua em $[a, b]$, então ela é Riemann integrável. Além disso, é bem conhecido que uma função limitada em $[a, b]$ é Riemann integrável se, e somente se, o conjunto de seus pontos de descontinuidade possui medida de Lebesgue nula.

2.2. Integral de Riemann-Stieltjes

Seja g uma função monótona não-decrescente em um intervalo fechado finito $[a, b]$. Uma função limitada f definida em $[a, b]$ é dita ser *Riemann-Stieltjes integrável*, com respeito a g , se o seguinte limite existe:

$$\int_a^b f(t) dg(t) = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\tau_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})), \quad (2)$$

onde a partição Δ_n e os pontos de avaliação τ_i são dados como acima. Na integral que aparece acima, dizemos que a função f está fazendo o papel do integrando, enquanto g faz papel do **integrador**. É um fato bem conhecido que funções contínuas em $[a, b]$ são Riemann-Stieltjes integráveis com respeito a qualquer função monótona não decrescente em $[a, b]$.

É possível também fazer uma pequena extensão do resultado mencionado acima para incluir integradores um pouco mais gerais, apenas contínuos, em compensação o integrando precisa ser uma função monótona não crescente ou não decrescente. Mais precisamente, Suponha que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função monótona não-decrescente e contínua. Se a função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então podemos nos inspirar na fórmula de integração por partes para definir a integral de Riemann-Stieltjes de f , com respeito a g , como segue

$$\int_a^b f(t) dg(t) \equiv f(t)g(t) \Big|_a^b - \int_a^b g(t) df(t), \quad (3)$$

onde a integral no lado direito é definida como em (2), mas agora com f sendo o integrador e g o integrando. Isso nos leva à seguinte pergunta.

Pergunta 1. Para quaisquer funções contínuas f e g em $[a, b]$, podemos definir a integral $\int_a^b f(t) dg(t)$ pelo limite que aparece em (2)?

Para responder a esta pergunta vamos considerar o caso particular em que $f = g$. Ou seja, vamos verificar se apenas sob a hipótese de continuidade de f é possível definir

$$\int_a^b f(t) df(t)$$

pelo limite que aparece em (2).

Seja $\Delta_n = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$. Sejam L_n e R_n as correspondentes somas de Riemann com os pontos de avaliação $\tau_i = t_{i-1}$ e $\tau_i = t_i$, respectivamente, a saber,

$$L_n \equiv \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}) (f(t_i) - f(t_{i-1})),$$

$$R_n \equiv \sum_{i=1}^n f(t_i) (f(t_i) - f(t_{i-1})).$$

Observamos que uma condição necessária para a existência do limite em (2) e que $\lim L_n = \lim R_n$, quando $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$. Vamos investigar o que acontece neste caso.

Primeiro, observe que a diferença e a soma de L_n e R_n satisfazem as identidades mostradas abaixo

$$R_n - L_n = \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2, \quad (4)$$

$$R_n + L_n = \sum_{i=1}^n (f(t_i)^2 - f(t_{i-1})^2) = f(b)^2 - f(a)^2.$$

Somando ambos os lados das identidades acima e também subtraindo a segunda identidade da primeira obtemos as seguintes expressões para R_n e L_n , respectivamente

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{2} \left(f(b)^2 - f(a)^2 + \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 \right), \\ L_n &= \frac{1}{2} \left(f(b)^2 - f(a)^2 - \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Uma observação. O limite do lado direito de (4), quando $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$, caso exista, coincide com a chamada *variação quadrática* da função f em $[a, b]$.

Segue das expressões acima que

$$\lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} R_n \neq \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} L_n$$

se, e somente se, a variação quadrática da função f é não nula.

Uma característica muito importante do argumento acima é que ele é de natureza completamente algébrica ou combinatória. Para a obtenção das expressões para R_n e L_n não é preciso apelar para nenhuma hipótese de regularidade da função f .

Vamos considerar dois exemplos simples.

Exemplo 2. Seja f uma função $C^1([a, b], \mathbb{R})$, isto é, $f'(t)$ é uma função contínua em $[a, b]$. Considere novamente o problema de definir $\int_a^b f(t) df(t)$ pelo limite (2). Neste caso observe

que segue da identidade (4) e do Teorema do Valor Médio que

$$\begin{aligned} |R_n - L_n| &= \sum_{i=1}^n \left(f'(t_i^*)(t_i - t_{i-1}) \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \|f'\|_\infty^2 (t_i - t_{i-1})^2 \\ &\leq \|f'\|_\infty^2 \|\Delta_n\| \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = \|f'\|_\infty^2 \|\Delta_n\| (b - a) \\ &\rightarrow 0, \quad \text{quando } \|\Delta_n\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

onde $t_{i-1} < t_i^* < t_i$ e $\|\cdot\|_\infty$ é a norma do supremo. Assim $\lim L_n = \lim R_n$ quando $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$. Além do mais, podemos usar a identidade (5) para calcular explicitamente

$$\lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} R_n = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} L_n = \frac{1}{2} (f(b)^2 - f(a)^2). \quad (6)$$

Por outro lado, no caso de funções de classe $C^1([a, b], \mathbb{R})$, podemos simplesmente definir a integral $\int_a^b f(t) df(t)$ por

$$\int_a^b f(t) df(t) = \int_a^b f(t) f'(t) dt$$

e obter novamente, mas agora pelo Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\int_a^b f(t) df(t) = \int_a^b f(t) f'(t) dt = \frac{1}{2} (f(b)^2 - f(a)^2).$$

Exemplo 3. Neste exemplo vamos estudar o mesmo problema do exemplo anterior, mas para uma $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ muito menos regular que as funções do espaço $C^1([a, b], \mathbb{R})$. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função satisfazendo a seguinte condição. Existem constantes positivas $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$ tais que

$$K_1 |t - s|^{1/2} \leq |f(t) - f(s)| \leq K_2 |t - s|^{1/2}, \quad (7)$$

para todos $s, t \in [a, b]$ satisfazendo $|s - t| < \delta$.

Observe que segue da identidade (4) e da condição (7) que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ temos $\|\Delta_n\| < \delta$ e que valem as seguintes desigualdades

$$K_1^2 (b - a) \leq |R_n - L_n| \leq K_2^2 (b - a). \quad (8)$$

Logo as somas de Riemann–Stieltjes não podem convergir para um único limite independente da escolha de τ_i , e portanto para qualquer função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo (7) a integral $\int_a^b f(t) df(t)$ não existe, no sentido de Riemann–Stieltjes.

Observe que embora a função deste exemplo seja irregular em um certo sentido ela é uma função uniformemente contínua. Na verdade, mais ainda ela é uma função Hölder contínua.

Os exemplos acima revelam que o problema de definir a integral $\int_a^b f(t) dg(t)$, mesmo quando $f = g$, é um problema altamente não-trivial. De fato, não há uma resposta simples e definitiva para a **Pergunta 1**.

A conclusão impactante obtida no exemplo **Exemplo 3** nos leva naturalmente a fazer uma outra pergunta.

Pergunta 4. Existem funções contínuas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a condição

$$K_1 |t - s|^{1/2} \leq |f(t) - f(s)| \leq K_2 |t - s|^{1/2}$$

para todos $s, t \in [a, b]$ tais que $|t - s| < \delta$?

Vamos abordar agora o problema de definir a integral de Riemann-Stieltjes de uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, com respeito a uma função g , pela expressão

$$\int_a^b f(t) dg(t) = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\tau_i) (g(t_i) - g(t_{i-1})), \quad (9)$$

onde o limite é tomado como no início da seção, de um ponto de vista um pouco mais voltado para Análise Funcional. Vamos mostrar que se o limite acima existe para toda função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, então a função g é necessariamente uma função de variação limitada. Mais precisamente, seja $\mathcal{P}([a, b])$ a coleção de todas as partições do intervalo $[a, b]$ satisfazendo a convenção mencionada no início desta seção, isto é, se $\Delta \in \mathcal{P}([a, b])$ então $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, para algum $n \in \mathbb{N}$ e $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Dizemos que uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de variação limitada em $[a, b]$ se a seguinte condição é satisfeita

$$\sup_{\Delta \in \mathcal{P}([a, b])} \text{Var}_1(f, \Delta) < +\infty,$$

onde para cada partição Δ da forma $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$

$$\text{Var}_1(f, \Delta) \equiv \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|.$$

Para provar a afirmação feita acima, vamos precisar do Teorema de Banach-Steinhaus cuja prova pode ser encontrada em diversos livros introdutórios de Análise Funcional, como, por exemplo, na referência [3].

Para o enunciado do teorema vamos precisar lembrar da noção de norma de operador. Sejam $(B, \|\cdot\|_B)$ um espaço de Banach, $(N, \|\cdot\|_N)$ um espaço normado. Dizemos que um operador linear $T : B \rightarrow N$ é contínuo (ou limitado), se existe alguma constante $K \geq 0$ tal que $\|T(v)\|_N \leq K\|v\|_B$, para todo $v \in B$.

Se $T : B \rightarrow N$ é um operador linear contínuo, definimos a norma do operador T , notação $\|T\|_{\text{op}}$, pela seguinte expressão

$$\|T\|_{\text{op}} \equiv \sup_{\substack{v \in B \\ 0 < \|v\|_B \leq 1}} \frac{\|T(v)\|_N}{\|v\|_B}.$$

Observe que segue diretamente das definições que $T : B \rightarrow N$ é um operador linear contínuo, se e somente se, $\|T\|_{\text{op}} < +\infty$.

Teorema 5 (Banach-Steinhaus). Sejam $(B, \|\cdot\|_B)$ um espaço de Banach, $(N, \|\cdot\|_N)$ um espaço normado. Seja Γ um conjunto de índices arbitrário e $\{T_\alpha : B \rightarrow N\}_{\alpha \in \Gamma}$ uma família de operadores contínuos tais que, para cada $v \in B$ fixado, a família de vetores $\{T_\alpha(v) : \alpha \in \Gamma\}$ define um conjunto limitado em N . Então a família de números reais $\{\|T_\alpha\|_{\text{op}} : \alpha \in \Gamma\}$ é limitada, equivalentemente

$$\sup_{\alpha \in \Gamma} \|T_\alpha\|_{\text{op}} < +\infty.$$

Lema 6. Sejam $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e para cada $n \in \mathbb{N}$ considere a partição do intervalo $[0, 1]$ por racionais diádicos positivos dada por $\Delta_n \equiv \{j/2^n : j = 0, \dots, 2^n\}$. Então

$$\sup_{\Delta \in \mathcal{P}([0,1])} \text{Var}_1(f, \Delta) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \text{Var}_1(f, \Delta_n).$$

Prova. Já que a família $\{\Delta_n : n \in \mathbb{N}\}$ está contida na família $\mathcal{P}([0, 1])$, temos imediatamente da definição de supremo que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \text{Var}_1(f, \Delta_n) \leq \sup_{\Delta \in \mathcal{P}([0,1])} \text{Var}_1(f, \Delta).$$

Reciprocamente, seja $\Delta \equiv \{t_0, \dots, t_k\} \in \mathcal{P}([0, 1])$ uma partição arbitrária e $\varepsilon > 0$. Como estamos assumindo que $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $[0, 1]$ é compacto, podemos afirmar que a função f é uniformemente contínua em $[0, 1]$. Desta forma podemos garantir que existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{k}, \quad \forall s, t \in [0, 1] \text{ satisfazendo } |s - t| < \delta.$$

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\frac{1}{2^{n_0}} = \|\Delta_{n_0}\| < \min \left\{ \delta, \frac{1}{2} \min\{t_j - t_{j-1} : j = 1, \dots, k\} \right\}.$$

Observe que podemos particionar o intervalo fechado $[0, 1]$ da seguinte maneira

$$\left[0, \frac{1}{2^{n_0}}\right) \cup \left[\frac{1}{2^{n_0}}, \frac{2}{2^{n_0}}\right) \cup \dots \cup \left[\frac{j-1}{2^{n_0}}, \frac{j}{2^{n_0}}\right) \cup \dots \cup \left[\frac{2^{n_0}-1}{2^{n_0}}, \frac{2^{n_0}}{2^{n_0}}\right] = [0, 1].$$

Para facilitar a notação denotamos por

$$D_j = \begin{cases} \left[\frac{j}{2^{n_0}}, \frac{j+1}{2^{n_0}}\right), & 0 \leq j < 2^{n_0} - 1; \\ \left[\frac{2^{n_0}-1}{2^{n_0}}, 1\right], & j = 2^{n_0} - 1, \end{cases}$$

Como a coleção de intervalos D_j 's define uma partição de $[0, 1]$, podemos afirmar que para cada índice $r \in \{0, \dots, k\}$ existe um único índice $j(r) \in \{0, \dots, 2^{n_0} - 1\}$ tal que $t_r \in D_{j(r)}$. Note que

$$\begin{aligned} j(r) &= \min \{j \in \{0, \dots, 2^{n_0} - 1\} : t_r \in D_j\} \\ &= \min \left\{ j \in \{0, \dots, 2^{n_0} - 1\} : \frac{j}{2^{n_0}} \leq t_r \leq \frac{j+1}{2^{n_0}} \right\} \\ &= \min \left\{ 2^{n_0} - 1, \lfloor 2^{n_0} t_r \rfloor \right\}. \end{aligned}$$

Além do mais, como o diâmetro do conjunto D_j é dado por $\text{Diam}(D_j) = 2^{-n_0}$, segue da escolha de n_0 que não é possível ter mais do que um elemento da partição Δ em um único intervalo da forma D_j .

Fixe $r \in \{0, \dots, k-1\}$ e considere os pontos $t_r, t_{r+1} \in \Delta$. Então sabemos que existem $j(r) < j(r+1)$ tais que

$$\{t_r, t_{r+1}\} \subseteq \bigcup_{j=j(r)}^{j(r+1)} D_j.$$

Além do mais, segue da construção de $j(r)$ e $j(r+1)$ que os pontos t_r e t_{r+1} são os únicos pontos da partição Δ que pertencem a união acima. Note que por um argumento telescópico temos

$$\begin{aligned} f(t_{r+1}) - f(t_r) &= f(t_{r+1}) - f\left(\frac{j(r)}{2^{n_0}}\right) + f\left(\frac{j(r)}{2^{n_0}}\right) - f(t_r) \\ &= f(t_{r+1}) - f\left(\frac{j(r)+1}{2^{n_0}}\right) + f\left(\frac{j(r)+1}{2^{n_0}}\right) - f\left(\frac{j(r)}{2^{n_0}}\right) + f\left(\frac{j(r)}{2^{n_0}}\right) - f(t_r) \\ &= f(t_{r+1}) - f\left(\frac{j(r+1)}{2^{n_0}}\right) + \sum_{m=j(r)}^{j(r+1)-1} f\left(\frac{m+1}{2^{n_0}}\right) - f\left(\frac{m}{2^{n_0}}\right) + f\left(\frac{j(r)}{2^{n_0}}\right) - f(t_r). \end{aligned}$$

Usando a identidade acima, a desigualdade triangular, a continuidade uniforme de f e a escolha de n_0 , temos para cada $r \in \{0, \dots, k-1\}$ a seguinte cota superior

$$|f(t_{r+1}) - f(t_r)| \leq 2\frac{\varepsilon}{k} + \sum_{m=j(r)}^{j(r+1)-1} \left| f\left(\frac{m+1}{2^{n_0}}\right) - f\left(\frac{m}{2^{n_0}}\right) \right|.$$

Observe que o somatório que aparece acima correspondente a contribuição da variação de f ao longo dos pontos da partição Δ_{n_0} que estão entre t_r e t_{r+1} . Somando a desigualdade acima sobre r ficamos com

$$\sum_{r=0}^{k-1} |f(t_{r+1}) - f(t_r)| \leq 2\varepsilon + \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{m=j(r)}^{j(r+1)-1} \left| f\left(\frac{m+1}{2^{n_0}}\right) - f\left(\frac{m}{2^{n_0}}\right) \right|.$$

Portanto segue das observações acima que

$$\text{Var}_1(f, \Delta) \leq 2\varepsilon + \text{Var}_1(f, \Delta_{n_0}).$$

Observando que $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e consequentemente que a aplicação $n \mapsto \text{Var}_1(f, \Delta_n)$ é monótona não-decrescente segue da desigualdade acima que

$$\text{Var}_1(f, \Delta) \leq 2\varepsilon + \sup_{n \in \mathbb{N}} \text{Var}_1(f, \Delta_n).$$

Como a desigualdade acima é válida para uma partição arbitrária $\Delta \in \mathcal{P}([0, 1])$ e para qualquer escolha de $\varepsilon > 0$, então podemos concluir que

$$\sup_{\Delta \in \mathcal{P}([0, 1])} \text{Var}_1(f, \Delta) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \text{Var}_1(f, \Delta_n).$$

o que finaliza a prova do lema. ■

Teorema 7. Seja $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponha que para toda $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ existe a integral de Riemann-Stieltjes de f , com respeito a g , ou seja, existe o limite

$$\int_0^1 f(t) dg(t) = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\tau_i) (g(t_i) - g(t_{i-1}))$$

onde $\Delta_n = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ é uma partição genérica do intervalo fechado $[0, 1]$ com a convenção $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$, $\|\Delta_n\| = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$, e τ_i é um ponto escolhido arbitrariamente no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Então g tem variação total finita, isto é,

$$\sup_{\Delta \in \mathcal{P}([0,1])} \text{Var}_1(g, \Delta) < +\infty.$$

Prova. A ideia é aplicar o Teorema de Banach-Steinhaus. A seguir mostramos como isto pode ser feito.

Primeiro, o espaço de Banach $(B, \|\cdot\|_B)$ que aparece no enunciado do Teorema de Banach-Steinhaus será o espaço $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ das funções reais contínuas definidas sobre o intervalo $[0, 1]$ munido da norma do supremo. Já o espaço normado $(N, \|\cdot\|_N)$ será tomado como sendo a reta real munida da norma induzida pelo valor absoluto, isto é, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

O conjunto de índices Γ e a família de operadores que aparecem no enunciado do teorema serão escolhidos da seguinte maneira. O conjunto de índices Γ será o conjunto dos números naturais isto é, $\Gamma = \mathbb{N}$.

Próximo passo será definir a família de operadores. Para facilitar a compreensão dos argumentos, no que segue, para cada $n \in \mathbb{N}$, usamos a notação Δ_n para designar a partição do intervalo $[0, 1]$, por racionais diádicos positivos, dada da seguinte forma

$$\Delta_n = \left\{ \frac{j}{2^n} : j = 0, \dots, 2^n \right\}.$$

Vamos prosseguir na construção da família de operadores. Considere a função contínua $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fixada no enunciado deste teorema (a função que desempenha o papel do integrador na integral de Riemann-Stieltjes $\int_0^1 f(t) dg(t)$) e para cada $n \in \mathbb{N}$ defina o operador linear $T_{g,n} \equiv T_n : C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte maneira

$$T_n(f) \equiv \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{k}{2^n}\right) \left(g\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - g\left(\frac{k}{2^n}\right) \right), \quad \forall f \in C([0, 1], \mathbb{R}).$$

Afirmamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $\|T_n\|_{\text{op}} = \text{Var}_1(g, \Delta_n)$. De fato, dada uma função $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ satisfazendo $0 < \|f\|_\infty \leq 1$ temos

$$\begin{aligned} |T_n(f)| &\leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \left| f\left(\frac{k}{2^n}\right) \right| \cdot \left| g\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - g\left(\frac{k}{2^n}\right) \right| \\ &\leq \|f\|_\infty \sum_{k=0}^{2^n-1} \left| g\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - g\left(\frac{k}{2^n}\right) \right| \\ &= \|f\|_\infty \text{Var}_1(g, \Delta_n). \end{aligned}$$

O que mostra que $\|T_n\|_{\text{op}} \leq \text{Var}_1(g, \Delta_n)$. Próximo passo é mostrar que vale a desigualdade reversa. Para verificar isto, basta observar que para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado podemos afirmar que

existe alguma função contínua $h_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $-1 \leq h_n(x) \leq 1$ e que sua imagem nos pontos da partição Δ_n satisfaz

$$h_n\left(\frac{k}{2^n}\right) = \text{sign}\left(g\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - g\left(\frac{k}{2^n}\right)\right).$$

Na verdade, como o conjunto de pontos diádicos de Δ_n é finito, podemos tomar $h_n \in C([0, 1], \mathbb{R})$ como sendo uma função linear por partes em cada subintervalo diádico.

Vamos verificar que esta função satura a cota obtida acima para $\|T_n\|_{\text{op}}$. De fato, já que para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que $|x| = x \cdot \text{sign}(x)$ e $\|h_n\|_{\infty} = 1$, então temos

$$\begin{aligned} |T_n(h_n)| &= \left| \sum_{k=0}^{2^n-1} h_n\left(\frac{k}{2^n}\right) \cdot \left(g\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - g\left(\frac{k}{2^n}\right)\right) \right| \\ &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \left| g\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - g\left(\frac{k}{2^n}\right) \right| \\ &= \|h_n\|_{\infty} \text{Var}_1(g, \Delta_n). \end{aligned}$$

O que conclui a prova de que

$$\|T_n\|_{\text{op}} = \text{Var}_1(g, \Delta_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

Próximo passo é mostrar a validade da última hipótese necessária para aplicar o Teorema de Banach-Steinhaus. Para isto começamos observando que a hipótese do teorema garante que se $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua arbitrária, então existe o limite das somas de Riemann-Stieltjes de f , com respeito a g , ao longo de qualquer sequência de partições em $\mathcal{P}([0, 1])$ cuja norma da partição tende a zero, ou seja, existe o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{k}{2^n}\right) \left(g\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - g\left(\frac{k}{2^n}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(f).$$

Em particular, segue da igualdade acima que a família de números reais $\{T_n(f) : n \in \mathbb{N}\}$ é uma família limitada, para cada $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ fixada. Desta forma todas as hipóteses do Teorema de Banach-Steinhaus são satisfeitas. Portanto segue da identidade (10) e do Teorema de Banach-Steinhaus que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \text{Var}_1(g, \Delta_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\|_{\text{op}} < +\infty.$$

Como estamos assumindo que $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua podemos aplicar o **Lema 6** e a desigualdade acima para concluir finalmente que

$$\sup_{\Delta \in \mathcal{P}([0, 1])} \text{Var}_1(g, \Delta) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \text{Var}_1(g, \Delta_n) < +\infty,$$

ou seja, que g possui variação total finita. ■

Nosso próximo passo será estudar algumas propriedades da chamada variação quadrática de uma função. A variação quadrática, intuitivamente, mede o acúmulo de oscilações de segunda ordem de uma trajetória e é o mecanismo que origina o termo “corretivo” na Fórmula de Itô. Diferentemente da variação total (que “soma” módulos), ela soma quadrados dos incrementos, capturando oscilações rápidas de pequena amplitude que passariam despercebidas pela variação total.

Dois fatos orientam o que segue: (i) trajetórias suaves (por exemplo, de classe C^1) têm variação quadrática nula; (ii) trajetórias do Movimento Browniano têm variação quadrática positiva e finita (igual ao comprimento do intervalo), fato de grande importância no Cálculo Estocástico. Um cuidado técnico importante é que, em geral, a variação quadrática pode depender da família de partições usada; por isso, em geral, vamos trabalhar com aquelas cujas normas tendem a zero e são encaixadas (tipicamente diádicas). Também investigaremos quando o limite é bem definido e independente da escolha da sequência de partições.

Primeiro vamos definir o conceito de variação quadrática no contexto determinístico. Dada uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e uma partição $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}([a, b])$, definimos a variação quadrática de f ao longo da partição Δ como

$$\text{Var}_2(f, \Delta) \equiv \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(t_{j-1})|^2.$$

Em analogia ao caso de variação total, seria natural definir a variação quadrática de f em $[a, b]$ como o supremo sobre todas as partições $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, com $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Contudo, por causa do expoente 2 em $\text{Var}_2(f, \Delta)$, esse supremo irrestrito é em geral pouco útil para o desenvolvimento do Cálculo de Itô. De fato, se considerarmos um supremo sobre uma classe tão ampla de partições, várias funções de interesse ficariam fora da teoria. Para evitar esse problema, definiremos a variação quadrática por meio de limites ao longo de partições cuja norma tende a zero e são encaixadas.

Definição 8 (Variação quadrática). Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f possui variação quadrática em $[a, b]$ se existe o limite

$$\lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \text{Var}_2(f, \Delta_n),$$

onde $\Delta_n \in \mathcal{P}([a, b])$, $\Delta_m \subseteq \Delta_n$ para $m \leq n$, e o valor do limite independe da escolha da sequência de partições.

Para finalizar esta seção, vamos mostrar que toda função de classe C^1 em $[a, b]$ possui variação quadrática nula. Em seguida, mostraremos que se uma função f possui variação quadrática positiva, então a variação total de f em $[a, b]$ é necessariamente infinita.

Proposição 9. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1([a, b], \mathbb{R})$. Então

$$\lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \text{Var}_2(f, \Delta_n) = 0.$$

Prova. Seja $\{\Delta_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma família genérica de partições em $\mathcal{P}([a, b])$ tal que $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$. Já que $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, então podemos aplicar o Teorema do Valor Médio para obter

$$\begin{aligned} \text{Var}_2(f, \Delta_n) &= \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(t_{j-1})|^2 \\ &= \sum_{j=1}^n |f'(\tau_j)|^2 |t_j - t_{j-1}|^2 \\ &\leq \|\Delta_n\| \sum_{j=1}^n |f'(\tau_j)|^2 (t_j - t_{j-1}) \\ &= \|\Delta_n\| \cdot \|f'\|_\infty^2 \cdot \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) = \|\Delta_n\| \cdot \|f'\|_\infty^2 \cdot (b - a). \end{aligned}$$

Tomando o limite na desigualdade acima, quando $n \rightarrow \infty$, encerramos a prova. ■

Proposição 10. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua possuindo variação quadrática positiva, isto é, o seguinte limite existe e satisfaz

$$0 < \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \text{Var}_2(f, \Delta_n). \quad (11)$$

Então f não pode possuir variação total finita, ou seja,

$$\sup_{\Delta \in \mathcal{P}([0,1])} \text{Var}_1(f, \Delta) = +\infty.$$

Prova. Como estamos assumindo que o limite em (11) existe e é independente da escolha da partição, então este limite também é positivo se consideramos a família de partições $\{\Delta_n : n \in \mathbb{N}\}$ do intervalo fechado $[0, 1]$ definida por racionais diádicos positivos da forma $\Delta_n = \{j/2^n : j = 0, \dots, 2^n\}$.

Como $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua temos que $\omega_f(\delta) \rightarrow 0$, quando $\delta \downarrow 0$, onde $\omega_f(\delta) \equiv \sup\{|f(t) - f(s)| : t, s \in [0, 1] \text{ e } |t - s| < \delta\}$. Portanto

$$\begin{aligned} \text{Var}_2(f, \Delta_n) &= \sum_{j=1}^{2^n} |f(t_j) - f(t_{j-1})|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{2^n} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \cdot \omega_f\left(\frac{1}{2^n}\right) \\ &= \omega_f\left(\frac{1}{2^n}\right) \text{Var}_1(f, \Delta_n) \\ &\leq \omega_f\left(\frac{1}{2^n}\right) \cdot \sup_{n \in \mathbb{N}} \text{Var}_1(f, \Delta_n). \end{aligned}$$

Como estamos assumindo que $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então podemos aplicar o **Lema 6** para garantir que o supremo que aparece no lado direito da expressão acima coincide com

a variação total de f , no intervalo $[0, 1]$. Desta forma segue da hipótese da proposição e da desigualdade anterior que as seguintes desigualdades devem ser válidas

$$0 < \lim_{n \in \mathbb{N}} \text{Var}_2(f, \Delta_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\omega_f \left(\frac{1}{2^n} \right) \cdot \sup_{\Delta \in \mathcal{P}([0,1])} \text{Var}_1(f, \Delta_n) \right].$$

Como $\omega_f(2^{-n}) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, temos obrigatoriamente que a variação total de f não pode ser finita, caso contrário chegaríamos a um absurdo. ■

3. O Movimento Browniano e a Variação Quadrática

Esta seção é dedicada ao estudo da convergência da variação quadrática das trajetórias típicas do Movimento Browniano ao longo de diversas famílias de partições. Definimos a variação quadrática do Movimento Browniano, ao longo de uma partição $\Delta \equiv \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, do intervalo $[0, T]$, como sendo a variável aleatória

$$\langle \Delta \rangle_B^T \equiv \text{Var}_2(B_{(\cdot)}, \Delta) \equiv \sum_{i=1}^n |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2.$$

Vamos apresentar três resultados a respeito de convergência da variação quadrática ao longo de uma sequência de partições. O primeiro garante a convergência no sentido L^2 , com limite tomado ao longo de qualquer sequência de partições cuja norma tende a zero. Em seguida, usando o Lema de Borel-Cantelli vamos mostrar que a variação quadrática converge quase certamente, se a norma da partição tende a zero suficientemente rápido. E por último vamos mostrar a convergência quase certa, quando a norma da partição tende a zero, sem impor nenhuma condição de taxa de convergência à norma da partição, porém exigindo que o limite seja tomado ao longo de sequências de partições encaixadas.

Por último, vale pena observar que se abrimos mão do controle da taxa de convergência no caso em que a sequência de partições não é encaixada então a convergência quase certa, não pode mais ser garantida como é mostrado na referência [6].

Definição 11 (Movimento Browniano). Um processo estocástico $\{B_t : t \geq 0\}$ definido em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é chamado de *Movimento Browniano* se:

- (a) $B_0 = 0$ quase certamente;
- (b) para $0 \leq s < t$, o incremento $B_t - B_s$ é Gaussiano com média 0 e variância $t - s$;
- (c) para $0 \leq t_0 < \dots < t_n$, os incrementos $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ são independentes;
- (d) as trajetórias $t \mapsto B_t(\omega)$ são contínuas em t , quase certamente.

Teorema 12 (Convergência da Variação Quadrática em L^2). Sejam $\{B_t : t \geq 0\}$ um movimento Browniano definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $T > 0$ fixado e $\{\Delta_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma família de partições do intervalo $[0, T]$ satisfazendo $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a variável aleatória

$$\langle \Delta_n \rangle_B^T \equiv \text{Var}_2(B_{(\cdot)}, \Delta_n),$$

Então

$$\langle \Delta_n \rangle_B^T \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\Omega)} T.$$

Prova. Para facilitar a notação, para cada $n \in \mathbb{N}$, vamos denotar por $k(n) \equiv (\#\Delta_n - 1)$. Note que segue da definição de partição e de um argumento padrão de somas telescópicas que vale a seguinte igualdade

$$\langle \Delta_n \rangle_B^T - T = \sum_{i=1}^{k(n)} \left[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1}) \right] \equiv \sum_{i=1}^{k(n)} X_i,$$

onde X_i é a variável aleatória que aparece na expressão entre colchetes. Das propriedades elementares do Movimento Browniano podemos concluir que as variáveis aleatórias X_i 's são independentes e com média zero. Logo

$$\mathbb{E} \left[(\langle \Delta_n \rangle_B^T - T)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^{k(n)} X_i \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^{k(n)} \mathbb{E}[X_i^2].$$

Observe que segue das propriedades elementares de v.a. normais que

$$\frac{(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2}{(t_i - t_{i-1})} \stackrel{d}{=} Z^2,$$

onde Z é uma variável aleatória normal padrão, $N(0, 1)$. Logo

$$\mathbb{E} \left[(\langle \Delta_n \rangle_B^T - T)^2 \right] = \mathbb{E}[(Z^2 - 1)^2] \sum_{i=1}^{k(n)} (t_i - t_{i-1})^2 \leq \mathbb{E}[(Z^2 - 1)^2] \cdot \|\Delta_n\| \cdot T. \quad (12)$$

Já que $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, segue da desigualdade acima que

$$\langle \Delta_n \rangle_B^T \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2(\Omega)} T.$$

■

Teorema 13 (Convergência da Variação Quadrática Quase Certamente - Versão 1). Sejam $\{B_t : t \geq 0\}$ um movimento Browniano definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $T > 0$ fixado e $\{\Delta_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma família de partições do intervalo $[0, T]$ satisfazendo a seguinte condição: para algum $\alpha > 1$ fixado, $\|\Delta_n\| \leq n^{-\alpha}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então

$$\langle \Delta_n \rangle_B^T \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{q.c.}} T.$$

Prova. A prova utiliza estimativas de momentos e o Lema de Borel-Cantelli. Primeiro, observamos que para uma partição arbitrária, do intervalo fechado $[0, T]$, da forma $\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}([0, T])$, temos

$$\mathbb{E}[\langle \Delta \rangle_B^T] = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^k (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \right] = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2] = \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) = T,$$

onde usamos o fato de que $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \sim N(0, t_i - t_{i-1})$. Em particular, $\mathbb{E}[\langle \Delta_n \rangle_B^T] = T$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além do mais, como visto em (12) temos a seguinte estimativa

$$\text{Var}(\langle \Delta_n \rangle_B^T) = \mathbb{E}[(\langle \Delta_n \rangle_B^T - T)^2] \leq \mathbb{E}[(Z^2 - 1)^2] \cdot \|\Delta_n\| \cdot T, \quad \text{onde } Z \stackrel{d}{=} N(0, 1).$$

Portanto dado $\epsilon > 0$, temos da Desigualdade de Chebyshev que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\langle \Delta_n \rangle_B^T - T\right| > \epsilon\right) &\leq \frac{\text{Var}(\langle \Delta_n \rangle_B^T)}{\epsilon^2} \leq \frac{\mathbb{E}[(Z^2 - 1)^2] \cdot \|\Delta_n\| \cdot T}{\epsilon^2} \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[(Z^2 - 1)^2] \cdot T}{\epsilon^2} \cdot \frac{1}{n^\alpha}.\end{aligned}$$

Como $\alpha > 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ converge. Logo, segue da desigualdade acima que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left|\langle \Delta_n \rangle_B^T - T\right| > \epsilon\right) < \infty.$$

Pelo lema de Borel-Cantelli, temos:

$$\mathbb{P}(|\langle \Delta_n \rangle_B^T - T| > \epsilon, \text{ para infinitos valores de } n) = 0.$$

Isto significa que, quase certamente, existe $N_\epsilon = N_\epsilon(\omega)$ tal que

$$|\langle \Delta_n \rangle_B^T - T| \leq \epsilon$$

para todo $n \geq N_\epsilon$.

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, considerando a sequência $\epsilon_k = 1/k$ para $k \in \mathbb{N}$, obtemos que, quase certamente, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe N_k tal que $|\langle \Delta_n \rangle_B^T - T| \leq 1/k$ para todo $n \geq N_k$. Portanto,

$$\langle \Delta_n \rangle_B^T \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{q.c.}} T.$$

■

3.1. Existência da Variação Quadrática para Partições Encaixadas

Nesta subseção vamos apresentar alguns resultados necessários para a prova de que a variação quadrática do Movimento Browniano no intervalo $[0, T]$ também converge, ao longo de sequências de partições encaixadas cuja norma tende a zero, quase certamente para a constante T . A prova deste resultado é muito mais complexa que a do [Teorema 13](#) e seu argumento envolve o uso do espaço de Wiener e também alguns dos teoremas de convergência de martingais.

Espaço de Wiener. O Teorema da Existência de Kolmogorov pode ser usado para construir um Movimento Browniano. A ideia é construir uma modificação apropriada do processo coordenado, no espaço de probabilidade $(\mathbb{R}^{[0, +\infty)}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, veja [2] para maiores detalhes. Além do mais, existe um subconjunto $\Omega_c \subseteq \mathbb{R}^{[0, +\infty)}, \mathcal{F}$ -mensurável e de probabilidade total, isto é, $\mathbb{P}(\Omega_c) = 1$ tal que podemos associar de maneira única à cada $\omega = \{\omega_t\}_{t \in [0, +\infty)} \in \Omega_c$ uma função contínua, que denotaremos por $T\omega : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $(T\omega)(t) = \omega_t$, para todo $t \in D$, onde D é o conjunto dos números racionais diádicos positivos. Aos elementos de $\mathbb{R}^{[0, +\infty)} \setminus \Omega_c$ associamos a função identicamente nula. Ou seja T define uma aplicação saindo de $\mathbb{R}^{[0, +\infty)}$ e tomando valores em $C([0, +\infty), \mathbb{R})$, isto é,

$$T : \mathbb{R}^{[0, +\infty)} \rightarrow C([0, +\infty), \mathbb{R})$$

Considere o espaço métrico $(C([0, +\infty), \mathbb{R}), d)$, onde a métrica d é definida da seguinte forma:

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sup_{0 \leq t \leq n} \left\{ \min\{1, |f(x) - g(x)|\} \right\}.$$

Seja τ a topologia induzida pela métrica d em $C([0, +\infty), \mathbb{R})$ e $\mathcal{B}(C([0, +\infty), \mathbb{R})) \equiv \sigma(\tau)$ a σ -álgebra de Borel de $(C([0, +\infty), \mathbb{R}), d)$. Então a aplicação $T : \mathbb{R}^{[0, +\infty)} \rightarrow C([0, +\infty), \mathbb{R})$ é mensurável com respeito as σ -álgebras produto $\mathcal{F}$ e $\mathcal{B}(\tau)$.

Observe que as trajetória amostrais do Movimento Browniano são definidas pelo mapa T . Mais precisamente, $B_t(\omega) = (T\omega)(t)$, para todo $t \in [0, +\infty)$ e $\omega \in \mathbb{R}^{[0, +\infty)}$. A medida de Wiener é simplesmente o “pushforward” de $\mathbb{P}$ por T , isto é, $\mathcal{W} \equiv T^*\mathbb{P}$, onde para cada $B \in \mathcal{B}(\tau)$ definimos $\mathcal{W}(B) \equiv T^*\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(T^{-1}(B))$. O espaço de Wiener é então o espaço de probabilidade

$$(C([0, +\infty), \mathbb{R}), \mathcal{B}(\tau), \mathcal{W}).$$

Teorema 14 (Teorema de Lévy - Convergência Quase Certa da Variação Quadrática). Sejam $\{B_t : t \geq 0\}$ um movimento Browniano definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $T > 0$ fixado e $\{\Delta_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma família de partições encaixadas, isto é, $\Delta_m \subseteq \Delta_n$, para todo par $m, n \in \mathbb{N}$, com $m \leq n$ e satisfazendo $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Então

$$\langle \Delta_n \rangle_B^T \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{q.c.}} T.$$

Prova. Para facilitar a argumentação vamos considerar o Movimento Browniano como o processo coordenado no espaço de Wiener, isto é, no espaço de probabilidade do enunciado vamos tomar $\Omega = C([0, \infty))$, a σ -álgebra $\mathcal{F}$ como sendo a de Borel gerada pela topologia da convergência uniforme nas partes compactas e a medida de probabilidade $\mathbb{P}$ como sendo a medida de Wiener. Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado seja $\Delta_n = \{t_0, t_1, \dots, t_k\}$, onde $k \equiv k(n)$ é o número de seus sub-intervalos de $[0, T]$ determinados por esta partição. Para cada vetor $\varepsilon \equiv (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{-1, 1\}^k$, definimos a aplicação $\theta_\varepsilon : \Omega \rightarrow \Omega$ que “reflete” a trajetória do Movimento Browniano ao longo de cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ da seguinte forma:

- $\theta_\varepsilon \omega(0) = 0$;
- $\theta_\varepsilon \omega(s) = \theta_\varepsilon \omega(t_{i-1}) + \varepsilon_i(\omega(s) - \omega(t_{i-1}))$, se $s \in [t_{i-1}, t_i]$, para $i = 1, \dots, k$;
- $\theta_\varepsilon \omega(s) = \theta_\varepsilon \omega(T) + (\omega(s) - \omega(T))$, se $s \geq T$.

Um fato fundamental que vamos precisar agora é que a medida de Wiener $\mathbb{P}$ é invariante pela ação de cada aplicação θ_ε . Isto é uma consequência direta da simetria da distribuição Gaussiana. Para cada incremento $W_i = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$, temos $W_i \stackrel{d}{=} -W_i$. Como os incrementos são independentes, a lei conjunta do vetor de incrementos $(\varepsilon_1 W_1, \dots, \varepsilon_k W_k)$ é idêntica à do vetor original, garantindo a invariância.

Seja $\mathcal{B}_n$ a σ -álgebra dos eventos $A \in \mathcal{F}$ que são invariantes por todas as $2^{k(n)}$ transformações θ_ε , i.e., $A = (\theta_\varepsilon)^{-1}(A)$ para todo $\varepsilon \in \{-1, 1\}^k$. Observe que para qualquer v.a. $Z \in L^1(\Omega)$, a esperança condicional com respeito a sub- σ -álgebra $\mathcal{B}_n$ é dada pela média sobre estas simetrias:

$$\mathbb{E}[Z | \mathcal{B}_n] = \frac{1}{2^k} \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^k} Z \circ \theta_\varepsilon. \quad (13)$$

Por questão de simplicidade vamos usar a notação $S_n \equiv \langle \Delta_n \rangle_B^T = \sum_{i=1}^k (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$. A transformação θ_ε atua sobre o i -ésimo incremento como

$$B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \mapsto \varepsilon_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

Ao calcular $S_n \circ \theta_\varepsilon$, temos

$$S_n \circ \theta_\varepsilon = \sum_{i=1}^k \left(\varepsilon_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \right)^2 = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i^2 (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 = S_n,$$

pois $\varepsilon_i^2 = 1$. Como S_n é invariante por todas as θ_ε , ela é $\mathcal{B}_n$ -mensurável.

Agora, considere $B_T^2 = \left(\sum_{i=1}^k (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \right)^2$. Expandido o lado direito desta igualdade ficamos com

$$\begin{aligned} B_T^2 &= \sum_{i=1}^k (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 + \sum_{i \neq j} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \\ &= S_n + C_n, \end{aligned}$$

onde C_n é a soma dos termos cruzados.

Próximo passo é calcular a esperança condicional $\mathbb{E}[C_n | \mathcal{B}_n]$, ou seja,

$$\mathbb{E}[C_n | \mathcal{B}_n] = \sum_{i \neq j} \mathbb{E} \left[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \middle| \mathcal{B}_n \right].$$

Para $i \neq j$, seja $Z_{ij} = (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$. Pela identidade (13) temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_{ij} | \mathcal{B}_n] &= \frac{1}{2^k} \sum_{\varepsilon} Z_{ij} \circ \theta_\varepsilon \\ &= \frac{1}{2^k} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^k} \varepsilon_i \varepsilon_j Z_{ij} \\ &= Z_{ij} \cdot \left(\frac{1}{2^k} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^k} \varepsilon_i \varepsilon_j \right). \end{aligned}$$

A soma $\sum_{\varepsilon} \varepsilon_i \varepsilon_j$ pode ser fatorada (usando $k = k(n)$):

$$\sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k = \pm 1} \varepsilon_i \varepsilon_j = \left(\sum_{\varepsilon_i \in \{-1,1\}} \varepsilon_i \right) \left(\sum_{\varepsilon_j \in \{-1,1\}} \varepsilon_j \right) \left(\prod_{l \neq i,j} \sum_{\varepsilon_l \in \{-1,1\}} 1 \right) = (0) \cdot (0) \cdot 2^{k-2} = 0.$$

Logo, $\mathbb{E}[C_n | \mathcal{B}_n] = 0$. Tomando a esperança condicional em $B_T^2 = S_n + C_n$:

$$\mathbb{E}[B_T^2 | \mathcal{B}_n] = \mathbb{E}[S_n | \mathcal{B}_n] + \mathbb{E}[C_n | \mathcal{B}_n].$$

Como S_n é $\mathcal{B}_n$ -mensurável, $\mathbb{E}[S_n | \mathcal{B}_n] = S_n$. Portanto,

$$S_n = \mathbb{E}[B_T^2 | \mathcal{B}_n].$$

Agora usamos a hipótese de que as partições são encaixadas: $\Delta_m \subseteq \Delta_n$ para $m \leq n$. Se uma função é invariante pelas reflexões finas (de Δ_n), ela é automaticamente invariante pelas

reflexões “agrupadas” (de Δ_m). (Pois qualquer reflexão de Δ_m corresponde a uma reflexão específica de Δ_n onde todos os sub-intervalos da partição fina são refletidos da mesma forma). Isso implica que $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}_m$. A família de σ -álgebras $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é, portanto, não-crescente (decrecente). A sequência de variáveis aleatórias $S_n = \mathbb{E}[B_T^2 | \mathcal{B}_n]$ é um martingal reverso. Como $B_T^2 \in L^1(\Omega)$, segue do Teorema da Convergência para martingales reversos que S_n converge quase certamente e em L^1 para um limite S_∞ :

$$\langle \Delta_n \rangle_B^T \equiv S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{q.c. e } L^1} S_\infty = \mathbb{E}[B_T^2 | \mathcal{B}_\infty],$$

onde $\mathcal{B}_\infty = \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{B}_n$.

Desta forma acabamos de provar que S_n converge quase certamente para S_∞ . Pelo **Teorema 12** sabemos que S_n converge no sentido L^2 (e, portanto, em probabilidade) para a constante T . Como a convergência quase certa implica convergência em probabilidade, os limites devem ser os mesmos (quase certamente). Logo, $S_\infty = T$ q.c. Isso conclui a prova de que

$$\langle \Delta_n \rangle_B^T \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{q.c. e } L^1} T,$$

■

Corolário 15. Seja $\{B_t : t \geq 0\}$ um movimento Browniano definido sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Para cada $\omega \in \Omega$, a variação total da trajetória $t \mapsto B_t(\omega)$, no intervalo $[a, b]$, é definida por

$$V_{[a,b]}B(\omega) \equiv \sup_{\Delta \in \mathcal{P}([a,b])} \text{Var}_1(B_{(\cdot)}(\omega), \Delta) = \sup_{\Delta \in \mathcal{P}([a,b])} \sum_{i=1}^n |B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)|.$$

Então

$$\mathbb{P}(V_{[a,b]}B < \infty) = 0.$$

Ou seja, quase certamente, as trajetórias do movimento Browniano não possuem variação total finita em qualquer intervalo finito da forma $[a, b]$.

Prova. Suponha que $\mathbb{P}(V_{[a,b]}B < \infty) > 0$. Seja $\{\Delta_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência de partições em $\mathcal{P}([a, b])$, tal que se $n < m$, então $\Delta_n \subset \Delta_m$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$.

Já que a sequência de partições $\{\Delta_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de partições encaixadas, segue do Teorema de Levy (**Teorema 14**), da continuidade quase certa das trajetórias do Movimento Browniano e do **Lema 6** que

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\{V_{[a,b]}B < \infty\}} \cdot (b - a) &= \mathbb{1}_{\{V_{[a,b]}B < \infty\}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\#\Delta_n} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \\ &\leq \mathbb{1}_{\{V_{[a,b]}B < \infty\}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\{t_i, t_{i-1}\} \subseteq \Delta_n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}| \sum_{i=1}^{\#\Delta_n} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| \\ &\leq \mathbb{1}_{\{V_{[a,b]}B < \infty\}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\{t_i, t_{i-1}\} \subseteq \Delta_n} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| \cdot V_{[a,b]}B \\ &= 0. \end{aligned}$$

O que é absurdo. Portanto concluímos que $V_{[a,b]}B = +\infty$, quase certamente. ■

4. A Integral de Wiener (Integrandos Determinísticos)

Na [Seção 2](#) levantamos a questão de definir a integral $\int_a^b f(t) dg(t)$. Vimos no [Exemplo 3](#) que, em geral, esta integral não pode ser definida como uma integral de Riemann-Stieltjes.

Agora vamos considerar a seguinte integral:

$$\int_a^b f(t) dB(t, \omega),$$

onde f é uma função determinística (isto é, ela não depende de ω) e $B(t, \omega)$ é um movimento browniano. Suponha que para cada $\omega \in \Omega$ queremos usar a fórmula de integração por partes [\(3\)](#) para definir esta integral no sentido de Riemann-Stieltjes por

$$(RS) \int_a^b f(t) dB(t, \omega) = f(t)B(t, \omega) \Big|_a^b - (RS) \int_a^b B(t, \omega) df(t). \quad (14)$$

O [Teorema 7](#) sugere que a classe de funções $f(t)$ para as quais a integral acima está bem definida para cada $\omega \in \Omega$ é bastante limitada, isto é, a função f , como integrador, precisa ser uma função contínua de variação limitada. Portanto, para uma função contínua de variação ilimitada tal como $f(t) = t \sin \frac{1}{t}$, $0 < t \leq 1$, e $f(0) = 0$, não há garantias de que a [Equação \(14\)](#) possa ser usada para definir a integral $\int_0^1 f(t) dB(t, \omega)$ para cada $\omega \in \Omega$.

Precisamos de uma ideia diferente para definir a integral $\int_a^b f(t) dB(t, \omega)$ para uma classe mais ampla de funções $f(t)$. Esta nova integral, chamada de integral de Wiener de f , será bem-definida para todas as funções $f \in L^2([a, b]) \equiv L^2([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \lambda)$ que denota o espaço de Hilbert de todas as funções (classes de equivalência módulo- λ) reais de quadrado integráveis em $[a, b]$, com respeito à medida de Lebesgue. Com esta nova noção de integral será possível, por exemplo, dar um sentido preciso a expressão $\int_0^1 t \sin \frac{1}{t} dB(t)$, como uma integral de Wiener.

Para facilitar a exposição vamos apresentar a definição da integral de Wiener em duas etapas. A primeira correspondente a funções mais simples do tipo escada. Em seguida, mostramos como definir esta integral no caso mais geral.

Etapa 1. Suponha que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função escada dada por $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{[t_{i-1}, t_i)}$, onde $\{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{P}([a, b])$. Neste caso, definimos a integral de Wiener de f como sendo a variável aleatória

$$I(f) \equiv \sum_{i=1}^n a_i (B(t_i) - B(t_{i-1})). \quad (15)$$

Obviamente, $I(af + bg) = aI(f) + bI(g)$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ e funções escada f e g . Além disso, temos o seguinte lema.

Lema 16. Para uma função escada f , a variável aleatória $I(f)$ é Gaussiana com média 0 e variância

$$\mathbb{E}[I(f)^2] = \int_a^b f(t)^2 dt. \quad (16)$$

Prova. É bem conhecido que uma combinação linear de variáveis aleatórias Gaussianas independentes é também uma variável aleatória Gaussiana. Portanto, pelas condições [\(2\)](#) e [\(3\)](#)

do movimento browniano, a variável aleatória $I(f)$ definida pela [Equação \(15\)](#) é Gaussiana com média 0. Para verificar a [Equação \(16\)](#), note que

$$\mathbb{E}[I(f)^2] = \mathbb{E} \left[\sum_{i,j=1}^n a_i a_j (B(t_i) - B(t_{i-1})) (B(t_j) - B(t_{j-1})) \right].$$

Pelas condições (2) e (3) do movimento browniano,

$$\mathbb{E}[(B(t_i) - B(t_{i-1}))^2] = t_i - t_{i-1},$$

e para $i \neq j$,

$$\mathbb{E}[(B(t_i) - B(t_{i-1})) (B(t_j) - B(t_{j-1}))] = 0.$$

Portanto,

$$\mathbb{E}[I(f)^2] = \sum_{i=1}^n a_i^2 (t_i - t_{i-1}) = \int_a^b f(t)^2 dt. \quad \blacksquare$$

Etapa 2. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ o espaço de probabilidade onde está definido o Movimento Browniano $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$. Denote por $L^2(\Omega) \equiv L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ o espaço de Hilbert de todas as variáveis aleatórias de quadrado integrável em Ω , munido do produto interno $\langle X, Y \rangle \equiv \mathbb{E}[XY]$. Seja $f \in L^2[a, b]$. Escolha uma sequência $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ de funções escada tal que $f_n \rightarrow f$ em $L^2[a, b]$. Pelo [Lema 16](#) a sequência $\{I(f_n)\}_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em $L^2(\Omega)$. Logo ela converge em $L^2(\Omega)$. Defina

$$I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n), \quad \text{em } L^2(\Omega). \quad (17)$$

Vamos mostrar que $I(f)$ é bem-definida. Para que $I(f)$ seja bem definida, precisamos mostrar que o limite na [Equação \(17\)](#) é independente da escolha da sequência $\{f_n\}$. Suponha que $\{g_m\}$ é outra tal sequência, isto é, cada g_m é uma função escada e $g_m \rightarrow f$ em $L^2[a, b]$. Então pela linearidade da aplicação I e pela [Equação \(16\)](#),

$$\mathbb{E}[|I(f_n) - I(g_m)|^2] = \mathbb{E}[|I(f_n - g_m)|^2] = \int_a^b (f_n(t) - g_m(t))^2 dt.$$

Escreva $f_n(t) - g_m(t) = [f_n(t) - f(t)] - [g_m(t) - f(t)]$. Usando esta identidade e a desigualdade elementar $(x - y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ concluímos que

$$\begin{aligned} \int_a^b (f_n(t) - g_m(t))^2 dt &\leq 2 \int_a^b \left[(f_n(t) - f(t))^2 + (g_m(t) - f(t))^2 \right] dt \\ &\rightarrow 0, \quad \text{quando } n, m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Destas observações segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} I(g_m) \quad \text{em } L^2(\Omega).$$

Isso mostra que $I(f)$ é bem definida.

Definição 17. Seja $f \in L^2[a, b]$. O limite $I(f)$ definido na [Equação \(17\)](#) é chamado de *integral de Wiener* de f .

Para nos referir a uma realização particular da v.a. $I(f)$ podemos usar qualquer uma das seguintes notações

$$I(f)(\omega) \quad \text{ou} \quad \left(\int_a^b f(t) dB(t) \right) (\omega).$$

Também é comum denotar $I(f)$ por $\int_a^b f(t) dB(t)$ ou $\int_a^b f(t) dB(t, \omega)$. Note que a aplicação $f \mapsto I(f)$ define um operador linear de $L^2[a, b]$ em $L^2(\Omega)$.

Teorema 18. Para cada $f \in L^2[a, b]$, a integral de Wiener $\int_a^b f(t) dB(t)$ é uma variável aleatória Gaussiana com média 0 e variância $\|f\|^2 = \int_a^b f(t)^2 dt$.

Prova. Pelo [Lema 16](#), a afirmação feita no enunciado do teorema é verdadeira quando f é uma função escada. Para uma $f \in L^2[a, b]$ geral, esta conclusão segue do seguinte fato bem-conhecido. Se X_n é Gaussiana com média μ_n e variância σ_n^2 e X_n converge para X em $L^2(\Omega)$, então X é Gaussiana com média $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n$ e variância $\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^2$. ■

Outra propriedade notável da integral de Wiener é que se olhamos para ela como um operador linear $I : L^2[a, b] \rightarrow L^2(\Omega)$, então ela define uma aplicação linear isométrica. Da teoria básica de espaços de Hilbert sabemos que para provar que I possui esta propriedade é suficiente mostrar que I preserva produtos internos e isto é o que faremos no próximo corolário.

Corolário 19. Se $f, g \in L^2[a, b]$, então

$$\mathbb{E}[I(f)I(g)] = \int_a^b f(t)g(t) dt. \quad (18)$$

Em particular, se f e g são ortogonais, então as variáveis aleatórias Gaussianas $I(f)$ e $I(g)$ são independentes.

Prova. Pela linearidade de I e pelo [Teorema 18](#) temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(I(f) + I(g))^2] &= \mathbb{E}[(I(f + g))^2] = \int_a^b (f(t) + g(t))^2 dt \\ &= \int_a^b f(t)^2 dt + 2 \int_a^b f(t)g(t) dt + \int_a^b g(t)^2 dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Por outro lado, podemos também usar o [Teorema 18](#) para obter

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(I(f) + I(g))^2] &= \mathbb{E}[I(f)^2 + 2I(f)I(g) + I(g)^2] \\ &= \int_a^b f(t)^2 dt + 2\mathbb{E}[I(f)I(g)] + \int_a^b g(t)^2 dt. \end{aligned} \quad (20)$$

Obviamente, a [Equação \(18\)](#) segue das [Equações \(19\)](#) e [\(20\)](#). ■

Exemplo 20. A integral de Wiener $\int_0^1 s dB(s)$ é uma variável aleatória Gaussiana com média 0 e variância $\int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{3}$.

Teorema 21. Seja f uma função contínua de variação limitada. Então para quase todo $\omega \in \Omega$,

$$\left(\int_a^b f(t) dB(t) \right) (\omega) = (RS) \int_a^b f(t) dB(t, \omega),$$

onde o lado esquerdo é a integral de Wiener de f e o lado direito é a integral de Riemann-Stieltjes de f definida pela [Equação \(14\)](#).

Prova. Para cada partição $\Delta_n = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ de $[a, b]$, definimos uma função escada f_n por

$$f_n = \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}) \mathbf{1}_{[t_{i-1}, t_i)}.$$

Note que f_n converge para f em $L^2[a, b]$ quando $n \rightarrow \infty$, isto é, quando $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$. Logo pela definição da integral de Wiener na [Equação \(17\)](#),

$$\int_a^b f(t) dB(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}) (B(t_i) - B(t_{i-1})), \quad \text{em } L^2(\Omega). \quad (21)$$

Por outro lado, pela [Equação \(14\)](#), o seguinte limite vale para cada $\omega \in \Omega_0$ para algum Ω_0 com $P(\Omega_0) = 1$,

$$\begin{aligned} (RS) \int_a^b f(t) dB(t, \omega) &= f(b)B(b, \omega) - f(a)B(a, \omega) - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n B(t_i, \omega) (f(t_i) - f(t_{i-1})) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(b)B(b, \omega) - f(a)B(a, \omega) - \sum_{i=1}^n B(t_i, \omega) (f(t_i) - f(t_{i-1})) \right), \end{aligned}$$

que, após reagrupar os termos, produz a seguinte igualdade para cada ω em Ω_0 :

$$(RS) \int_a^b f(t) dB(t, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}) (B(t_i) - B(t_{i-1})). \quad (22)$$

Como a convergência em $L^2(\Omega)$ implica a existência de uma subsequência convergindo quase certamente, podemos escolher tal subsequência de $\{f_n\}$ para obter a conclusão do teorema a partir das [Equações \(21\) e \(22\)](#). ■

Exemplo 22. Considere a integral de Riemann $\int_0^1 B(t, \omega) dt$ definida para cada $\omega \in \Omega_0$ para algum Ω_0 com $P(\Omega_0) = 1$. Vamos encontrar a distribuição desta variável aleatória. Use a fórmula de integração por partes para obter

$$\begin{aligned} \int_0^1 B(t, \omega) dt &= B(t, \omega)(t-1) \Big|_0^1 - \int_0^1 (t-1) dB(t, \omega) \\ &= (RS) \int_0^1 (1-t) dB(t, \omega). \end{aligned}$$

Logo pelo [Teorema 21](#) vemos que para quase todo $\omega \in \Omega$,

$$\int_0^1 B(t, \omega) dt = \left(\int_0^1 (1-t) dB(t) \right) (\omega),$$

onde o lado direito é uma integral de Wiener. Assim $\int_0^1 B(t) dt$ e a integral de Wiener $\int_0^1 (1-t) dB(t)$ têm a mesma distribuição, que é facilmente vista ser Gaussiana com média 0 e variância

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^1 (1-t) dB(t) \right)^2 \right] = \int_0^1 (1-t)^2 dt = \frac{1}{3}.$$

4.1. Expansão em Série de Integrais de Wiener

Seja $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma base ortonormal para o espaço de Hilbert $L^2[a, b]$. Cada $f \in L^2[a, b]$ tem a seguinte expansão:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n, \quad (23)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno em $L^2[a, b]$ dado por $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$. Além disso, segue da identidade de Parseval que

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle^2. \quad (24)$$

Tome a integral de Wiener em ambos os lados da **Equação (23)** se informalmente trocamos a ordem de integração e da soma ficamos com

$$\int_a^b f(t) dB(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \int_a^b \phi_n(t) dB(t). \quad (25)$$

Pergunta 23. A série aleatória no lado direito converge para o lado esquerdo e em que sentido?

Primeiro observe que pelo **Teorema 18** e pela observação seguinte à **Equação (18)**, as variáveis aleatórias $\int_a^b \phi_n(t) dB(t)$, $n \geq 1$, são independentes e têm distribuição Gaussiana com média 0 e variância 1. Assim o lado direito da **Equação (25)** é uma série aleatória de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Pelo teorema de equivalência de Lévy esta série aleatória converge quase certamente se e somente se ela converge em probabilidade e, por sua vez, se e somente se ela converge em distribuição. Por outro lado, podemos facilmente verificar a convergência em $L^2(\Omega)$ desta série aleatória como segue. Aplique as **Equações (18)** e **(24)** para mostrar que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\int_a^b f(t) dB(t) - \sum_{n=1}^N \langle f, \phi_n \rangle \int_a^b \phi_n(t) dB(t) \right)^2 \right] &= \int_a^b f(t)^2 dt - 2 \sum_{n=1}^N \langle f, \phi_n \rangle^2 + \sum_{n=1}^N \langle f, \phi_n \rangle^2 \\ &= \int_a^b f(t)^2 dt - \sum_{n=1}^N \langle f, \phi_n \rangle^2 \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $N \rightarrow \infty$. Logo a série aleatória na **Equação (25)** converge em $L^2(\Omega)$ para a variável aleatória no lado esquerdo da **Equação (25)**. Mas a convergência em $L^2(\Omega)$ implica convergência em probabilidade. Portanto provamos o próximo teorema para a expansão em série da integral de Wiener.

Teorema 24. Seja $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma base ortonormal para $L^2[a, b]$. Então para cada $f \in L^2[a, b]$, a integral de Wiener de f tem a expansão em série

$$\int_a^b f(t) dB(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \int_a^b \phi_n(t) dB(t),$$

com probabilidade 1, onde a série aleatória converge quase certamente.

Em particular, aplique o teorema para $a = 0$, $b = 1$, e $f = \mathbb{1}_{[0,t]}$, $0 \leq t \leq 1$. Então $\int_0^1 f(s) dB(s) = B(t)$ e temos a expansão em série aleatória,

$$B(t, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t \phi_n(s) ds \right) \left(\int_0^1 \phi_n(s) dB(s, \omega) \right).$$

Note que as variáveis t e ω estão separadas no lado direito. Em vista desta expansão, esperamos que $B(t)$ possa ser representado por

$$B(t, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\omega) \int_0^t \phi_n(s) ds,$$

onde $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes tendo a mesma distribuição Gaussiana com média 0 e variância 1.

Referências

- [1] Zdzisław Brzeźniak and Tomasz Zastawniak. *Basic stochastic processes*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag London, Ltd., London, 1999. A course through exercises.
- [2] L. Cioletti and L. Lucinger. O Teorema da Existência de Kolmogorov e o Movimento Browniano. <https://mat.unb.br/cioletti/ensino/kolmogorov-browniano.pdf>, 2025.
- [3] J. B. Conway. *A Course in Functional Analysis*, volume 96 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.
- [4] Hui-Hsiung Kuo. *Introduction to stochastic integration*. Universitext. Springer, New York, 2006.
- [5] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.
- [6] Andrzej Wróbel. On the almost sure convergence of the square variation of the Brownian motion. *Probab. Math. Statist.*, 3(1):97–101, 1982.