

# O Princípio da Reflexão para o Movimento Browniano

L. Cioletti

Outubro de 2025

## Resumo

Neste texto provamos o Princípio da Reflexão para o Movimento Browniano padrão unidimensional. Em resumo, este princípio afirma que dado um tempo de parada  $\tau$ , o processo estocástico  $\{X_t : t \in [0, +\infty)\}$ , definido por

$$X_t \equiv \begin{cases} B_t, & \text{se } t \leq \tau; \\ B_\tau - (B_t - B_\tau), & \text{se } \tau \leq t, \end{cases}$$

onde  $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$  é um Movimento Browniano, possui as mesmas distribuições finito-dimensionais que um Movimento Browniano padrão.

Apresentamos duas demonstrações, bem detalhadas, deste resultado usando técnicas completamente distintas. Em seguida, exibimos duas aplicações deste teorema. A primeira é referente a determinação de uma expressão explícita para a distribuição do supremo do Movimento Browniano ao longo do intervalo  $[0, t]$ . A segunda, é sobre uma propriedade geométrica do Movimento Browniano padrão em duas dimensões. Mais precisamente, sobre a densidade de probabilidade dos pontos da segunda coordenada no primeiro contato com uma reta vertical fixa. Mostramos que esses pontos se distribuem segundo uma Cauchy e determinamos seus parâmetros em função da posição da reta.

## 1. Introdução

O Movimento Browniano, inicialmente observado pelo botânico Robert Brown em 1827 ao estudar o movimento errático de grãos de pólen suspensos em água, tornou-se um dos objetos centrais da teoria das probabilidades e dos processos estocásticos. A fundamentação matemática rigorosa deste fenômeno foi estabelecida por Norbert Wiener em 1923, resultando no que hoje conhecemos como processo de Wiener ou Movimento Browniano padrão.

Ao longo do desenvolvimento da teoria, diversas propriedades notáveis do Movimento Browniano foram descobertas, revelando conexões profundas com outras áreas da matemática. Uma destas propriedades, de particular elegância e utilidade, é o chamado *Princípio*

*da Reflexão.* Este princípio estabelece um resultado surpreendente: se pararmos um Movimento Browniano em um instante aleatório  $\tau$  e refletirmos sua trajetória futura em torno do valor que ele atingiu nesse instante, o novo processo estocástico resultante é, do ponto de vista probabilístico, indistinguível do Movimento Browniano original. Esta simetria oculta não é apenas um resultado teórico interessante, mas uma ferramenta poderosa para calcular distribuições que seriam intratáveis por métodos diretos.

O Princípio da Reflexão tem suas raízes em argumentos combinatórios desenvolvidos por Désiré André em 1887 para resolver problemas sobre passeios aleatórios discretos. A extensão destas ideias para o Movimento Browniano acabam tendo como consequência diversas aplicações que vão desde Finanças Matemáticas, Física-Estatística até Teoria Analítica dos Números.

Um dos objetivos deste trabalho é apresentar de maneira clara e detalhada a prova do Princípio da Reflexão para o Movimento Browniano padrão unidimensional. Como mencionado no resumo são dadas duas demonstrações independentes deste resultado:

- A primeira demonstração utiliza apenas as propriedades elementares das distribuições dos incrementos do Movimento Browniano. Esta prova procede por verificação direta da igualdade das distribuições finito-dimensionais, utilizando decomposição em casos e aproximação por tempos de parada discretos.
- A segunda demonstração é baseada no estudo das funções características das distribuições finito-dimensionais dos processos original e refletido.

Esta escolha é feita por uma razão estratégica: ao investigar generalizações, é sempre valioso dispor de um repertório de técnicas já testadas e bem compreendidas em um caso mais simples. E acreditamos que a diversidade de ideias contidas nestas duas provas oferece realmente rotas alternativas para novas generalizações.

Apresentamos também duas aplicações importantes do Princípio da Reflexão:

1. **Distribuição do máximo.** Obtemos uma expressão explícita para a função de distribuição de  $M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} B_s$ , o valor máximo atingido por um Movimento Browniano em um intervalo finito. Este resultado é fundamental em diversas áreas aplicadas: em finanças matemáticas, é essencial no estudo de modelos de precificação de opções de barreira (*barrier options*); em estatística não-paramétrica, forma a base do teste de Kolmogorov-Smirnov; na teoria da ruína, permite calcular probabilidades de falência em processos de risco.
2. **Distribuição de Pontos de Contato em duas dimensões.** Consideramos um Movimento Browniano bidimensional de coordenadas  $(B_t^{(1)}, B_t^{(2)})$  e determinamos explicitamente a distribuição da segunda coordenada  $B_\tau^{(2)}$ , no instante  $\tau$  em que a primeira coordenada atinge um nível fixado  $a > 0$ .

O texto está organizado da seguinte forma. Na Seção 2, definimos o Movimento Browniano. Na Seção 3 definimos tempo de parada, filtrações regulares e enunciamos a Propriedade de Markov Forte para o Movimento Browniano. Na Seção 4, enunciamos e apresentamos a primeira prova do Princípio da Reflexão e na Seção 5 a prova alternativa deste princípio. As Seções 6 e 7 são dedicadas às aplicações.

Este texto exige do leitor familiaridade com Movimento Browniano e alguns fatos básicos sobre processos estocásticos.

## 2. Movimento Browniano

Neste texto, um Movimento Browniano padrão em uma dimensão denota um processo estocástico  $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$  definido sobre algum espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  e satisfazendo as seguintes condições:

i) O processo inicia na origem, quase certamente, em  $t = 0$ . Mais precisamente

$$\mathbb{P}(B_0 = 0) = 1; \quad (1)$$

ii) Os incrementos são independentes, isto é, para quaisquer  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$  e quaisquer  $H_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , com  $j = 1, \dots, k$  temos

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^k \{B_{t_j} - B_{t_{j-1}} \in H_j\}\right) = \prod_{j=1}^k \mathbb{P}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}} \in H_j); \quad (2)$$

iii) para cada par  $0 \leq s < t$  o incremento  $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$ , isto é, para todo  $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  temos

$$\mathbb{P}(B_t - B_s \in H) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_H \exp\left(\frac{-x^2}{2(t-s)}\right) dx. \quad (3)$$

iv) as trajetórias  $t \mapsto B_t(\omega)$ , são contínuas para todo  $\omega \in \Omega$ .

A existência de um processo satisfazendo todas estas propriedades pode ser demonstrada aplicando o Teorema da Existência de Kolmogorov e em seguida o Teorema da Continuidade de Kolmogorov-Chentsov. Como é de praxe na literatura, vamos assumir que o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  é completo. Para maiores detalhes veja as referências [1, 2, 3].

## 3. Tempos de Parada e a Propriedade de Markov Forte

Seja  $(\Omega, \mathcal{F})$  um espaço mensurável. Dizemos que uma família arbitrária de sub- $\sigma$ -álgebras  $\{\mathcal{F}_t : t \in [0, +\infty)\}$  de  $\mathcal{F}$  é uma filtração, se para todo par de números reais não-negativos  $0 \leq t \leq s$  temos  $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s$ . Dizemos que uma filtração  $\{\mathcal{F}_t : t \in [0, +\infty)\}$  é contínua à direita se para cada  $t_0 \in [0, +\infty)$  temos

$$\mathcal{F}_{t_0} = \bigcap_{s \in (t_0, +\infty)} \mathcal{F}_s.$$

Uma filtração muito natural de ser considerada quando trabalhamos com o Movimento Browniano  $\{B_t : t \geq 0\}$ , definido sobre um espaço de probabilidade completo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , é a filtração  $\mathcal{G}_t \equiv \sigma(B_s : s \leq t)$ . Embora esta filtração seja muito conveniente para vários propósitos, é um resultado fundamental da teoria que ela não é contínua à direita. E a ausência desta propriedade introduz diversas dificuldades. Uma delas relacionada à argumentos que fazem uso de aproximações de tempos de parada gerais por sequências de tempos de parada que assumem valores discretos. Outro fato inconveniente é que uma v.a. da forma  $\tau_U \equiv \inf\{t \in [0, +\infty) : B_t \in U\}$  é um tempo de parada se  $U$  é fechado, mas pode não ser um tempo de parada se  $U$  é aberto. A maneira mais simples de evitar problemas como os mencionados acima e ao mesmo tempo manter uma certa naturalidade na escolha da filtração e

principalmente não adicionar novas camadas de dificuldades técnicas consiste em substituir a filtração natural pela filtração

$$\mathcal{F}_t \equiv \bigcap_{s \in (t, +\infty)} \sigma(\mathcal{G}_s \cup \mathcal{N}), \quad (4)$$

onde  $\mathcal{N}$  é coleção de todos os subconjuntos dos conjuntos de probabilidade nula. Note que esta filtração é mais regular em dois sentidos. Primeiro ela é definida em termos de sub- $\sigma$ -álgebras  $\mathbb{P}$ -completas e segundo que por construção esta filtração é contínua à direita.

Intuitivamente, a filtração natural  $\mathcal{G}_t$  do Movimento Browniano, contém apenas informações sobre o que aconteceu até o instante  $t$ , mas não sobre o comportamento imediatamente após  $t$ . A filtração regularizada  $\mathcal{F}_t$  enriquece com a informação do que está “prestas a acontecer” no instante imediatamente a seguir de  $t$  e também trivializa os eventos de probabilidade nula, colaborando assim para evitar patologias.

**Definição 1** (Tempo de Parada). Sejam  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade completo e  $\tau : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$  uma variável aleatória. Dizemos que  $\tau$  é um tempo de parada, com respeito a uma filtração  $\{\mathcal{F}_t : t \in [0, +\infty)\}$  se a seguinte condição é satisfeita:

$$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

para todo  $t \in [0, +\infty)$ .

Uma observação importante. Quanto mais “rica” é a filtração, maior é a classe dos tempos de parada. Por exemplo, uma aplicação  $\tau : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$  pode ser um tempo de parada com respeito à filtração regular  $\{\mathcal{F}_t : t \in [0, +\infty)\}$  induzida por um Movimento Browniano mas não necessariamente um tempo de parada com respeito a filtração natural  $\{\mathcal{G}_t : t \in [0, +\infty)\}$  definida por este processo estocástico.

Como vamos precisar trabalhar com eventos relacionados ao Movimento Browniano que podem ocorrer em instantes de tempo aleatórios, então é natural suspeitar que  $\sigma$ -álgebras como, por exemplo,  $\mathcal{F}_{t_0}$ , não sejam tão convenientes. Por exemplo, se a ocorrência de um evento que estamos interessados é descrita em termos de um tempo de parada  $\tau$ , pode ser útil considerar a possibilidade de, em algum sentido, substituir a constante  $t_0$  em  $\mathcal{F}_{t_0}$  por um tempo de parada. Uma das maneira de formalizar isto é a seguinte.

**Definição 2** (Sigma-Álgebra  $\mathcal{F}_\tau$ ). Seja  $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$  um Movimento Browniano definido sobre um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  completo e  $\tau : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$  um tempo de parada, com respeito a filtração regular induzida por este processo estocástico. Definimos  $\mathcal{F}_\tau$  como sendo a coleção de subconjuntos de  $\Omega$  dada por

$$\mathcal{F}_\tau \equiv \{M \in \mathcal{F} : M \cap \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t \in [0, +\infty)\}.$$

**Proposição 3.** A coleção  $\mathcal{F}_\tau$  definida acima é uma sub- $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{F}$  e além do mais a v.a.  $\tau : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$  é  $\mathcal{F}_\tau$ -mensurável.

**Prova.** É claro que  $\emptyset$  e  $\Omega$  pertencem à  $\mathcal{F}_\tau$ . Suponha que  $M \in \mathcal{F}_\tau$ , então para cada  $t \in [0, +\infty)$  temos que  $M \cap \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ . Como  $\mathcal{F}_t$  é uma sub- $\sigma$ -álgebra podemos afirmar que  $M^c \cup \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\}^c \in \mathcal{F}_t$ . Como  $\tau$  é tempo de parada é claro que  $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ . Logo a interseção deste dois últimos conjuntos também é um elemento de  $\mathcal{F}_t$  e portanto

$$\begin{aligned} \left( M^c \cup \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\}^c \right) \cap \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} &\in \mathcal{F}_t \\ \Downarrow \\ M^c \cap \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} &\in \mathcal{F}_t. \end{aligned}$$

Como o argumento acima é independente de  $t$  segue que  $\mathcal{F}_\tau$  é fechada por complementação.

Seja  $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $\mathcal{F}_\tau$ . Então para cada  $t \in [0, +\infty)$  temos das propriedades elementares das operações de conjuntos que

$$\left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \right) \cap \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left( M_n \cap \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \right) \in \mathcal{F}_t.$$

o que mostra que a coleção  $\mathcal{F}_\tau$  é também fechada por uniões enumeráveis e finaliza a prova de que esta coleção é uma  $\sigma$ -álgebra.

Para provar que  $\tau : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$  é  $\mathcal{F}_\tau$ -mensurável, basta mostrar que para todo  $t \in \mathbb{R}$  temos que  $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_\tau$ . Para isto basta tomar  $M = \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\}$  e usar a hipótese de  $\tau$  ser um tempo de parada. ■

As propriedades a seguir são elencadas com o propósito de fornecer uma intuição a respeito da  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_\tau$ .

- Se  $\tau \equiv t_0$  é constante, então  $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_{t_0}$ . Este fato permite pensar que  $\mathcal{F}_\tau$  generaliza a noção de informação “até e imediatamente após o tempo  $t_0$ ” para o caso aleatório.
- Se  $\sigma$  e  $\tau$  são tempos de parada com  $\sigma \leq \tau$ , quase certamente, então  $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$ . “Quanto mais tarde paramos, mais informação acumulamos”.
- se  $\tau$  é um tempo de parada, com respeito à  $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$ , então funções da forma

$$\Omega \ni \omega \longmapsto B_{\tau(\omega)}(\omega) \quad \text{e} \quad \Omega \ni \omega \longmapsto \sup_{0 \leq s \leq \tau(\omega)} B_s(\omega)$$

definem variáveis aleatórias sobre  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  e além do mais estas variáveis aleatórias são  $\mathcal{F}_\tau$ -mensuráveis, veja [Teorema 4](#).

- Eventos que são determinados por “instantes antes” ou “no momento de parar”, como

$$\left\{ \max_{0 \leq s \leq \tau} B_s \geq a \right\} \quad \text{ou} \quad \{B_\tau \in B\},$$

pertencem naturalmente a  $\mathcal{F}_\tau$ .

As demonstrações destes fatos podem ser encontradas em vários livros introdutórios sobre Processos Estocásticos à tempo contínuo e também nas referências [1, 2]. Por questão de completude vamos apresentar a prova do seguinte teorema.

**Teorema 4.** Seja  $\tau : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$  um tempo de parada com respeito à filtração regular (4) induzida por um Movimento Browniano  $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$ . Então  $B_\tau$  é uma variável aleatória  $\mathcal{F}_\tau$ -mensurável.

**Prova.** Primeiro, vamos considerar o caso em que  $\tau$  é um tempo de parada tomando valores em um conjunto enumerável. Seja  $\{r_j : j \in \mathbb{N}\} = \tau(\Omega)$  uma enumeração arbitrária do conjunto imagem de  $\tau$ .

Note que para cada  $j \in \mathbb{N}$  temos

$$\{\tau = r_j\} = \{\tau \leq r_j\} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \tau \leq r_j - \frac{1}{n} \right\} \in \mathcal{F}_{r_j}.$$

Então, para cada  $x \in \mathbb{R}$  fixado temos:

$$\begin{aligned} \{B_\tau \leq x\} \cap \{\tau \leq t\} &= \bigcup_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ r_j \leq t}} \{B_\tau \leq x\} \cap \{\tau = r_j\} \\ &= \bigcup_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ r_j \leq t}} \{B_{r_j} \leq x\} \cap \{\tau = r_j\}. \end{aligned}$$

Observando que  $\{B_{r_j} \leq x\} \cap \{\tau = r_j\} \in \mathcal{F}_{r_j} \subseteq \mathcal{F}_t$ , para todo  $j \in \mathbb{N}$  satisfazendo  $r_j \leq t$ , concluímos que a união acima pertence a  $\mathcal{F}_t$ . Portanto,  $\{B_\tau \leq x\} \in \mathcal{F}_\tau$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Vamos considerar agora o caso em que  $\tau$  é um tempo de parada arbitrário. A ideia é considerar uma sequência  $\{\tau_n : n \in \mathbb{N}\}$  de tempos de parada tomando valores no conjunto dos números racionais diádicos não-negativos e satisfazendo  $\tau_n(\omega) \downarrow \tau(\omega)$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , para cada  $\omega \in \Omega$  e usar a propriedade de continuidade das trajetórias do Movimento Browniano e a continuidade à direita da filtração  $\{\mathcal{F}_t : t \in [0, +\infty)\}$  para concluir que  $B_\tau$  é  $\mathcal{F}_\tau$  mensurável.

Mais precisamente, considere a sequência  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , onde  $\tau_n : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , é dado por

$$\tau_n(\omega) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]}(\tau(\omega)).$$

Primeiro, observamos que a série que define  $\tau_n$  é convergente pois, na verdade, para cada  $\omega \in \Omega$  dado, esta série possui no máximo uma parcela não-nula e portanto a expressão de  $\tau_n(\omega)$  está bem-definida para cada  $\omega \in \Omega$ .

Para verificar que  $\tau_n$  define um tempo de parada, basta observar que para cada  $t \in [0, +\infty)$  fixado, existe um único  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $k2^{-n} \leq t < (k+1)2^{-n}$ . Desta desigualdade e da definição de  $\tau_n$  segue que

$$\{\tau_n \leq t\} = \left\{ \tau \leq \frac{k}{2^n} \right\} \in \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}} \subseteq \mathcal{F}_t,$$

mostrando que  $\tau_n$  é um tempo de parada.

Por construção, a sequência  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge pontualmente e monotonicamente para  $\tau$ . Mais precisamente  $\tau_n(\omega) \downarrow \tau(\omega)$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Como para cada  $n \in \mathbb{N}$  fixado,  $\tau_n$  é um tempo de parada que toma valores em um conjunto enumerável, então podemos aplicar o resultado estabelecido na primeira parte desta demonstração, para garantir que  $B_{\tau_n}$  é uma variável aleatória  $\mathcal{F}_{\tau_n}$ -mensurável.

Agora vamos mostrar que  $B_\tau$  é  $\mathcal{F}_\tau$ -mensurável. Para isto, basta mostrar que para todo  $x \in \mathbb{R}$  temos  $\{B_\tau \leq x\} \in \mathcal{F}_\tau$ . Equivalentemente, para todo  $t \in [0, +\infty)$  temos que mostrar que

$$\{B_\tau \leq x\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Fixe  $t \in [0, +\infty)$ . Como a filtração  $\{\mathcal{F}_s : s \in [0, +\infty)\}$  é contínua à direita, isto é,  $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$ , para provar a afirmação acima é suficiente mostrar que para todo  $\epsilon > 0$  temos

$$\{B_\tau \leq x\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+\epsilon}.$$

Afirmamos que para cada  $k \in \mathbb{N}$  e cada  $\epsilon > 0$  fixados, o conjunto  $A_{k,\epsilon}$ , definido abaixo, pertence a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_{t+\epsilon}$ :

$$A_{k,\epsilon} \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \left( \{B_{\tau_m} \leq x + \frac{1}{k}\} \cap \{\tau_m \leq t + \epsilon\} \right). \quad (5)$$

De fato, como cada  $\tau_m$  é tempo de parada, o evento  $\{\tau_m \leq t + \epsilon\}$  pertence a  $\mathcal{F}_{t+\epsilon}$ . Além disso, como  $B_{\tau_m}$  é  $\mathcal{F}_{\tau_m}$ -mensurável e  $\tau_m \leq t + \epsilon$  na interseção em questão, segue que o evento  $\{B_{\tau_m} \leq x + \frac{1}{k}\} \cap \{\tau_m \leq t + \epsilon\}$  pertence a  $\mathcal{F}_{t+\epsilon}$ . Portanto, como  $\mathcal{F}_{t+\epsilon}$  é uma  $\sigma$ -álgebra, concluímos que  $A_{k,\epsilon} \in \mathcal{F}_{t+\epsilon}$ .

Próximo passo é verificar que vale a seguinte igualdade

$$\{B_\tau \leq x\} \cap \{\tau \leq t\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{k,\epsilon}. \quad (6)$$

Primeiro, suponha que  $\omega \in \{B_\tau \leq x\} \cap \{\tau \leq t\}$ . Então  $B_{\tau(\omega)}(\omega) \leq x$  e  $\tau(\omega) \leq t < t + \epsilon$ . Já que  $\tau_n(\omega) \downarrow \tau(\omega)$  e  $\tau(\omega) \leq t < t + \epsilon$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $m \geq n_0$  temos  $\tau_m(\omega) \leq t + \epsilon$ , isto é,  $\omega \in \{\tau_m \leq t + \epsilon\}$ .

Pela continuidade das trajetórias do Movimento Browniano, temos  $B_{\tau_m(\omega)}(\omega) \rightarrow B_{\tau(\omega)}(\omega)$ , quando  $m \rightarrow \infty$ . Logo, para cada  $k \in \mathbb{N}$  fixado, existe  $n_1(k) \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $m \geq n_1(k)$  temos

$$\left| B_{\tau_m(\omega)}(\omega) - B_{\tau(\omega)}(\omega) \right| < \frac{1}{k}.$$

Portanto, como  $B_{\tau(\omega)}(\omega) \leq x$ , segue que  $B_{\tau_m(\omega)}(\omega) \leq x + \frac{1}{k}$ , ou seja,  $\omega \in \{B_{\tau_m} \leq x + \frac{1}{k}\}$ .

Tomando  $n_k \equiv \max\{n_0, n_1(k)\}$ , concluímos que para todo  $m \geq n_k$  temos

$$\omega \in \{B_{\tau_m} \leq x + \frac{1}{k}\} \cap \{\tau_m \leq t + \epsilon\}$$

mostrando que  $\omega \in \bigcap_{m=n_k}^{\infty} \left( \{B_{\tau_m} \leq x + \frac{1}{k}\} \cap \{\tau_m \leq t + \epsilon\} \right)$  e portanto  $\omega \in A_{k,\epsilon}$ . Como o argumento é válido para todo  $k \in \mathbb{N}$ , concluímos que  $\omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{k,\epsilon}$ .

Reciprocamente, suponha que  $\omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{k,\epsilon}$ . Então, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $n_k \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $m \geq n_k$  temos

$$\omega \in \{B_{\tau_m} \leq x + \frac{1}{k}\} \cap \{\tau_m \leq t + \epsilon\}.$$

Em particular, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , existe uma sequência  $m_1(k) < m_2(k) < \dots$  com  $m_j(k) \rightarrow \infty$  tal que  $B_{\tau_{m_j(k)}(\omega)}(\omega) \leq x + \frac{1}{k}$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ .

Pela continuidade das trajetórias, temos

$$B_{\tau(\omega)}(\omega) = \lim_{j \rightarrow \infty} B_{\tau_{m_j(k)}(\omega)}(\omega) \leq x + \frac{1}{k}.$$

Logo,  $B_{\tau(\omega)}(\omega) \leq x + k^{-1}$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Fazendo  $k \rightarrow \infty$ , concluímos que  $B_{\tau(\omega)}(\omega) \leq x$ , isto é,  $\omega \in \{B_\tau \leq x\}$ .

Além disso, para verificar que  $\omega \in \{\tau \leq t\}$ , observe que para cada  $k \in \mathbb{N}$  e todo  $m \geq n_k$  temos  $\tau_m(\omega) \leq t + \epsilon$ . Como  $\tau_m(\omega) \downarrow \tau(\omega)$ , tomando o limite quando  $m \rightarrow \infty$ , obtemos  $\tau(\omega) \leq t + \epsilon$ . Como isto vale para todo  $\epsilon > 0$ , concluímos que  $\tau(\omega) \leq t$ . Portanto,  $\omega \in \{B_\tau \leq x\} \cap \{\tau \leq t\}$ , completando a verificação de (6).

De (6) e do fato que cada  $A_{k,\epsilon} \in \mathcal{F}_{t+\epsilon}$ , segue que  $\{B_\tau \leq x\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+\epsilon}$  para todo  $\epsilon > 0$ . Pela continuidade à direita da filtração, concluímos que  $\{B_\tau \leq x\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ .

Como  $t \in [0, +\infty)$  foi arbitrário, isto mostra que  $\{B_\tau \leq x\} \in \mathcal{F}_\tau$ . Como  $x \in \mathbb{R}$  também foi arbitrário, concluímos que  $B_\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é  $\mathcal{F}_\tau$ -mensurável, finalizando a demonstração. ■

**Teorema 5** (Propriedade de Markov Forte - Movimento Browniano). Seja  $\tau : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$  um tempo de parada, com respeito à  $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$  e defina

$$B_t^*(\omega) \equiv B_{\tau(\omega)+t} - B_{\tau(\omega)}(\omega) \quad (7)$$

Então  $\{B_t^* : t \in [0, +\infty)\}$  é um Movimento Browniano e além do mais ele é independente de  $\mathcal{F}_\tau$ , isto é,  $\sigma(B_t^* : t \in [0, +\infty))$  é independente de  $\mathcal{F}_\tau$ . Mais precisamente, para todos  $0 \leq t_1 < t_2 \dots < t_k$  e  $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$  e  $M \in \mathcal{F}_\tau$  temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{(B_{t_1}^*, \dots, B_{t_k}^*) \in H\} \cap M) &= \mathbb{P}((B_{t_1}^*, \dots, B_{t_k}^*) \in H) \mathbb{P}(M) \\ &= \mathbb{P}((B_{t_1}, \dots, B_{t_k}) \in H) \mathbb{P}(M). \end{aligned} \quad (8)$$

**Prova.** Veja referências [1, 2]. ■

## 4. O Princípio da Reflexão para o Movimento Browniano

**Teorema 6** (Princípio da Reflexão). Seja  $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$  um Movimento Browniano e  $\tau : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$  um tempo de parada. Então o seguinte processo estocástico

$$X_t \equiv \begin{cases} B_t, & \text{se } t \leq \tau; \\ B_\tau - (B_t - B_\tau), & \text{se } \tau \leq t. \end{cases} \quad (9)$$

é também um Movimento Browniano.

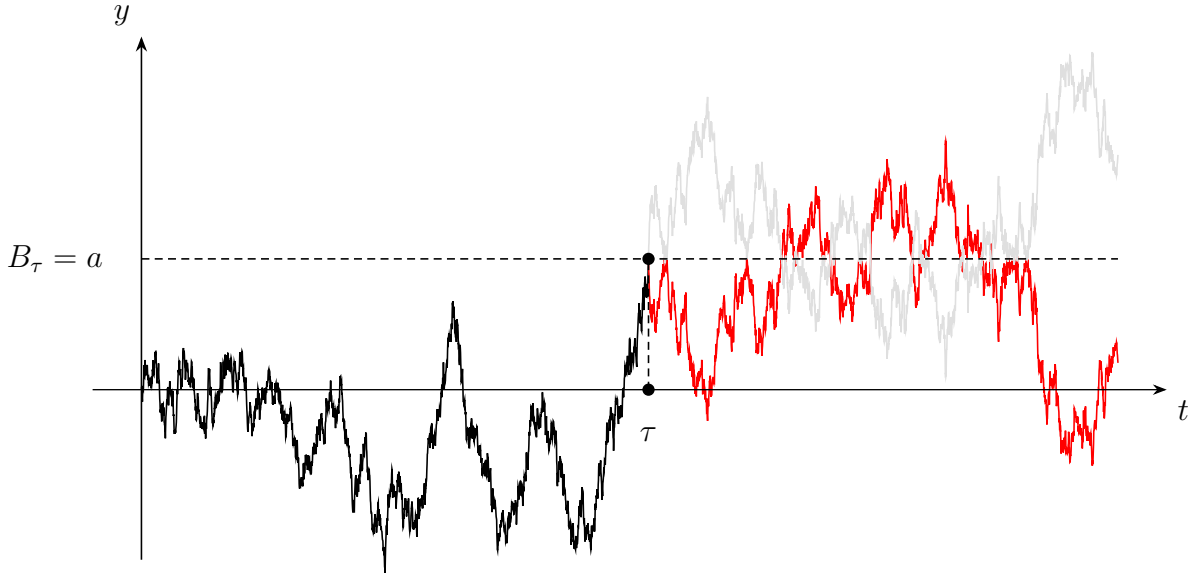


Figura 1: Trajetória do processo estocástico  $X_t$ . O gráfico de uma trajetória de  $X_t$  coincide com o gráfico de  $B_t$  (preto) até o instante  $\tau$  e após este instante o gráfico da trajetória é dado pela reflexão em torno da reta horizontal  $y = B_\tau$  da trajetória de  $B_t$  (vermelho).

**Prova.** Para mostrar que  $X_t$  é um Movimento Browniano é suficiente mostrar que as condições da (1) (2) e (3) são satisfeitas já que a continuidade das trajetórias  $t \mapsto X_t(\omega)$  segue imediatamente da definição de  $X_t$  e da continuidade das trajetórias do processo estocástico  $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$ .

Como as condições (1) (2) e (3) são completamente definidas pelas distribuições finito-dimensionais, então é suficiente verificar que para toda  $k$ -úpla ordenada de números reais  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$  e todo boreliano  $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$  temos

$$\mathbb{P}((B_{t_1}, \dots, B_{t_k}) \in H) = \mathbb{P}((X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \in H).$$

A prova da validade da igualdade acima será feita em duas partes. Na primeira parte vamos considerar que o tempo de parada  $\tau$  toma valores em um conjunto enumerável. Na segunda parte, usando um argumento padrão de aproximação, vamos mostrar que a igualdade acima é válida para um tempo de parada  $\tau$  arbitrário.

## Parte 1: O tempo de parada assume valores em um conjunto enumerável

Vamos supor inicialmente que  $\tau$  toma valores apenas em um subconjunto enumerável  $\tau(\Omega) \equiv \{r_j : j \in \mathbb{N}\} \subset [0, +\infty)$ . Desta forma, para provar a igualdade acima é suficiente mostrar que para cada  $j \in \mathbb{N}$  temos

$$\mathbb{P}(\{(B_{t_1}, \dots, B_{t_k}) \in H\} \cap \{\tau = r_j\}) = \mathbb{P}(\{(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \in H\} \cap \{\tau = r_j\}).$$

**Caso Bidimensional.** Por questão de simplicidade notacional vamos considerar inicialmente o caso bidimensional. Fixamos  $j \in \mathbb{N}$  e escolhemos um par  $0 \leq t_1 < t_2$ . Vamos decompor nossa análise nos seguintes casos:

- i)  $t_1 < t_2 \leq r_j$ ;
- ii)  $t_1 \leq r_j < t_2$ ;
- iii)  $r_j < t_1 < t_2$ .

**Caso i).** Neste caso temos da definição do processo estocástico  $\{X_t : t \in [0, +\infty)\}$  que  $(X_{t_1}, X_{t_2}) = (B_{t_1}, B_{t_2})$  e portanto

$$\mathbb{P}(\{(B_{t_1}, B_{t_2}) \in H\} \cap \{\tau = r_j\}) = \mathbb{P}(\{(X_{t_1}, X_{t_2}) \in H\} \cap \{\tau = r_j\}), \quad \forall H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

**Caso ii).** A prova da igualdade acima, no caso ii), será feita em duas etapas. Primeiro, vamos mostrar a validade de uma igualdade auxiliar e, em seguida, como consequência dela obtemos a igualdade desejada.

Sejam  $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  e  $J \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Já que  $t_1 \leq r_j < t_2$  estão fixos, segue da propriedade de independência dos incrementos do Movimento Browniano que o evento  $\{B_{t_2} - B_{r_j} \in J\}$  é independente da  $\sigma$ -álgebra  $\sigma(\{B_s : 0 \leq s \leq r_j\})$ . Em particular, os eventos  $\{B_{t_2} - B_{r_j} \in J\}$  e  $\{\tau = r_j\} \cap \{(B_{t_1}, B_{r_j}) \in I\}$  são independentes.

Usando estas observações, lembrando que  $B_{t_2} - B_{r_j} \stackrel{d}{=} -(B_{t_2} - B_{r_j})$  e que  $\tau = r_j$  implica  $B_{t_1} = X_{t_1}$  e  $B_{r_j} = X_{r_j}$ , então temos

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\{B_{t_2} - B_{r_j} \in J\} \cap \{\tau = r_j\} \cap \{(B_{t_1}, B_{r_j}) \in I\}) \\ & \quad \parallel \\ & \mathbb{P}(\{B_{t_2} - B_{r_j} \in J\}) \cdot \mathbb{P}(\{\tau = r_j\} \cap \{(B_{t_1}, B_{r_j}) \in I\}) \\ & \quad \parallel \\ & \mathbb{P}(\{-(B_{t_2} - B_{r_j}) \in J\}) \cdot \mathbb{P}(\{\tau = r_j\} \cap \{(B_{t_1}, B_{r_j}) \in I\}) \\ & \quad \parallel \\ & \mathbb{P}(\{-(B_{t_2} - B_{r_j}) \in J\} \cap \{\tau = r_j\} \cap \{(B_{t_1}, B_{r_j}) \in I\}) \\ & \quad \parallel \\ & \mathbb{P}(\{B_{r_j} - (B_{t_2} - B_{r_j}) - B_{r_j} \in J\} \cap \{\tau = r_j\} \cap \{(B_{t_1}, B_{r_j}) \in I\}) \\ & \quad \parallel \\ & \mathbb{P}(\{X_{t_2} - X_{r_j} \in J\} \cap \{\tau = r_j\} \cap \{(X_{t_1}, X_{r_j}) \in I\}). \end{aligned}$$

Se  $K$  denota o produto cartesiano  $I \times J$ , temos da igualdade acima que

$$\mathbb{P}\left(\{\tau = r_j\} \cap \{(B_{t_1}, B_{r_j}, B_{t_2} - B_{r_j}) \in K\}\right) = \mathbb{P}\left(\{\tau = r_j\} \cap \{(X_{t_1}, X_{r_j}, X_{t_2} - X_{r_j}) \in K\}\right)$$

Como a igualdade acima vale para borelianos arbitrários  $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  e  $J \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  segue do Teorema  $\pi$ - $\lambda$  de Dynkin que a igualdade acima é válida para todo  $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ .

Para cada  $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  fixado, defina

$$K_H \equiv \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : (u, v + w) \in H\}.$$

Tomando na igualdade anterior  $K = K_H$  ficamos com

$$\mathbb{P}(\{\tau = r_j\} \cap \{(B_{t_1}, B_{t_2}) \in H\}) = \mathbb{P}(\{\tau = r_j\} \cap \{(X_{t_1}, X_{t_2}) \in H\}), \quad \forall H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

**Caso *iii*.** Próximo passo é mostrar a validade da igualdade acima no caso *iii*)  $r_j < t_1 < t_2$ . Sejam  $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ ,  $J \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  e  $Y$  o vetor aleatório dado por

$$Y \equiv (B_{t_1} - B_{r_j}, B_{t_2} - B_{r_j}) \in \mathbb{R}^2.$$

Já que  $r_j < t_1 < t_2$ , segue da propriedade de independência dos incrementos que o evento  $\{Y \in I\}$  é independente de  $\sigma(\{B_s : 0 \leq s \leq r_j\})$ . Em particular,  $\{Y \in I\}$  é independente do evento  $\{\tau = r_j\} \cap \{B_{r_j} \in J\}$ . Como o vetor aleatório  $Y$  possui a mesma distribuição que o vetor aleatório  $(-Y)$  as seguintes igualdades são válidas

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{Y \in I\} \cap \{\tau = r_j\} \cap \{B_{r_j} \in J\}) &= \mathbb{P}(\{Y \in I\}) \cdot \mathbb{P}(\{\tau = r_j\} \cap \{B_{r_j} \in J\}) \\ &= \mathbb{P}(\{-Y \in I\}) \cdot \mathbb{P}(\{\tau = r_j\} \cap \{B_{r_j} \in J\}) \\ &= \mathbb{P}(\{-Y \in I\} \cap \{\tau = r_j\} \cap \{B_{r_j} \in J\}). \end{aligned}$$

Pela definição do processo estocástico  $\{X_t : t \in [0, +\infty)\}$ , temos

$$X_{r_j} = B_{r_j} \quad \text{e} \quad X_t - X_{r_j} = -(B_t - B_{r_j}), \quad \forall t \geq r_j.$$

Portanto,  $-Y = (X_{t_1} - X_{r_j}, X_{t_2} - X_{r_j})$ . Destas observações segue que para todo  $K$  da forma  $K \equiv I \times J \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$  temos

$$\mathbb{P}(\{\tau = r_j\} \cap \{(B_{t_1} - B_{r_j}, B_{t_2} - B_{r_j}, B_{r_j}) \in K\})$$

||

$$\mathbb{P}(\{\tau = r_j\} \cap \{(X_{t_1} - X_{r_j}, X_{t_2} - X_{r_j}, X_{r_j}) \in K\}).$$

Pelo Teorema  $\pi$ - $\lambda$  de Dynkin, a igualdade acima vale para todo  $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ .

Dado  $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ , considere o conjunto

$$K_H \equiv \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : (u + w, v + w) \in H\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3).$$

Note que tomando  $K = K_H$ , na última identidade, obtemos a igualdade desejada, isto é,

$$\mathbb{P}(\{\tau = r_j\} \cap \{(B_{t_1}, B_{t_2}) \in H\}) = \mathbb{P}(\{\tau = r_j\} \cap \{(X_{t_1}, X_{t_2}) \in H\}), \quad \forall H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

Juntando com os casos *i*) e *ii*) acima, concluímos, no caso bidimensional, que vale a seguinte igualdade

$$\mathbb{P}(\{\tau = r_j\} \cap \{(B_{t_1}, B_{t_2}) \in H\}) = \mathbb{P}(\{\tau = r_j\} \cap \{(X_{t_1}, X_{t_2}) \in H\}), \quad \forall H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

Como a coleção de eventos  $\{\tau = r_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  forma uma partição mensurável de  $\Omega$  concluímos que

$$\mathbb{P}((B_{t_1}, B_{t_2}) \in H) = \mathbb{P}((X_{t_1}, X_{t_2}) \in H), \quad \forall H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

**Caso Multidimensional.** Vamos agora estabelecer a validade da igualdade para uma  $k$ -úpla arbitrária  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$  e todo  $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ . Vamos mostrar então que para cada  $j \in \mathbb{N}$ , fixado temos

$$\mathbb{P}(\{\tau = r_j\} \cap \{(B_{t_1}, \dots, B_{t_k}) \in H\}) = \mathbb{P}(\{\tau = r_j\} \cap \{(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \in H\}). \quad (10)$$

Como no caso bidimensional, vamos novamente decompor nossa análise em três casos:

- i*)  $t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq r_j$ ;
- ii*)  $\exists m \in \{1, \dots, k-1\}$  tal que  $t_m \leq r_j < t_{m+1}$ ;
- iii*)  $r_j < t_1 < t_2 < \dots < t_k$ .

**Caso *i*.** Os eventos  $\{\tau = r_j\} \cap \{(B_{t_1}, \dots, B_{t_k}) \in H\}$  e  $\{\tau = r_j\} \cap \{(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \in H\}$  coincidem, pela definição do processo estocástico  $\{X_t : t \in [0, +\infty)\}$  e portanto a igualdade (10) é obviamente válida.

**Caso *ii*.** Sejam  $m \in \{1, \dots, k-1\}$  tal que  $t_m \leq r_j < t_{m+1}$ ,  $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k-m})$ ,  $J \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+1})$  e considere o vetor aleatório  $(k-m)$ -dimensional  $Y$  definido por

$$Y \equiv ((B_{t_{m+1}} - B_{r_j}), \dots, (B_{t_k} - B_{r_j}))$$

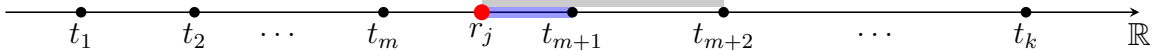


Figura 2: A figura ajuda a visualizar que o vetor  $(B_{t_1}, \dots, B_{t_m}, B_{r_j})$  cujas coordenadas são  $\mathcal{F}_{r_j}$  mensuráveis é independente do vetor de incrementos “futuros”  $(B_{t_{m+1}} - B_{r_j}, \dots, B_{t_k} - B_{r_j})$ .

Observe que cada um dos incrementos  $(B_{t_{m+1}} - B_{r_j}), (B_{t_{m+2}} - B_{r_j}), \dots, (B_{t_k} - B_{r_j})$  que formam as coordenadas do vetor  $Y$ , são independentes da  $\sigma$ -álgebra  $\sigma(\{B_s : 0 \leq s \leq r_j\})$  e, portanto, independentes do evento  $\{\tau = r_j\} \cap \{(B_{t_1}, \dots, B_{t_m}, B_{r_j}) \in J\}$ . Já que  $Y$  tem distribuição Gaussiana multivariada e simétrica então  $Y$  possui a mesma distribuição de  $(-Y)$ . Assim, concluímos destas observações que valem as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left( \left\{ \left( (B_{t_{m+1}} - B_{r_j}), \dots, (B_{t_k} - B_{r_j}) \right) \in I \right\} \cap \{\tau = r_j\} \cap \{(B_{t_1}, \dots, B_{t_m}, B_{r_j}) \in J\} \right) \\
& \quad \parallel \\
& \mathbb{P} \left( \{Y \in I\} \cap \{\tau = r_j\} \cap \{(B_{t_1}, \dots, B_{t_m}, B_{r_j}) \in J\} \right) \\
& \quad \parallel \\
& \mathbb{P}(Y \in I) \cdot \mathbb{P} \left( \{\tau = r_j\} \cap \{(B_{t_1}, \dots, B_{t_m}, B_{r_j}) \in J\} \right) \\
& \quad \parallel \\
& \mathbb{P}(-Y \in I) \cdot \mathbb{P} \left( \{\tau = r_j\} \cap \{(B_{t_1}, \dots, B_{t_m}, B_{r_j}) \in J\} \right) \\
& \quad \parallel \\
& \mathbb{P} \left( \{(-Y) \in I\} \cap \{\tau = r_j\} \cap \{(B_{t_1}, \dots, B_{t_m}, B_{r_j}) \in J\} \right). \tag{11}
\end{aligned}$$

Note que se  $\tau(\omega) = r_j$ , então temos:

- $X_{t_i}(\omega) = B_{t_i}(\omega)$ , para todo  $1 \leq i \leq m$ ;
- $X_{r_j}(\omega) = B_{r_j}(\omega)$ ;
- $(X_{t_i} - X_{r_j})(\omega) = (B_{r_j} - (B_{t_i} - B_{r_j}) - B_{r_j})(\omega) = -(B_{t_i} - B_{r_j})(\omega)$ ,  $\forall m+1 \leq i \leq k$ .

Neste caso vemos que os seguinte eventos coincidem

$$\begin{aligned}
& \{(-Y) \in I\} \cap \{\tau = r_j\} \cap \{(B_{t_1}, \dots, B_{t_m}, B_{r_j}) \in J\} \\
& \quad \parallel \\
& \left\{ \left( (X_{t_{m+1}} - X_{r_j}), \dots, (X_{t_k} - X_{r_j}) \right) \in I \right\} \cap \{\tau = r_j\} \cap \{(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}, X_{r_j}) \in J\}
\end{aligned}$$

Logo, segue da igualdade acima e de (4) que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left( \left\{ \left( (B_{t_{m+1}} - B_{r_j}), \dots, (B_{t_k} - B_{r_j}) \right) \in I \right\} \cap \{\tau = r_j\} \cap \{(B_{t_1}, \dots, B_{t_m}, B_{r_j}) \in J\} \right) \\
& \quad \parallel \\
& \mathbb{P} \left( \left\{ \left( (X_{t_{m+1}} - X_{r_j}), \dots, (X_{t_k} - X_{r_j}) \right) \in I \right\} \cap \{\tau = r_j\} \cap \{(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}, X_{r_j}) \in J\} \right).
\end{aligned}$$

Observando que a igualdade acima é válida para todos  $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k-m})$  e  $J \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+1})$  temos de mais uma aplicação do Teorema  $\pi$ - $\lambda$  de Dynkin que para todo  $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+1})$  vale a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left( \left\{ \left( B_{t_1}, \dots, B_{t_m}, B_{r_j}, (B_{t_{m+1}} - B_{r_j}), \dots, (B_{t_k} - B_{r_j}) \right) \in K \right\} \cap \{\tau = r_j\} \right) \\
& \quad \parallel \\
& \mathbb{P} \left( \left\{ \left( X_{t_1}, \dots, X_{t_m}, X_{r_j}, (X_{t_{m+1}} - X_{r_j}), \dots, (X_{t_k} - X_{r_j}) \right) \in K \right\} \cap \{\tau = r_j\} \right)
\end{aligned}$$

Para finalizar a prova deste caso, observamos que dado  $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ , se tomamos na igualdade acima  $K = K_H$ , onde

$$K_H \equiv \left\{ (x_1, \dots, x_{m+1}, \dots, x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} : (x_1, \dots, x_m, x_{m+2} + x_{m+1}, \dots, x_{k+1} + x_{m+1}) \in H \right\}$$

obtemos finalmente que

$$\mathbb{P}(\{\tau = r_j\} \cap \{(B_{t_1}, \dots, B_{t_k}) \in H\}) = \mathbb{P}(\{\tau = r_j\} \cap \{(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \in H\}),$$

o que, pelas observações anteriores, encerra a demonstração neste caso.

**Caso *iii*.** A demonstração neste caso usa argumentos semelhantes do caso anterior. A única diferença é que neste caso definimos o vetor  $Y$  como sendo um vetor aleatório  $k$ -dimensional

$$Y = ((B_{t_1} - B_{r_j}), \dots, (B_{t_k} - B_{r_j}))$$

Depois seguimos os mesmos passos do caso anterior. Calculamos

$$\mathbb{P}(\{Y \in I\} \cap \{\tau = r_j\} \cap \{B_{r_j} \in J\}),$$

usando a independência e a simetria de vetores Gaussianos multivariados com vetor de média zero. Por último, para obter (10) basta considerarmos o conjunto

$$K_H \equiv \{(x_1, \dots, x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} : (x_1 + x_{k+1}, \dots, x_k + x_{k+1}) \in H\}.$$

## Parte 2: Tempo de parada arbitrário

Agora suponha que  $\tau$  é um tempo de parada arbitrário. Considere a sequência  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , onde  $\tau_n : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , é dado por

$$\tau_n(\omega) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]}(\tau(\omega)).$$

Primeiro, observamos que a série que define  $\tau_n$  é convergente pois, na verdade, para cada  $\omega \in \Omega$  dado, esta série possui no máximo uma parcela não-nula.

Para verificar que  $\tau_n$  define um tempo de parada, basta observar que para cada  $t \in [0, +\infty)$  fixado, existe um único  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $k2^{-n} \leq t < (k+1)2^{-n}$ . Daí segue da definição de  $\tau_n$  que

$$\{\tau_n \leq t\} = \left\{ \tau \leq \frac{k}{2^n} \right\} \in \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}} \subseteq \mathcal{F}_t.$$

Desta observação segue que cada  $\tau_n$  é um tempo de parada.

Por construção, a sequência  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge pontualmente e monotonicamente para  $\tau$ . Mais precisamente  $\tau_n(\omega) \downarrow \tau(\omega)$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Seja  $X_t^{(n)}$  o processo definido como em (9), mas substituindo  $\tau$  por  $\tau_n$ . Isto é,

$$X_t^{(n)} \equiv \begin{cases} B_t, & \text{se } t \leq \tau_n; \\ B_{\tau_n} - (B_t - B_{\tau_n}), & \text{se } \tau_n \leq t. \end{cases} \quad (12)$$

Pela conclusão da Parte 1 desta demonstração, podemos afirmar que para cada  $k$ -úpla ordenada  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$  fixada, temos

$$(X_{t_1}^{(n)}, \dots, X_{t_k}^{(n)}) \stackrel{d}{=} (B_{t_1}, \dots, B_{t_k}), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Note que o processo estocástico  $X_t^{(n)}$  definido em (12), avaliado em cada  $\omega \in \Omega$  é dado pela seguinte expressão, para cada  $t \in [0, +\infty)$  fixado,

$$X_t^{(n)}(\omega) = B_t(\omega)\mathbb{1}_{[0, \tau_n(\omega)]}(t) + \left(B_{\tau_n(\omega)}(\omega) - (B_t(\omega) - B_{\tau_n(\omega)}(\omega))\right)\mathbb{1}_{(\tau_n(\omega), +\infty)}(t).$$

Lembrando que  $0 \leq \tau(\omega) \leq \tau_n(\omega)$ , concluímos que para todo  $\omega \in \Omega$  e  $n \in \mathbb{N}$  existe o seguinte limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{(\tau_n(\omega), +\infty)}(t) = \mathbb{1}_{(\tau(\omega), +\infty)}(t), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Consequentemente, segue da igualdade acima e da propriedade de continuidade das trajetórias do Movimento Browniano que para todo  $\omega \in \Omega$  e todo  $t \in [0, +\infty)$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} X_t^{(n)}(\omega) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( B_t(\omega)\mathbb{1}_{[0, \tau_n(\omega)]}(t) + \left(B_{\tau_n(\omega)}(\omega) - (B_t(\omega) - B_{\tau_n(\omega)}(\omega))\right)\mathbb{1}_{(\tau_n(\omega), +\infty)}(t) \right) \\ &= X_t(\omega). \end{aligned}$$

Para verificar que o limite acima converge para  $X_t(\omega)$  recomendamos que o leitor considere separadamente os casos  $\tau(\omega) = t$  e  $\tau(\omega) \neq t$ .

Em resumo, acima mostramos a convergência em distribuição e quase certa da sequência de vetores aleatórios abaixo

$$(X_{t_1}^{(n)}, \dots, X_{t_k}^{(n)}) \Rightarrow (B_{t_1}, \dots, B_{t_k}) \quad \text{e} \quad (X_{t_1}^{(n)}, \dots, X_{t_k}^{(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$$

Já que convergência no sentido quase certo implica na convergência em distribuição, segue das observações acima e da unicidade do limite em distribuição que

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \stackrel{d}{=} (B_{t_1}, \dots, B_{t_k}).$$

Como a escolha da  $k$ -úpla de tempos  $0 \leq t_1 < \dots < t_k$  foi arbitrária, segue que o processo  $\{X_t : t \geq 0\}$  possui as mesmas distribuições finito-dimensionais que o Movimento Browniano  $\{B_t : t \geq 0\}$ . Juntamente com a continuidade das trajetórias de  $X_t$ , que foi observada no início da prova, concluímos que  $\{X_t : t \geq 0\}$  é um Movimento Browniano. ■

## 5. O Princípio da Reflexão via Funções Características

Nesta seção apresentamos uma segunda prova do Teorema 6. A ideia central desta demonstração alternativa, consiste em comparar as funções características dos vetores aleatórios  $(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})$  e  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ . Vamos mostrar que estas funções características coincidem e então concluir, usando a Fórmula da Inversa, que estes dois vetores aleatórios possuem a mesma função de distribuição. Como o argumento é independente da escolha tempos  $0 \leq t_1 < \dots < t_k$  e de  $k \in \mathbb{N}$ , vamos poder concluir que os processos estocásticos  $\{B_t : t \geq 0\}$  e  $\{X_t : t \geq 0\}$  possuem as mesmas distribuições finito-dimensionais. Já que as trajetórias de  $X_t$  são contínuas isto permite concluir também que o processo estocástico  $\{X_t : t \in [0, +\infty)\}$  é um Movimento Browniano.

Mais precisamente vamos estabelecer a validade da seguinte igualdade. Para toda  $k$ -úpla ordenada de tempos  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$  fixados e para todo  $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k$ , temos

$$\varphi_B(\xi) \equiv \mathbb{E} \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^k \xi_j B_{t_j} \right) \right] = \mathbb{E} \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^k \xi_j X_{t_j} \right) \right] \equiv \varphi_X(\xi).$$

## Resultados Auxiliares

**Proposição 7.** Sejam  $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$  um Movimento Browniano padrão, definido sobre um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  e  $\tau : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$  um tempo de parada com respeito à filtração regular induzida pelo Movimento Browniano. Então, para cada  $s \in [0, +\infty)$  fixado, a variável aleatória  $B_s \cdot \mathbb{1}_{\{s \leq \tau\}}$  é  $\mathcal{F}_\tau$ -mensurável.

**Prova.** Para provar que  $B_s \cdot \mathbb{1}_{\{s \leq \tau\}}$  é  $\mathcal{F}_\tau$ -mensurável, precisamos verificar que para todo conjunto boreliano  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  e para todo  $t \in [0, +\infty)$ , vale a inclusão

$$\{B_s \cdot \mathbb{1}_{\{s \leq \tau\}} \in A\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Vamos dividir a demonstração em dois casos, de acordo com a relação de ordem entre os tempos fixados  $s$  e  $t$ .

Antes de prosseguir observamos que a variável aleatória  $B_s \cdot \mathbb{1}_{\{s \leq \tau\}}$  assume o valor  $B_s$  quando  $s \leq \tau$  e o valor zero quando  $s > \tau$ . Portanto, para todo  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , temos

$$\{B_s \cdot \mathbb{1}_{\{s \leq \tau\}} \in A\} = \begin{cases} (\{B_s \in A\} \cap \{s \leq \tau\}) \cup \{\tau < s\} & , \text{ se } 0 \in A; \\ \{B_s \in A\} \cap \{s \leq \tau\}, & \text{ se } 0 \notin A. \end{cases} \quad (13)$$

**Caso 1:** ( $s \leq t$ ). Vamos analisar cada uma das sentenças de (13) separadamente. Primeiro, suponha que  $0 \in A$ . Considere o conjunto  $\{B_s \in A\} \cap \{s \leq \tau\} \cap \{\tau \leq t\}$ . Podemos reescrever este conjunto como  $\{B_s \in A\} \cap \{s \leq \tau \leq t\}$ . Como  $s \leq t$ , segue que  $\{B_s \in A\} \in \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ .

Agora precisamos verificar que  $\{s \leq \tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ . Este conjunto pode ser escrito como

$$\{s \leq \tau \leq t\} = \{\tau \leq t\} \setminus \{\tau < s\}.$$

Como  $\tau$  é um tempo de parada, sabemos que  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ . Para o conjunto  $\{\tau < s\}$ , basta observar que  $\{\tau < s\} = \{\tau \leq s\} \setminus \{\tau = s\}$  e portanto  $\{\tau < s\} \in \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ . O que mostra que  $\{s \leq \tau \leq t\} = \{\tau \leq t\} \setminus \{\tau < s\} \in \mathcal{F}_t$  e consequentemente que

$$\{B_s \in A\} \cap \{s \leq \tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Para finalizar a análise da primeira sentença de (13) basta observar que segue do argumento acima que  $\{\tau < s\} \cap \{\tau \leq t\}$  também pertence a  $\mathcal{F}_t$ . Como a união dos dois conjuntos analisados pertence a  $\mathcal{F}_t$ , concluímos finalmente que ambas sentença (13) pertencem a  $\mathcal{F}_t$  e logo

$$\{B_s \cdot \mathbb{1}_{\{s \leq \tau\}} \in A\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

**Caso 2:** ( $t < s$ ). Neste caso, temos  $\{\tau \leq t\} \subseteq \{\tau < s\}$ . Portanto, para todo ponto  $\omega \in \{\tau \leq t\}$ , temos  $B_s(\omega) \cdot \mathbb{1}_{\{s \leq \tau\}}(\omega) = 0$ . O que mostra que (13) se reduz a

$$\{B_s \cdot \mathbb{1}_{\{s \leq \tau\}} \in A\} \cap \{\tau \leq t\} = \begin{cases} \{\tau \leq t\} & \text{se } 0 \in A, \\ \emptyset & \text{se } 0 \notin A. \end{cases}$$

Em ambos os casos, o conjunto resultante pertence a  $\mathcal{F}_t$ , pois  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  por definição de tempo de parada, e  $\emptyset \in \mathcal{F}_t$  sempre.

Como tanto no Caso 1 e no Caso 2 verificamos que para todo  $t \in [0, +\infty)$  e todo  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , temos

$$\{B_s \cdot \mathbb{1}_{\{s \leq \tau\}} \in A\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

concluímos que a v. a.  $B_s \cdot \mathbb{1}_{\{s \leq \tau\}}$  é  $\mathcal{F}_\tau$ -mensurável. ■

**Lema 8.** Seja  $\{B_s : s \in [0, +\infty)\}$  um Movimento Browniano sobre um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  e independente de uma sub- $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{G}$ . Seja  $T : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$  uma variável aleatória  $\mathcal{G}$ -mensurável. Então, para qualquer função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  contínua e de valor absoluto limitado temos

$$\mathbb{E}[f(B_T) | \mathcal{G}] = g(T)$$

onde  $g(t) = \mathbb{E}[f(B_t)]$  para cada  $t \in [0, +\infty)$  fixo.

**Prova.** Para demonstrar o lema vamos considerar separadamente os casos em que  $T$  toma valores em um conjunto enumerável e depois o caso em que  $T$  pode tomar valores em qualquer subconjunto de  $[0, +\infty)$ .

**Caso 1:  $T(\Omega)$  é enumerável.** Suponha que  $T$  toma valores em um conjunto enumerável e seja  $\{t_j : j \in \mathbb{N}\} = T(\Omega)$  uma enumeração arbitrária do conjunto imagem de  $T$ . Como estamos assumindo que  $T$  é uma variável aleatória  $\mathcal{G}$ -mensurável, para cada  $j \in \mathbb{N}$ , temos que o evento  $E_j = \{T = t_j\} \in \mathcal{G}$ . Além do mais, vale a seguinte igualdade

$$f(B_T) = \sum_{j=1}^{\infty} f(B_{t_j}) \mathbf{1}_{E_j}.$$

Como  $\|f\|_{\infty} < +\infty$ , e os eventos  $E_j$ 's são disjuntos temos que

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} f(B_{t_j}) \mathbf{1}_{E_j} \right| = \sum_{j=1}^{\infty} |f(B_{t_j})| \mathbf{1}_{E_j} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|f\|_{\infty} \mathbf{1}_{E_j} = \|f\|_{\infty} < +\infty.$$

Portanto segue do Teorema da Convergência Dominada para esperança condicional e de  $E_j \in \mathcal{G}$  que valem as seguintes igualdades

$$\mathbb{E}[f(B_T) | \mathcal{G}] = \mathbb{E} \left[ \sum_{j=1}^{\infty} f(B_{t_j}) \mathbf{1}_{E_j} \middle| \mathcal{G} \right] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}[f(B_{t_j}) \mathbf{1}_{E_j} | \mathcal{G}] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_j} \mathbb{E}[f(B_{t_j}) | \mathcal{G}].$$

Como estamos assumindo que o processo estocástico  $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$  é independente da sub- $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{G}$ , temos para cada  $t_j$  fixado que  $\mathbb{E}[f(B_{t_j}) | \mathcal{G}] = \mathbb{E}[f(B_{t_j})] = g(t_j)$ . Usando esta última observação na igualdade anterior, ficamos com

$$\mathbb{E}[f(B_T) | \mathcal{G}] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_j} \cdot g(t_j) = g(T)$$

o que encerra a prova do lema no caso em que a imagem de  $T$  é enumerável.

**Caso 2:  $T(\Omega) \subseteq [0, +\infty)$  arbitrário.** Seja  $T$  uma variável aleatória  $\mathcal{G}$ -mensurável arbitrária tomando valores em  $[0, +\infty)$ . Considere a seguinte sequência de variáveis aleatórias

$$T_n \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]} \circ T, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Observe que  $T_n$  é  $\mathcal{G}$ -mensurável (pois  $T$  é  $\mathcal{G}$ -mensurável) e toma valores no conjunto discreto  $\{k/2^n : k \in \mathbb{N}\}$ . Além do mais, temos que  $T \leq T_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n(\omega) \downarrow T(\omega)$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , para todo  $\omega \in \Omega$  e  $\sup\{|T_n(\omega) - T(\omega)| : \omega \in \Omega\} \leq 2^{-n}$ .

Como as trajetórias amostrais  $t \mapsto B_t(\omega)$  são contínuas, temos das observações acima que  $B_{T_n(\omega)}(\omega) \rightarrow B_{T(\omega)}(\omega)$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , para cada  $\omega \in \Omega$  fixado. Além disto, como  $f$  é contínua temos também que pontualmente  $f(B_{T_n}) \rightarrow f(B_T)$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Já que  $|f(B_{T_n})| \leq \|f\|_\infty$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , segue do Teorema da Convergência Dominada para esperanças condicionais que  $\mathbb{E}[f(B_{T_n}) | \mathcal{G}] \rightarrow \mathbb{E}[f(B_T) | \mathcal{G}]$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , (convergência em  $L^1$  e quase certa). Por outro lado, segue da igualdade estabelecida no Caso 1 que  $\mathbb{E}[f(B_{T_n}) | \mathcal{G}] = g(T_n)$ . Usando o Teorema da Convergência Dominada e mais uma vez a continuidade de  $f$  concluímos que  $g$  é uma função contínua. Portanto,  $g(T_n) = \mathbb{E}[f(B_{T_n})] \rightarrow \mathbb{E}[f(B_T)] = g(T)$ . Logo segue das observações feitas acima que

$$\mathbb{E}[f(B_T) | \mathcal{G}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(B_{T_n}) | \mathcal{G}] = \lim_{n \rightarrow \infty} g(T_n) = g(T),$$

o que encerra a prova do lema. ■

**Lema 9.** Seja  $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$  um Movimento Browniano independente de uma  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{G}$ . Sejam  $T_1, T_2, \dots, T_m : \Omega \rightarrow [0, +\infty)$  variáveis aleatórias  $\mathcal{G}$ -mensuráveis. Então, para qualquer função  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$  contínua e limitada temos

$$\mathbb{E}[f(B_{T_1}, B_{T_2}, \dots, B_{T_m}) | \mathcal{G}] = g(T_1, T_2, \dots, T_m)$$

onde  $g(t_1, t_2, \dots, t_m) = \mathbb{E}[f(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_m})]$  para cada  $(t_1, \dots, t_m) \in [0, +\infty)^m$  fixado.

**Prova.** A demonstração é idêntica a do Lema 8, bastando simplesmente substituir a notação de escalares por vetores, em cada passo. ■

**Cálculo da Função Característica Condicional.** Seja  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$  uma  $k$ -úpla de tempos fixados e  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k$ . A ideia é mostrar como usar os lemas provados acima para obter expressões mais explícitas (e idênticas) para as seguintes esperanças condicionais

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^k \xi_j B_{t_j} \right) \middle| \mathcal{F}_\tau \right] \quad \text{e} \quad \mathbb{E} \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^k \xi_j X_{t_j} \right) \middle| \mathcal{F}_\tau \right]. \quad (14)$$

Vamos começar trabalhando na expressão que aparece no lado esquerdo acima. Vamos reescrever a soma que aparece no argumento da exponencial como segue

$$\sum_{j=1}^k \xi_j B_{t_j} = \sum_{j=1}^k \xi_j B_{t_j} \mathbf{1}_{\{t_j \leq \tau\}} + \sum_{j=1}^k \xi_j B_{t_j} \mathbf{1}_{\{t_j > \tau\}}.$$

Aplicando a **Proposição 7**, podemos afirmar que cada parcela  $B_{t_j} \mathbf{1}_{\{t_j \leq \tau\}}$  do primeiro somatório é  $\mathcal{F}_\tau$ -mensurável. Portanto

$$\sum_{j=1}^k \xi_j B_{t_j} \mathbf{1}_{\{t_j \leq \tau\}} \quad \text{é } \mathcal{F}_\tau\text{-mensurável}$$

Os termos da segunda parcela, para os quais  $t_j > \tau$  podem ser convenientemente reescritos como segue

$$B_{t_j} \mathbf{1}_{\{t_j > \tau\}} = (B_\tau + (B_{t_j} - B_\tau)) \mathbf{1}_{\{t_j > \tau\}} = B_\tau \mathbf{1}_{\{t_j > \tau\}} + (B_{t_j} - B_\tau) \mathbf{1}_{\{t_j > \tau\}}$$

Desta forma aquele segundo somatório pode ser decomposto como segue

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^k \xi_j B_{t_j} \mathbb{1}_{\{t_j > \tau\}} &= \sum_{j=1}^k \xi_j B_\tau \mathbb{1}_{\{t_j > \tau\}} + \sum_{j=1}^k \xi_j (B_{t_j} - B_\tau) \mathbb{1}_{\{t_j > \tau\}} \\ &= B_\tau \sum_{j=1}^k \xi_j \mathbb{1}_{\{t_j > \tau\}} + \sum_{j=1}^k \xi_j (B_{t_j} - B_\tau) \mathbb{1}_{\{t_j > \tau\}}\end{aligned}$$

Como  $B_\tau$  é  $\mathcal{F}_\tau$ -mensurável (Teorema 4) e cada  $\mathbb{1}_{\{t_j > \tau\}}$  é  $\mathcal{F}_\tau$ -mensurável, segue que o primeiro somatório acima é  $\mathcal{F}_\tau$ -mensurável.

Segue da Propriedade de Markov Forte (Teorema 5), que o processo  $B_s^* = B_{\tau+s} - B_\tau$  é um Movimento Browniano e além do mais, independente da  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_\tau$ . Observamos também que segue diretamente da definição do processo  $B_t^*$  que valem as seguintes igualdades

$$(B_{t_j} - B_\tau) \mathbb{1}_{\{t_j > \tau\}} = B_{t_j - \tau}^* \mathbb{1}_{\{t_j > \tau\}} = B_{(t_j - \tau) \mathbb{1}_{\{t_j > \tau\}}}^* \mathbb{1}_{\{t_j > \tau\}}.$$

Para facilitar a notação, para cada  $j = 1, \dots, k$ , definimos a variável aleatória

$$T_j \equiv (t_j - \tau) \mathbb{1}_{\{t_j > \tau\}}. \quad (15)$$

É claro por sua expressão que cada uma das  $T_j$ 's é uma variável aleatória  $\mathcal{F}_\tau$ -mensurável (que assume o valor  $(t_j - \tau)$ , quando  $t_j > \tau$  e o valor 0, quando  $t_j \leq \tau$ ). Já que  $B_0^* = 0$ , então a igualdade acima pode ser simplificada da seguinte maneira

$$(B_{t_j} - B_\tau) \mathbb{1}_{\{t_j > \tau\}} = B_{(t_j - \tau) \mathbb{1}_{\{t_j > \tau\}}}^* \cdot \mathbb{1}_{\{t_j > \tau\}} = B_{T_j}^*.$$

Assim, segue das observações acima que é válida a seguinte igualdade:

$$\sum_{j=1}^k \xi_j B_{t_j} = \sum_{j=1}^k \xi_j B_{t_j} \mathbb{1}_{\{t_j \leq \tau\}} + B_\tau \sum_{j=1}^k \xi_j \mathbb{1}_{\{t_j > \tau\}} + \sum_{j=1}^k \xi_j B_{T_j}^*$$

Como observado anteriormente as duas primeiras somas são v.a.'s  $\mathcal{F}_\tau$ -mensuráveis, logo podem ser movidas para fora da esperança condicional, com respeito a  $\mathcal{F}_\tau$ . Para a terceira soma veremos que o **Lema 9** pode ser aplicado. Assim temos

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^k \xi_j B_{t_j} \right) \middle| \mathcal{F}_\tau \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^k \xi_j B_{t_j} \mathbb{1}_{\{t_j \leq \tau\}} + i B_\tau \sum_{j=1}^k \xi_j \mathbb{1}_{\{t_j > \tau\}} + i \sum_{j=1}^k \xi_j B_{T_j}^* \right) \middle| \mathcal{F}_\tau \right] \\ &= \exp \left( i \sum_{j=1}^k \xi_j B_{t_j} \mathbb{1}_{\{t_j \leq \tau\}} + i B_\tau \sum_{j=1}^k \xi_j \mathbb{1}_{\{t_j > \tau\}} \right) \mathbb{E} \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^k \xi_j B_{T_j}^* \right) \middle| \mathcal{F}_\tau \right].\end{aligned}$$

Para o cálculo da esperança condicional restante, podemos aplicar o **Lema 9**, com a função  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{C}$  sendo dada por  $f(x_1, \dots, x_k) \equiv \exp(i \sum_{j=1}^k \xi_j x_j)$  e a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{G} = \mathcal{F}_\tau$ . Logo

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^k \xi_j B_{T_j}^* \right) \middle| \mathcal{F}_\tau \right] = g(T_1, \dots, T_k) = g((t_1 - \tau)^+, \dots, (t_k - \tau)^+)$$

onde

$$g(v_1, \dots, v_k) = \mathbb{E} \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^k \xi_j B_{v_j}^* \right) \right]. \quad (16)$$

Como  $\{B_t^* : t \in [0, +\infty)\}$  é um movimento Browniano sabemos que, para quaisquer  $v_1, \dots, v_k \in [0, +\infty)$  distintos e fixados, que o vetor  $(B_{v_1}^*, \dots, B_{v_k}^*)$  é um vetor Gaussiano, com vetor de médias zero e matriz de covariância dada por

$$\Sigma_{j\ell} = \text{Cov}(B_{v_j}^*, B_{v_\ell}^*) = \min\{v_j, v_\ell\}.$$

Usando a fórmula da função característica de um vetor Gaussiano temos

$$g(v_1, \dots, v_k) = \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{\ell=1}^k \xi_j \xi_\ell \min\{v_j, v_\ell\} \right).$$

O que estabelece a seguinte igualdade

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^k \xi_j B_{V_j}^* \right) \middle| \mathcal{F}_\tau \right] = \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{\ell=1}^k \xi_j \xi_\ell \min\{(t_j - \tau)^+, (t_\ell - \tau)^+\} \right).$$

Reunindo as observações acima, concluímos finalmente que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^k \xi_j B_{t_j} \right) \middle| \mathcal{F}_\tau \right] &= \exp \left( i \sum_{j=1}^k \xi_j B_{t_j} \mathbb{1}_{\{t_j \leq \tau\}} \right) \cdot \exp \left( i B_\tau \sum_{j=1}^k \xi_j \mathbb{1}_{\{t_j > \tau\}} \right) \\ &\quad \times \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{\ell=1}^k \xi_j \xi_\ell \min\{(t_j - \tau)^+, (t_\ell - \tau)^+\} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Vamos mostrar agora como calcular a esperança condicional em (14) associada ao processo refletido. Lembramos que  $X_{t_j} = B_{t_j} \mathbb{1}_{\{t_j \leq \tau\}} + (B_\tau - (B_{t_j} - B_\tau)) \mathbb{1}_{\{t_j > \tau\}}$ . Logo, temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \xi_j X_{t_j} &= \sum_{j=1}^k \xi_j B_{t_j} \mathbb{1}_{\{t_j \leq \tau\}} + \sum_{j=1}^k \xi_j (B_\tau - (B_{t_j} - B_\tau)) \mathbb{1}_{\{t_j > \tau\}} \\ &= \sum_{j=1}^k \xi_j B_{t_j} \mathbb{1}_{\{t_j \leq \tau\}} + B_\tau \sum_{j=1}^k \xi_j \mathbb{1}_{\{t_j > \tau\}} - \sum_{j=1}^k \xi_j (B_{t_j} - B_\tau) \mathbb{1}_{\{t_j > \tau\}} \\ &= \sum_{j=1}^k \xi_j B_{t_j} \mathbb{1}_{\{t_j \leq \tau\}} + B_\tau \sum_{j=1}^k \xi_j \mathbb{1}_{\{t_j > \tau\}} - \sum_{j=1}^k \xi_j B_{T_j}^*, \end{aligned}$$

onde  $T_j$  também é definido como em (15). Note que embora muito semelhante, há uma diferença importante na expressão acima, com respeito ao caso anterior, que é o sinal negativo presente em frente a soma  $\sum_{j=1}^k \xi_j B_{T_j}^*$ .

Observe que, argumentando como no caso anterior, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^k \xi_j B_{t_j} \right) \middle| \mathcal{F}_\tau \right] \\ = \exp \left( i \sum_{j=1}^k \xi_j B_{t_j} \mathbb{1}_{\{t_j \leq \tau\}} + i B_\tau \sum_{j=1}^k \xi_j \mathbb{1}_{\{t_j > \tau\}} \right) \mathbb{E} \left[ \exp \left( -i \sum_{j=1}^k \xi_j B_{T_j}^* \right) \middle| \mathcal{F}_\tau \right]. \end{aligned}$$

Além do mais, outra aplicação do **Lema 9** fornece

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left( -i \sum_{j=1}^k \xi_j B_{T_j}^* \right) \middle| \mathcal{F}_\tau \right] = h(T_1, \dots, T_k), \text{ onde } h(v_1, \dots, v_k) = \mathbb{E} \left[ \exp \left( -i \sum_{j=1}^k \xi_j B_{v_j}^* \right) \right].$$

Como o vetor  $(B_{v_1}^*, \dots, B_{v_k}^*)$  é Gaussiano, com vetor de médias nulo, ele possui a mesma distribuição que  $-(B_{v_1}^*, \dots, B_{v_k}^*)$ . Portanto

$$h(v_1, \dots, v_k) = \mathbb{E} \left[ \exp \left( -i \sum_{j=1}^k \xi_j B_{v_j}^* \right) \right] = \mathbb{E} \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^k \xi_j (-B_{v_j}^*) \right) \right] = g(v_1, \dots, v_k),$$

onde  $g$  é a função definida (16). Portanto, segue das igualdades acima que a seguinte igualdade é válida

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^k \xi_j X_{t_j} \right) \middle| \mathcal{F}_\tau \right] &= \exp \left( i \sum_{j=1}^k \xi_j B_{t_j} \mathbb{1}_{\{t_j \leq \tau\}} \right) \cdot \exp \left( i B_\tau \sum_{j=1}^k \xi_j \mathbb{1}_{\{t_j > \tau\}} \right) \\ &\quad \times \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{\ell=1}^k \xi_j \xi_\ell \min\{(t_j - \tau)^+, (t_\ell - \tau)^+\} \right). \quad (18) \end{aligned}$$

Observando que as expressões em (17) e (18) coincidem temos então a seguinte igualdade

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^k \xi_j B_{t_j} \right) \middle| \mathcal{F}_\tau \right] = \mathbb{E} \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^k \xi_j X_{t_j} \right) \middle| \mathcal{F}_\tau \right].$$

Tomando esperança em ambos os lados, obtemos finalmente

$$\varphi_B(\xi) = \mathbb{E} \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^k \xi_j B_{t_j} \right) \right] = \mathbb{E} \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^k \xi_j X_{t_j} \right) \right] = \varphi_X(\xi).$$

Como a igualdade acima é válida para toda  $k$ -úpla  $0 \leq t_1 < \dots < t_k$  e todo  $\xi \in \mathbb{R}^k$ , concluímos que os processos  $\{B_t : t \geq 0\}$  e  $\{X_t : t \geq 0\}$  possuem as mesmas distribuições finito-dimensionais. Lembrando que o processo estocástico  $\{X_t : t \in [0, +\infty)\}$  possui trajetórias contínuas (consequência direta de (9)), concluímos que  $\{X_t : t \geq 0\}$  é um Movimento Browniano e assim encerramos esta demonstração alternativa do **Teorema 6**.

## 6. Aplicações: Distribuição do Máximo do Movimento Browniano

O objetivo desta seção é obter uma expressão explícita para a função de distribuição da variável aleatória

$$M_t \equiv \sup_{0 \leq s \leq t} B_s. \quad (19)$$

Abaixo mostramos como a dedução da fórmula para a função de distribuição de  $M_t$  pode ser obtida por meio do Princípio da Reflexão ([Teorema 6](#)) e da Propriedade de Markov Forte ([Teorema 5](#)).

**Teorema 10.** Seja  $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$  um Movimento Browniano e para cada  $t \in [0, +\infty)$  defina  $M_t$  como em (19). Então, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , temos

$$\mathbb{P}(M_t \geq x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

**Prova.** Fixe  $x > 0$  e defina

- $\tau = \inf\{s \in [0, +\infty) : B_s \geq x\}$  (primeiro instante de contato do Movimento Browniano  $B_t$  com intervalo  $[x, +\infty)$ );
- $X_t$  o processo refletido, ao longo da reta horizontal  $y = x$ , no tempo  $\tau$  (como em (9));
- $\rho = \inf\{s \in [0, +\infty) : X_s \geq x\}$  (primeiro instante de contato do processo refletido  $X_t$  com o intervalo  $[x, +\infty)$ ).

Note que pela definição do processo refletido, temos para todo  $t < \tau$  que  $X_t = B_t$ . Portanto, o primeiro instante em que  $\{X_t : t \in [0, +\infty)\}$  atinge  $x$  é exatamente o primeiro instante em que  $\{B_t : t \in [0, +\infty)\}$  atinge  $x$ , e consequentemente

$$\tau = \rho.$$

Observe que segue diretamente da definição de  $M_t$  que  $\mathbb{P}(M_t \geq x) = \mathbb{P}(\tau \leq t)$  pois, o máximo até o tempo  $t$  é maior ou igual a  $x$  se, e somente se, o processo atingiu  $x$  em algum momento anterior ou no instante  $t$ . Assim temos

$$\mathbb{P}(M_t \geq x) = \mathbb{P}(\tau \leq t) = \mathbb{P}(\tau \leq t, B_t \leq x) + \mathbb{P}(\tau \leq t, B_t \geq x).$$

Pelo Princípio da Reflexão ([Teorema 6](#)),  $X_t$  é um Movimento Browniano, logo tem a mesma distribuição que  $B_t$  e como  $\tau = \rho$ , temos que a primeira parcela, do lado direito, da igualdade acima satisfaz

$$\mathbb{P}(\tau \leq t, B_t \leq x) = \mathbb{P}(\rho \leq t, X_t \leq x) = \mathbb{P}(\tau \leq t, X_t \leq x)$$

Além do mais, se ocorre o evento  $\{\tau \leq t\}$ , segue da definição do processo refletido e de  $\tau$  que  $X_t = B_\tau - (B_t - B_\tau) = 2B_\tau - B_t = 2x - B_t$ . Portanto, se ocorre o evento  $\{\tau \leq t\}$  temos  $X_t \leq x \Leftrightarrow 2x - B_t \leq x \Leftrightarrow B_t \geq x$ . Logo  $\mathbb{P}(\tau \leq t, X_t \leq x) = \mathbb{P}(\tau \leq t, B_t \geq x)$ .

Usando estas igualdades nas expressões anteriores concluímos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_t \geq x) &= \mathbb{P}(\tau \leq t) = \mathbb{P}(\tau \leq t, B_t \leq x) + \mathbb{P}(\tau \leq t, B_t \geq x) \\ &= \mathbb{P}(\tau \leq t, B_t \geq x) + \mathbb{P}(\tau \leq t, B_t \geq x) \\ &= 2\mathbb{P}(\tau \leq t, B_t \geq x). \end{aligned}$$

Note que se ocorre o evento  $\{B_t \geq x\}$ , então o processo já atingiu o nível  $x$  em algum momento no intervalo  $[0, t]$ , logo o evento  $\{\tau \leq t\}$  também ocorre. Desta observação podemos concluir que  $\{B_t \geq x\} \subseteq \{\tau \leq t\}$ . Usando esta continência na última igualdade acima ficamos com

$$\mathbb{P}(M_t \geq x) = \mathbb{P}(\tau \leq t) = 2\mathbb{P}(\tau \leq t, B_t \geq x) = 2\mathbb{P}(B_t \geq x).$$

Como  $B_t \sim N(0, t)$ , temos

$$\mathbb{P}(B_t \geq x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{u^2}{2t}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{t}}}^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

e conseqüentemente

$$\mathbb{P}(M_t \geq x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{t}}}^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

o que encerra a prova do teorema. ■

Observamos que o ponto crucial desta prova é que a reflexão do processo  $B_t$  em torno da reta  $y = x$  “troca” as trajetórias que atingem  $x$  e terminam abaixo de  $x$ , por trajetórias que atingem  $x$  e terminam acima de  $x$ . Como, por simetria, essas duas classes têm a mesma probabilidade e a segunda classe é exatamente  $\{B_t \geq x\}$ , obtemos a peça chave  $\mathbb{P}(\tau \leq t) = 2\mathbb{P}(B_t \geq x)$  o que permite identificar explicitamente a distribuição de  $M_t$ .

## 7. Aplicações: Distribuição dos Pontos de Contato em Dimensão 2

Sejam  $B_t^{(1)}$  e  $B_t^{(2)}$  Movimentos Brownianos independentes começando da origem e definidos sobre um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Considere o tempo de parada  $\tau$ , definido como o primeiro instante em que o processo  $B_t \equiv (B_t^{(1)}, B_t^{(2)})$  toca a reta vertical

$$\ell_a \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a\},$$

onde  $a > 0$  é fixado. Equivalentemente,

$$\tau \equiv \inf\{t \in [0, +\infty) : B_t^{(1)} = a\}$$

O objetivo é mostrar que a variável aleatória  $B_\tau^{(2)}$ , o valor da segunda coordenada do processo no tempo aleatório  $\tau$ , determinado pela primeira coordenada possui uma função de densidade de probabilidade dada pela distribuição de Cauchy:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2}.$$

Como veremos a prova deste fato se baseia fundamentalmente no princípio da reflexão do Movimento Browniano e na independência entre os dois processos.

Nosso primeiro passo será determinar a densidade do tempo de parada  $\tau$ . Para isto vamos calcular  $F_\tau(t) = \mathbb{P}(\tau \leq t)$ . Note que se ocorre o evento  $\{\tau \leq t\}$ , então isto significa que o processo  $B_s^{(1)}$  atingiu o nível  $x = a$  em algum instante  $s \in [0, t]$ . Isso é equivalente a dizer que o máximo (supremo) do processo em  $[0, t]$  é maior ou igual a  $a$ , ou seja,

$$\mathbb{P}(\tau \leq t) = \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} B_s^{(1)} \geq a\right).$$

Aplicando o [Teorema 10](#) para  $B_t^{(1)}$  temos, para todo  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned}
F_\tau(t) &= \mathbb{P}(\tau \leq t) = \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} B_s^{(1)} \geq a\right) = \mathbb{P}(M_t \geq a) \\
&= 2\mathbb{P}(B_t^{(1)} \geq a) \\
&= 2 \int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
&= 2 \left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right),
\end{aligned}$$

onde  $\Phi$  denota a função de distribuição de uma v.a. com distribuição normal padrão. Agora, basta calcular a derivada, com respeito a  $t$ , para obter a função de densidade de  $\tau$ . Pela regra da cadeia temos

$$f_\tau(t) = \frac{d}{dt} \left[ 2 \left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right) \right] = -2\phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) \cdot \frac{d}{dt} \left(at^{-\frac{1}{2}}\right),$$

onde  $\phi$  denota a função de densidade de uma normal padrão. Calculando a derivada restante, podemos reescrever a expressão acima de maneira mais explícita como segue

$$f_\tau(t) = -2 \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2t}} \right) \left( -\frac{1}{2} \right) at^{-\frac{3}{2}} \quad (20)$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{a^2}{2t}}, \quad \forall t \in (0, +\infty). \quad (21)$$

Note que este é um caso particular de uma distribuição de Lévy.

Próximo passo é determinar a densidade da variável aleatória  $B_\tau^{(2)}$ . Para isto vamos considerar uma construção particular do Movimento Browniano bidimensional que é feita da seguinte maneira. Primeiro, observamos que usando o Teorema da Existência de Kolmogorov podemos construir concretamente um Movimento Browniano padrão unidimensional usando o processo de coordenadas  $\{\pi_t : t \in [0, +\infty)\}$  definido sobre um subespaço apropriado do espaço produto  $(\mathbb{R}^{[0, +\infty)}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , onde  $\mathbb{P}$  é uma medida de probabilidade adequadamente escolhida e  $\pi_t(\omega) = \omega(t)$ , para cada  $\omega \in \mathbb{R}^{[0, +\infty)}$ . Por questão de simplicidade vamos usar a notação  $\Omega$  para denotar este subconjunto do espaço produto  $\mathbb{R}^{[0, +\infty)}$ . A partir desta construção, podemos também construir concretamente dois Movimentos Brownianos independentes usando o espaço produto

$$(\Omega \times \Omega, \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}, \mathbb{P} \times \mathbb{P})$$

e as funções  $\pi_t^{(1)} : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\pi_t^{(2)} : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$\pi_t^{(1)}(\omega_1, \omega_2) \equiv \omega_1(t) \quad \text{e} \quad \pi_t^{(2)}(\omega_1, \omega_2) \equiv \omega_2(t),$$

respectivamente.

Transpondo para a notação usual temos  $B_t^{(1)}(\omega_1, \omega_2) \equiv \omega_1(t)$  e  $B_t^{(2)}(\omega_1, \omega_2) \equiv \omega_2(t)$ . Observe também que podemos construir o tempo de parada  $\tau$  no espaço de probabilidade descrito acima, olhando para a função, quase certamente finita, definida por

$$\Omega \times \Omega \ni (\omega_1, \omega_2) \longmapsto \tau(\omega_1, \omega_2) \equiv \inf\{t \in [0, +\infty) : B_t^{(1)}(\omega_1, \omega_2) = a\}.$$

Note que, por construção,  $\tau$  é mensurável com respeito  $\sigma(B_t^{(1)} : t \in [0, +\infty))$  e consequentemente não depende da variável  $\omega_2$ , isto é,  $\tau(\omega_1, \omega_2) = \tau(\omega_1, \eta_2)$ , para quaisquer  $\omega_2, \eta_2 \in \Omega$ . Além do mais, temos diretamente das definições que a variável aleatória  $\tau$  é independente do processo estocástico  $\{B_t^{(2)} : t \in [0, +\infty)\}$ .

Também sabemos das propriedades elementares da esperança condicional que para cada função  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e limitada vale a igualdade

$$\mathbb{E} [\varphi(B_\tau^{(2)}) | \sigma(\tau)] = \psi(\tau),$$

quase certamente, para alguma função Borel mensurável  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Próximo passo é mostrar que se  $\xi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  denota a função definida por

$$\xi(t) = \mathbb{E} [\varphi(B_t^{(2)})] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \exp\left(\frac{-x^2}{2t}\right) dx,$$

então  $\psi(\tau) = \xi(\tau)$ , quase certamente. Para provar esta afirmação considere um evento arbitrário  $G \in \sigma(\tau)$ . Então segue diretamente das definições que

$$\mathbb{E} [\mathbf{1}_G \cdot \varphi(B_\tau^{(2)})] = \mathbb{E} [\mathbf{1}_G \cdot \mathbb{E} [\varphi(B_\tau^{(2)}) | \sigma(\tau)]] = \mathbb{E} [\mathbf{1}_G \cdot \psi(\tau)]$$

Usando a construção descrita acima podemos reescrever a última igualdade como segue

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{\Omega} \mathbf{1}_G(\omega_1, \omega_2) \cdot \varphi(B_{\tau(\omega_1, \omega_2)}^{(2)}(\omega_1, \omega_2)) d\mathbb{P}(\omega_1) d\mathbb{P}(\omega_2) \\ & \quad \parallel \\ & \int_{\Omega} \int_{\Omega} \mathbf{1}_G(\omega_1, \omega_2) \cdot \psi(\tau(\omega_1, \omega_2)) d\mathbb{P}(\omega_1) d\mathbb{P}(\omega_2). \end{aligned}$$

Já que  $\mathbf{1}_G$  é mensurável, com respeito  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\tau$ , podemos escrever, abusando um pouco da notação, que

$$\mathbf{1}_G(\omega_1, \omega_2) = \mathbf{1}_G(\omega_1), \quad \tau(\omega_1, \omega_2) = \tau(\omega_1) \quad \text{e} \quad \varphi(B_{\tau(\omega_1, \omega_2)}^{(2)}(\omega_1, \omega_2)) = \varphi(B_{\tau(\omega_1)}^{(2)}(\omega_2)).$$

Portanto, segue do Teorema de Fubini-Tonelli e da igualdade acima que

$$\int_{\Omega} \mathbf{1}_G(\omega_1) \left[ \int_{\Omega} \varphi(B_{\tau(\omega_1)}^{(2)}(\omega_2)) d\mathbb{P}(\omega_2) \right] d\mathbb{P}(\omega_1) = \int_{\Omega} \mathbf{1}_G(\omega_1) \cdot \psi(\tau(\omega_1)) d\mathbb{P}(\omega_1), \quad \forall G \in \sigma(\tau).$$

Usando a propriedade de continuidade das trajetórias do Movimento Browniano, que ele parte da origem e que  $a > 0$ , podemos verificar que  $\tau > 0$ , quase certamente e portanto segue da igualdade acima e da definição da função  $\xi$  que para  $\mathbb{P}$ -quase todo  $\omega_1 \in \Omega$ , temos

$$\begin{aligned} \psi(\tau(\omega_1)) &= \int_{\Omega} \varphi(B_{\tau(\omega_1)}^{(2)}(\omega_2)) d\mathbb{P}(\omega_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau(\omega_1)}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \exp\left(\frac{-x^2}{2\tau(\omega_1)}\right) dx. \\ &= \xi(\tau(\omega_1)). \end{aligned}$$

Usando a fórmula da densidade de  $\tau$  dada em (20) temos, para toda função  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e limitada que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [\varphi(B_\tau^{(2)})] &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [\varphi(B_\tau^{(2)}) | \sigma(\tau)]] \\
&= \mathbb{E}[\psi(\tau)] \\
&= \int_{\Omega} \xi(\tau(\omega_1)) d\mathbb{P}(\omega_1) \\
&= \int_0^\infty \xi(t) f_\tau(t) dt \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[ \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \exp\left(\frac{-x^2}{2t}\right) dx \right] \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \left[ \int_0^\infty \frac{a}{2\pi t^2} \exp\left(\frac{-(x^2 + a^2)}{2t}\right) dt \right] dx.
\end{aligned}$$

O que mostra que a v.a.  $B_\tau^{(2)}$  possui densidade dada pela expressão

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{a}{2\pi t^2} \exp\left(\frac{-(x^2 + a^2)}{2t}\right) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Para calcular a integral restante, podemos considerar a mudança de variáveis  $u = 1/t$ . Neste caso temos  $t = 1/u$  e  $dt = (-1/u^2)du$ . Quanto aos limites de integração:

- quando  $t \rightarrow 0^+$ , temos  $u \rightarrow +\infty$ ;
- quando  $t \rightarrow +\infty$ , temos que  $u \rightarrow 0^+$ .

Substituindo na integral ficamos com

$$f(x) = \frac{a}{2\pi} \int_\infty^0 u^2 \exp\left(-\frac{(x^2 + a^2)u}{2}\right) \left(-\frac{1}{u^2}\right) du.$$

O termo  $u^2$  cancela com  $1/u^2$ , e o sinal negativo inverte os limites de integração fornecendo

$$f(x) = \frac{a}{2\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(x^2 + a^2)u}{2}\right) du.$$

Para finalizar observamos que esta integral é uma integral exponencial padrão da forma  $\int_0^\infty e^{-cu} du = 1/c$ . Neste caso, a constante é  $c = (x^2 + a^2)/2$ . Logo

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2}u\right) du = \frac{1}{\frac{x^2 + a^2}{2}} = \frac{2}{x^2 + a^2}.$$

Substituindo esta igualdade na última expressão chegamos finalmente a fórmula

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2}.$$

## Referências

- [1] P. Billingsley. *Probability and measure*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, anniversary edition, 2012. With a foreword by Steve Lalley and a brief biography of Billingsley by Steve Koppes.
- [2] L. Cioletti and L. Lucinger. O Teorema da Existência de Kolmogorov e o Movimento Browniano. <https://mat.unb.br/cioletti/ensino/kolmogorov-browniano.pdf>, 2025.
- [3] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.