



Processos Estocásticos 1 - PPGMAT3496 - Turma: 01

Plano de Ensino – 2º/2025

Professor: Leandro Cioletti (homepage: www.mat.unb.br/cioletti)

email: leandro.mat@gmail.com

EMENTA: Probabilidade e Esperança Condicional. Martingales a tempo discreto, tempos de parada, desigualdades e teoremas de convergência. Processos Estocásticos, distribuições finito-dimensionais e o Teorema da Existência de Kolmogorov. O Movimento Browniano: construção, propriedades das trajetórias, propriedade de Markov, propriedade forte de Markov e o princípio da reflexão. Cadeias de Markov a Tempo Contínuo: definição, descrição infinitesimal, construção, medidas estacionárias, recorrência e transiência. Processos de Feller, o semigrupo de Feller e seu gerador infinitesimal. A Fórmula de Feynman-Kac. Introdução à Integração Estocástica, a integral de Itô e a Fórmula de Itô. Tempo Local Browniano, o Princípio de Invariância de Donsker e o Teorema do Limite Central para diferenças de martingales. Aplicações do movimento Browniano ao Problema de Dirichlet e à Equação de Poisson.

AValiação: A avaliação será composta por: duas provas P_1 e P_2 ; e apresentação de um seminário que serão avaliados com notas de 0 à 10.

- Prova 1 - 29/09 .
- Prova 2 - 10/11.
- Seminário - 01/12, 03/12 e 05/12

A nota final (NF) será calculada de acordo com a seguinte fórmula: $NF = \frac{2P_1 + 2P_2 + S}{5}$. Será aprovado(a) o(a) aluno(a) que obtiver $NF \geq 5$.

HORÁRIO, LOCAL E ATENDIMENTO: Em consonância com as resoluções vigentes do CEPE, todas as aulas e todas as atividades avaliativas deste curso serão realizadas de forma presencial no Campus Darcy Ribeiro, na sala ASS 402/10, às segundas, quartas e sextas-feiras de 09h50m às 11h30m.

O atendimento extraclasse será realizado às segundas e quartas-feiras, das 18h00 às 18h50, no gabinete A1-385/12 - MAT 2º andar, no Departamento de Matemática - Instituto de Ciências Exatas (IE) - ICC Norte.

BIBLIOGRAFIA INDICADA:

- [1] T. M. Liggett. *Continuous Time Markov Processes: An Introduction*. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 113. American Mathematical Society (AMS), Providence, Rhode Island, 2010. xii+271 pp. ISBN: 978-0-8218-4949-1.
- [2] P. Billingsley. *Probability and Measure - Anniversary Edition*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, New York, Anniversary edition, 2012. x+608 pp. ISBN: 978-1-118-12237-2.
- [3] S. R. S. Varadhan. *Stochastic Processes*. Courant Lecture Notes in Mathematics, Vol. 16. American Mathematical Society (AMS), Providence, Rhode Island, 2007. 126 pp. ISBN: 978-0-8218-4085-6.
- [4] R. N. Bhattacharya and M. Majumdar. *Random Dynamical Systems: Theory and Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007. x+286 pp. ISBN: 978-0-521-82701-4.

PROGRAMA:

Aula	Descrição	Data
1	Probabilidade Condicional: O Caso Discreto e o Caso Geral (B, Sec 33)	18/08
2	Probabilidade Condicional Regular (B, Sec 33)	20/08
3	Esperança Condicional: Definição e Propriedades (B, Sec 34)	22/08
4	Martingales, Submartingales e Supermartingales à tempo discreto (B, Sec 35)	25/08
5	Aplicações de Martingales e Funções de Martingales (B, Sec 35)	27/08
6	Tempos de Parada e Desigualdades para Martingales (B, Sec 35)	29/08
7	Teoremas de Convergência para Martingales (B, Sec 35)	01/09
8	Processos Estocásticos e Distribuições Finito-Dimensionais (B, Sec 36)	03/09
9	Espaços Produto e a Construção de Medidas no espaço de Trajetórias (B, Sec 36)	05/09
10	O Teorema da Existência de Kolmogorov e suas Implicações (B, Sec 36)	08/09
11	Distribuição Gaussiana Multivariada e Movimento Browniano (B, Sec 37 e L, Ch 1)	10/09
12	A Construção do Movimento Browniano (L, Ch 1)	12/09
13	Propriedades das trajetórias do MB: Continuidade (B, Sec 37 e L, Ch 1)	15/09
14	Propriedades das trajetórias do MB: Não-Diferenciabilidade (B, Sec 37 e L, Ch 1)	17/09
15	Revisão para a Prova 1	19/09
16	Prova 1	29/09
17	A Propriedade de Markov para o Movimento Browniano (L, Ch 1)	01/10
18	A Propriedade Forte de Markov (B, Sec 37 e L, Ch 1)	03/10
19	O Princípio da Reflexão e Aplicações da Propriedade Forte de Markov (B, Sec 37 e L, Ch 1)	06/10
20	Martingales à Tempo Contínuo e Aplicações (L, Ch 1)	08/10
21	Cadeias de Markov em Tempo Contínuo: Definição e Exemplos (L, Ch 2)	10/10
22	Da Cadeia de Markov à sua Descrição Infinitesimal (Matriz Geradora) (L, Ch 2)	13/10
23	Da Descrição Infinitesimal à Cadeia de Markov: Teoria e Construção (Parte 1) (L, Ch 2)	15/10
24	Da Descrição Infinitesimal à Cadeia de Markov: Teoria e Construção (Parte 2) (L, Ch 2)	17/10
25	Medidas Estacionárias, Recorrência e Transiência para Cadeias de Markov (L, Ch 2)	20/10
26	Processos de Feller: Definição e o Semigrupo de Feller (L, Ch 3)	22/10
27	O Gerador Infinitesimal de um Processo de Feller (L, Ch 3)	24/10
28	A Fórmula de Feynman-Kac (L, Ch 3)	29/10
29	Introdução à Integração Estocástica: Motivação e Construção da Integral de Itô (L, Ch 5)	31/10
30	Propriedades da Integral de Itô (L, Ch 5)	03/11
31	A Fórmula de Itô: Demonstração e Intuição (L, Ch 5)	05/11
32	Aplicações da Fórmula de Itô (L, Ch 5)	07/11
33	Prova 2	10/11
34	Tempo Local Browniano (L, Ch 5)	12/11
35	O Mergulho de Skorokhod (B, Sec 37 e L, Ch 1)	14/11
36	O Princípio de Invariância de Donsker (B, Sec 37 e L, Ch 1)	17/11
37	Teorema do Limite Central para Diferenças de Martingales (B, Sec 35)	19/11
38	Movimento Browniano em $\mathbb{R}^n$ e Funções Harmônicas (L, Ch 6)	21/11
39	O Problema de Dirichlet e sua Solução via Movimento Browniano (L, Ch 6)	24/11
40	A Equação de Poisson (L, Ch 6)	26/11
41	Revisão Geral e Preparação para os Seminários	28/11
42	Seminário 1	01/12
43	Seminário 2	03/12
44	Seminário 3	05/12

MATERIAL A SER UTILIZADO NO CURSO:

Probability and Measure: Anniversary Edition - Patrick Billingsley

- Chapter 6 - Section 33: Conditional Probability

Seção	Páginas	Num. de Páginas
The Discrete Case	454–456	03
The General Case	456–463	08
Properties of Conditional Probability	463–464	02
Difficulties and Curiosities	465–467	03
Total		16

- Chapter 6 - Section 34: Conditional Expectation

Seção	Páginas	Num. de Páginas
Definition	472–474	03
Properties of Conditional Expectation	474–477	04
Conditional Distributions and Expectations	477–478	02
Total		09

- Chapter 6 - Section 35: Martingales

Seção	Páginas	Num. de Páginas
Definition	487–491	05
Submartingales	491–492	02
Gambling	492–494	03
Functions of Martingales	494–494	01
Stopping Times	494–495	01
Inequalities	495–497	03
Convergence Theorems	497–500	04
Reversed Martingales	501–502	02
Central Limit Theorem* - Martingale Differences	505–508	04
Total		25

- Chapter 7 - Section 36: Kolmogorov's Existence Theorem

Seção	Páginas	Num. de Páginas
Stochastic Processes	513–513	01
Finite Dimensional Distributions	513–515	02
Product Spaces	515–517	03
Kolmogorov's Existence Theorem	517–523	07
The Inadequacy of $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$	523–525	03
A Return to Ergodic Theory	525–527	03
The Hewitt-Savage Theorem	527–528	02
Total		21

- Chapter 7 - Section 37: Brownian Motion

Seção	Páginas	Num. de Páginas
Definition	530–532	03
Continuity of Paths	533–535	03
Measurable Processes	535–536	02
Irregularity of Brownian Motion Paths	536–541	06
The Strong Markov Property	541–543	03
The Reflection Principle	544–545	02
Skorohod Embedding	545–552	08
Donsker Invariance Principle	552–555	04
Total		31

Continuous Time Markov Processes - Thomas M. Liggett

- Chapter 1 - One Dimensional Brownian Motion

Seção	Páginas	Num. de Páginas
The Multivariate Gaussian Distribution	02–05	04
Processes with Stationary independent increments	05–05	01
Definition of Brownian Motion	05–09	05
The construction of the Brownian Motion	09–15	07
Path Properties	15–21	07
The Markov Property	21–28	08
The Strong Markov Property and Applications	28–38	11
Continuous time Martingales and Applications	38–46	09
The Skorokhod Embedding	47–50	04
Donsker's Theorem and applications	51–55	05
Total		61

- Chapter 2 - Continuous Time Markov Chains

Seção	Páginas	Num. de Páginas
The basic setup	57–59	03
Some Examples	59–61	03
From Markov chain to infinitesimal description	61–65	05
Blackwell's example	65–68	04
From infinitesimal description to Markov Chain	68–79	12
Stationary measures, recurrence, and transience	79–86	08
More examples	86–90	05
Total		40

- Chapter 3 - Feller Processes

Seção	Páginas	Num. de Páginas
The basic setup	091–098	08
From Feller Process to infinitesimal description	098–102	05
From infinitesimal description to Feller process	102–108	07
A few tools - Feynman-Kac Formula	109–119	11
Applications to Brownian motion and its relatives	119–132	14
Total		45

- Chapter 5 - Stochastic Integration

Seção	Páginas	Num. de Páginas
Some motivation	193–194	02
The Itô integral	195–204	10
Itô's formula and Applications	205–213	09
Brownian local time	213–218	06
Connections to Feller processes on $\mathbb{R}$.	219–226	08
Total		35

- Chapter 6 - Multi-Dimensional Brownian Motion and the Dirichlet Problem

Seção	Páginas	Num. de Páginas
Harmonic Functions and the Dirichlet problem	227–230	04
Brownian Motion on $\mathbb{R}^n$	231–237	07
Back to Dirichlet problem	237–245	09
The Poisson Equation	245–246	02
Total		22