Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Lista 3 - Introdução à Teoria de Medida e Integração

Turma 01 - 01/2024

Março de 2024

1 Medidas

Ex. 1. Se $\mu_1, \ldots, \mu_n$ são medidas definidas sobre $(X, \mathscr{F})$ e $a_1, \ldots, a_n \in [0, +\infty)$, então

$$\sum_{j=1}^{n} a_n \mu_j$$

define uma medida sobre $(X, \mathscr{F})$.

Ex. 2. Sejam $(X, \mathscr{F})$ um espaço mensurável e $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de medidas definidas sobre $(X, \mathscr{F})$ tal que $\mu_n(X) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Defina $\nu : \mathscr{F} \to [0, +\infty]$ por

$$\nu(E) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(E)}{2^n}.$$

Mostre que ν define uma medida sobre $(X, \mathscr{F})$ e satisfaz $\nu(X) = 1$.

Ex. 3. Sejam $(X, \mathscr{F}\ \mu)$ um espaço de medida e $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos em $\mathscr{F}$. Mostre que

a) $\mu\left(\liminf_{n\to\infty} E_n\right) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n)$;

b Se $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < +\infty$, então temos $\limsup_{n\to\infty} \mu(E_n) \leqslant \mu\left(\limsup_{n\to\infty} E_n\right)$.

Ex. 4. Sejam $(X, \mathscr{F}, \mu)$ um espaço de medida e $E, F \in \mathscr{F}$. Mostre que

$$\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F).$$

Ex. 5. Sejam $(X, \mathscr{F}, \mu)$ um espaço de medida e $E \in \mathscr{F}$ um conjunto fixado. Para cada $A \in \mathscr{F}$, defina $\mu_E(A) \equiv \mu(A \cap E)$. Mostre que $\mu_E : \mathscr{F} \to [0, +\infty]$ (chamada de medida condicional) é também uma medida.

Ex. 6. Seja $(X, \mathscr{F}, \mu)$ um espaço de medida **finita**. Mostre que

a) se $E, F \in \mathscr{F}$ e $\mu(E\Delta F) = 0$, então $\mu(E) = \mu(F)$;

b) considere a relação em $\mathscr{F} \times \mathscr{F}$ definida por $E \sim F$, se $\mu(E\Delta F) = 0$. Mostre que "$\sim$" define uma relação de equivalência em $\mathscr{F}$.

c) para cada par $E, F \in \mathscr{F}$ defina $\rho(E, F) \equiv \mu(E\Delta F)$. Mostre que para quaisquer E, F e $G \in \mathscr{F}$ temos
$$\rho(E, G) \leqslant \rho(E, F) + \rho(F, G).$$
Considere a relação de equivalência "$\sim$" definida no item anterior e o espaço quociente $\mathscr{M} \equiv \mathscr{F} / \sim$. Mostre que $\rho : \mathscr{M} \times \mathscr{M} \to (0, \infty)$ define uma métrica em $\mathscr{M}$.

Ex. 7. Seja $(X, \mathscr{F}, \mu)$ um espaço de medida. Mostre que se μ é σ-finita, então μ é semi-infinita, isto é, para cada $E \in \mathscr{F}$ satisfazendo $\mu(E) = +\infty$, existe $F \in \mathscr{F}$ com $F \subset E$ satisfazendo $0 < \mu(F) < +\infty$.

Ex. 8. Seja $(X, \mathscr{M})$ um espaço mensurável. Sejam $\mu : \mathscr{M} \to [0, +\infty]$ e $\nu : \mathscr{M} \to [0, +\infty]$ medidas tais que $\mu(X) = 1 = \nu(X)$. Mostre que a coleção
$$\mathscr{L} \equiv \{E \subseteq X \ : \ \mu(E) = \nu(E)\}$$
é um λ-sistema (Ex. 5 - Lista 2).

Ex. 9. Seja $(X, \mathscr{F}, \mu)$ um espaço de medida. Suponha que μ é semi-infinita e que existe $E \in \mathscr{F}$ tal que $\mu(E) = +\infty$. Mostre que para qualquer $C > 0$ dado, existe um conjunto $\mathscr{F}$-mensurável $F \equiv F(C)$ tal que $F \subset E$ e $C < \mu(F) < +\infty$.

Ex. 10. Seja μ uma medida definida em $(X, \mathscr{F})$. Considere a seguinte função de conjuntos $\nu : \mathscr{F} \to [0, +\infty]$ definida por
$$\nu(E) \equiv \sup\{\mu(F) \ : \ F \subseteq E, \ \text{com } \mu(F) < +\infty\}.$$

a) Mostre que ν define uma medida semi-infinita.

b) Mostre que se μ é semi-infinita, então $\nu = \mu$ (Dica: use o Ex.9).

c) Mostre que existe uma medida $\rho : \mathscr{M} \to [0, +\infty]$ (não necessariamente única) tal que $\rho(E) \in \{0, +\infty\}$, para todo $E \in \mathscr{F}$ e $\mu = \nu + \rho$.

Ex. 11. Considere o espaço mensurável $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$. Seja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais **não-negativos** e $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]$ definida por $\mu(\varnothing) = 0$ e para todo $E \subset \mathbb{N}$ não-vazio
$$\mu(E) \equiv \sum_{n\in E} a_n.$$
Mostre que μ é uma medida sobre $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$.