Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Uma Abordagem Probabilística para o Problema da Separabilidade de Espaços de Funções Contínuas

L. Cioletti

27 de Maio de 2025

Resumo

Neste artigo, estudamos o problema da separabilidade de certos espaços de funções contínuas usando ferramentas da Teoria de Probabilidade. Vamos mostrar que os espaços de Banach $(C([a,b],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ (funções à valores reais, contínuas e definidas sobre o intervalo compacto $[a,b]$) e $(C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ (funções à valores reais, contínuas que se anulam no infinito) são espaços de Banach separáveis. A prova da separabilidade de cada um deste espaços é feita construindo explicitamente um subconjunto enumerável e denso. Em particular, a prova da densidade é feita usando técnicas da Teoria de Probabilidade. Também mostramos, de maneira construtiva, que o espaço de Banach $(C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ (funções contínuas e limitadas definidas em toda reta real) não é separável.

A principal técnica de aproximação discutida neste artigo é aquela introduzida por Bernstein, na prova do Teorema de Aproximação de Weierstrass. Este é um artigo de divulgação, de um teorema clássico e amplamente conhecido e não contém nenhum resultado original ou inovador.

Palavras-chave: Espaços de Banach separáveis, Teorema de Weierstrass, Polinômios de Bernstein, Funções Contínuas, Métodos Probabilísticos.

1 Introdução

Vamos denotar por $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ a coleção de todas as funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que tendem à zero no infinito. Mais precisamente,

$$C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \equiv \left\{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:\ f \text{ é função contínua e } \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \right\}.$$

Este espaço munido de suas operações usuais de soma e multiplicação por escalar tem estrutura de espaço vetorial. Além do mais, para cada $f\in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ temos que

$$\|f\|_\infty \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < +\infty.$$

Podemos verificar que o espaço $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ munido da norma $\|\cdot\|_\infty$ é um espaço de Banach, veja [2, p.65]. Como de costume vamos considerar também $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ como espaço métrico, onde a distância ρ de um par $f,g\in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ é definida por $\rho(f,g)\equiv\|f-g\|_\infty$.

Dizemos que um espaço métrico (M, d) é **separável**, se existe algum conjunto enumerável $E \subset M$ tal que $\overline{E} = M$, onde $\overline{E}$ denota o fecho de E, com respeito à topologia induzida pela métrica d. Em outras palavras, um espaço métrico é separável se ele possui algum subconjunto enumerável denso. Em particular, se $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach, dizemos que $\mathcal{B}$ é separável se $\mathcal{B}$ munido da distância induzida pela norma $\|\cdot\|$ é um espaço métrico separável.

É bem-conhecido que espaços de Banach de dimensão finita são separáveis. Por exemplo, $\mathbb{R}^n$ munido da norma Euclidiana é um espaço de Banach separável já que $\mathbb{Q}^n \equiv \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}$ é um subconjunto enumerável e denso de $\mathbb{R}^n$. Similarmente podemos verificar que $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$, onde $\|(z_1, \ldots, z_n)\|_2 = \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2}$, é um espaço de Banach separável e $\mathbb{Q}^n + i\mathbb{Q}^n$ é um subconjunto enumerável denso.

Por outro lado, quando consideramos espaços de Banach de dimensão infinita a discussão se torna muito mais delicada. Neste caso encontramos diversos exemplos de espaços de Banach que não são separáveis. Na próxima seção vamos provar que $(C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, o espaço de Banach da funções reais contínuas e limitadas definidas em toda reta, não é separável.

2 A Prova da Não-Separabilidade de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Nesta seção vamos apresentar um exemplo instrutivo de espaço de Banach não-separável.

Considere a coleção

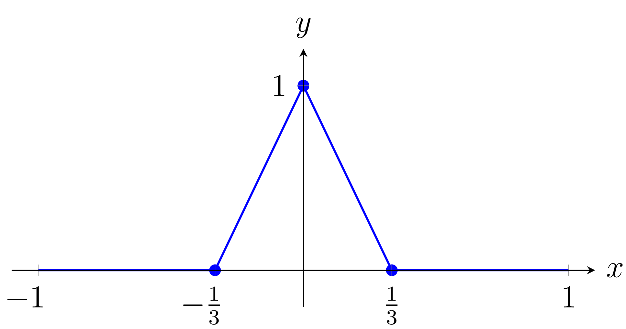
$$C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \equiv \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ f \text{ é uma função contínua e } \|f\|_\infty \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < +\infty \right\}.$$

Como de costume, olhamos para $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ como espaço vetorial, com as operações algébricas sendo definidas da forma usual. Além do mais, podemos equipar este espaço com a norma do supremo e neste caso é bem-conhecido que $(C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.

Para verificar que $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ não é separável, vamos precisar exibir uma coleção especial de funções que estão dentro deste espaço. A construção desta coleção será feita, abaixo, em algumas etapas.

Primeiro, consideramos a função auxiliar $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3x + 1, & \text{se } x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right]; \\ -3x + 1, & \text{se } x \in \left(0, \frac{1}{3}\right]; \\ 0, & \text{se } \frac{1}{3} < |x|. \end{cases}$$

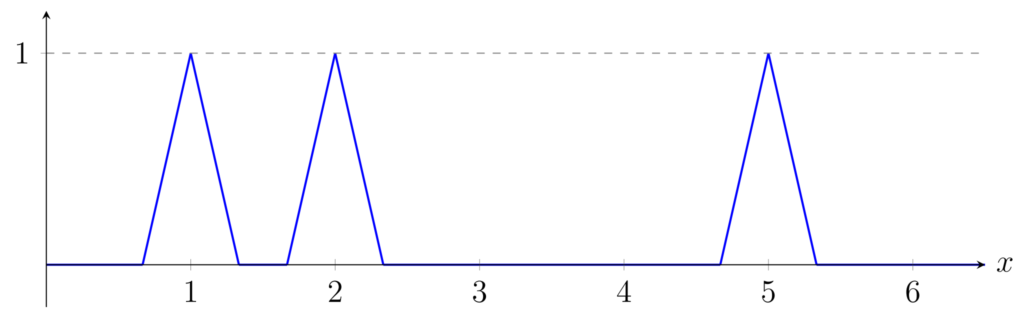


Em seguida, fixamos um subconjunto não-vazio $A \equiv \{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ e consideramos a função $\varphi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$\varphi_A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(x - n_k), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Para verificar que a função φ_A está bem-definida, basta observar que para cada $x \in \mathbb{R}$ fixado, existe no máximo uma parcela da série acima que é não-nula. Além do mais, para cada $x \in \mathbb{R}$ fixado, se $\varphi_A(x) \neq 0$, então existe um único número natural $n(x) \in A$ tal que $\varphi_A(x) = \varphi(x - n(x))$. Mas já que $0 \leqslant \varphi(x - n(x)) \leqslant 1$, que a igualdade é atingida quando $x = n(x)$ e que $x \in \mathbb{R}$ é arbitrário, podemos concluir que $\|\varphi_A\|_\infty = 1$. Além do mais, é imediato verificar também que φ_A é uma função contínua e portanto $\varphi_A \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Veja abaixo um esboço do gráfico da função φ_A, no caso $A = \{1, 2, 5\}$.



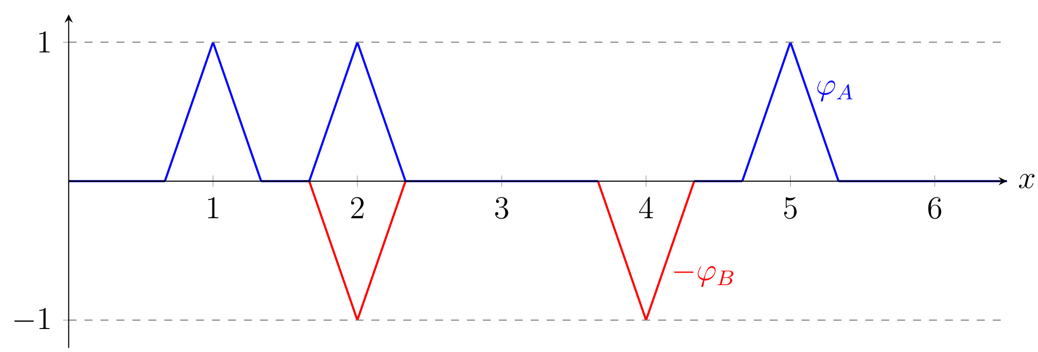
Antes de prosseguir, observamos também que a escolha dos pontos $-1/3$ e $1/3$ que aparecem na construção da função auxiliar φ, é feita de maneira a assegurar que os suportes de cada uma das parcelas que aparecem na definição de φ_A (quando A possui pelo menos dois elementos) sejam dois-a-dois disjuntos. Mais precisamente, se $n_i \neq n_j$, então as funções $\mathbb{R} \ni x \longmapsto \varphi(x - n_i)$ e $\mathbb{R} \ni x \longmapsto \varphi(x - n_j)$ possuem suportes disjuntos. Lembrando que o suporte de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o subconjunto de seu domínio definido por $\operatorname{supp}(f) \equiv \overline{\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \neq 0\}}$.

Se $A, B \subset \mathbb{N}$ são subconjuntos distintos e não-vazios, então segue das observações feitas acima sobre os suportes das funções φ_A's que

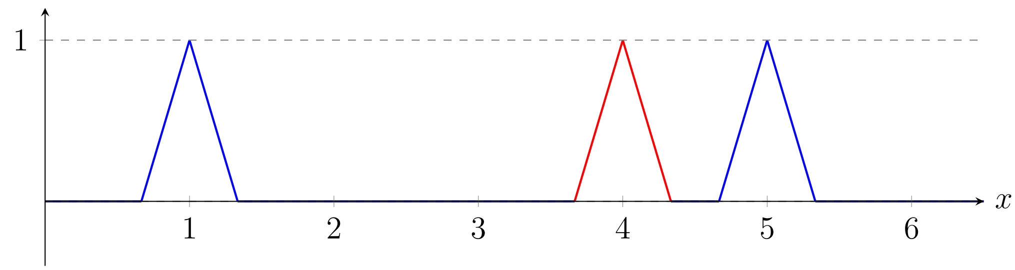
$$|\varphi_A(x) - \varphi_B(x)| = \varphi_C(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

onde $C = A \triangle B$, denota a diferença simétrica entre os conjuntos A e B.

Abaixo mostramos os esboços do gráfico da função diferença $\varphi_A(x) - \varphi_B(x)$, no caso em que os conjuntos $A = \{1, 2, 5\}$ e $B = \{2, 4\}$.



A partir do gráfico acima, podemos construir imediatamente o gráfico de $|\varphi_A(x) - \varphi_B(x)|$. Note que neste caso é fácil ver que $|\varphi_A(x) - \varphi_B(x)| = \varphi_C(x)$, onde $C = A \triangle B = \{1, 4, 5\}$.



Da identidade (1) temos para qualquer par de subconjuntos $A, B \subseteq \mathbb{N}$ distintos e não-vazios que

$$\|\varphi_A - \varphi_B\|_\infty \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \varphi_C(x) = 1. \tag{2}$$

Em particular, que $\varphi_A \neq \varphi_B$. Por questão de conveniência, quando $A = \varnothing$, definimos $\varphi_\varnothing \equiv 0$, ou seja, a função identicamente nula.

Considere a coleção $\mathscr{C} \equiv \{\varphi_A \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) : A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})\}$. Então segue imediatamente da igualdade (2) que a aplicação $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \ni A \longmapsto \varphi_A$ é injetiva. Logo podemos concluir que

$$\mathrm{Card}(\mathscr{P}(\mathbb{N})) \leqslant \mathrm{Card}(\mathscr{C}). \tag{3}$$

Em particular, é possível afirmar que $\mathscr{C}$ é uma coleção com uma quantidade não-enumerável de elementos.

Próximo passo é mostrar que a existência da coleção $\mathscr{C}$ dentro de $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ proíbe que $(C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ seja um espaço de Banach separável.

Suponha, por contradição, que o espaço $(C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ seja separável. Então, existe um subconjunto enumerável $\mathscr{D} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ denso em $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Deste forma, para cada $\varphi_A \in \mathscr{C}$, segue da densidade de $\mathscr{D}$ que existe algum número $n(A) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\varphi_A - f_{n(A)}\|_\infty < \frac{1}{2}.$$

Afirmamos que se A e B são subconjuntos distintos de $\mathbb{N}$, então $f_{n(A)} \neq f_{n(B)}$. De fato, se $A \neq B$, sabemos de (2) que $\|\varphi_A - \varphi_B\|_\infty = 1$. Usando esta última igualdade e a desigualdade triangular temos que

$$1 = \|\varphi_A - \varphi_B\|_\infty \leqslant \|\varphi_A - f_{n(A)}\|_\infty + \|f_{n(A)} - f_{n(B)}\|_\infty + \|f_{n(B)} - \varphi_B\|_\infty. \tag{4}$$

Por construção de $n(A)$ e $n(B)$ temos que $\|\varphi_A - f_{n(A)}\|_\infty < \frac{1}{2}$ e $\|f_{n(B)} - \varphi_B\|_\infty < \frac{1}{2}$. Usando estas duas desigualdades em (4) concluímos que

$$1 < \frac{1}{2} + \|f_{n(A)} - f_{n(B)}\|_\infty + \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \|f_{n(A)} - f_{n(B)}\|_\infty > 0.$$

Logo, $f_{n(A)} \neq f_{n(B)}$. Este fato tem como consequência que é possível construir pelo menos uma aplicação $\mathscr{C} \ni \varphi_A \longmapsto f_{n(A)} \in \mathscr{D}$ que é injetiva. Deste modo, $\mathrm{Card}(\mathscr{C}) \leqslant \mathrm{Card}(\mathscr{D})$. Mas, por outro lado, isso é impossível, pois levando em conta o resultado obtido em (3) teríamos $\mathrm{Card}(\mathscr{C}) \geqslant \mathrm{Card}(\mathscr{P}(\mathbb{N})) > \mathrm{Card}(\mathbb{N}) = \mathrm{Card}(\mathscr{D})$, que é uma contradição. Esta contradição surge de termos assumido que $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ é separável. Assim, podemos finalmente concluir que o espaço de Banach $(C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ **não é separável**.

3 As Desigualdades de Markov e Chebyshev

Teorema 1 (Desigualdade de Markov)**.** Seja X uma v.a. não-negativa. Então para cada $\lambda > 0$ temos que:

$$\mathbb{P}\big(\{X \geqslant \delta\}\big) \ \leqslant \ \frac{\mathbb{E}[X]}{\delta}.$$

Prova. Segue das propriedades elementares da Integral de Lebesgue que

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}\Big[X\Big(\mathbb{1}_{\{X\geqslant\delta\}} + \mathbb{1}_{\{X<\delta\}}\Big)\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[X\,\mathbb{1}_{\{X\geqslant\delta\}}\Big] + \mathbb{E}\Big[X\,\mathbb{1}_{\{X<\delta\}}\Big] \\
&\geqslant \mathbb{E}\Big[X\,\mathbb{1}_{\{X\geqslant\delta\}}\Big] \\
&\geqslant \mathbb{E}\Big[\delta\,\mathbb{1}_{\{X\geqslant\delta\}}\Big] \\
&= \delta\,\mathbb{P}(\{X \geqslant \delta\}).
\end{aligned}$$

O que prova a validade da desigualdade. ■

Teorema 2 (Desigualdade de Chebyshev)**.** Se X uma variável aleatória integrável, então para cada $\varepsilon > 0$ temos que

$$\mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}[X]| \geqslant \varepsilon\big) \ \leqslant \ \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}[X]}{\varepsilon^2},$$

onde $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] \equiv \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$, denota a variância de X.

Prova. A ideia é usar o Teorema 1, para a variável aleatória $|X - \mathbb{E}[X]|^2$, que é uma v.a. não-negativa.

Para isto, basta observar que segue da desigualdade de Markov e da definição de variância que temos a seguinte desejada, isto é,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}[X]| \geqslant \varepsilon\big) &= \mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}[X]|^2 \geqslant \varepsilon^2\big) \\
&\leqslant \frac{\mathbb{E}\Big[|X - \mathbb{E}[X]|^2\Big]}{\varepsilon^2} \\
&= \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}[X]}{\varepsilon^2}.
\end{aligned}$$

■

Como aplicação da Desigualdade de Chebyshev vamos mostrar na próxima seção que o espaço de Banach $\big(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$ das funções reais, contínuas e definidas sobre o intervalo $[0,1]$ é separável. Para isto mostramos primeiro que o conjunto dos polinômios de Bernstein definidos no intervalo fechado $[0,1]$ forma um subconjunto denso de $\big(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$ e, em seguida, Corolário 4 mostramos que o conjunto das funções polinomiais definidas sobre $[0,1]$, com coeficientes racionais é um subconjunto denso, com respeito a norma do supremo, do conjunto dos polinômios de também em $[0,1]$. Como o conjunto das funções polinomiais, com coeficientes racionais, é enumerável vamos concluir que $\big(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$ é separável.

4 Separabilidade de $C([0,1],\mathbb{R})$

Teorema 3 (Teorema da Aproximação de Weierstrass)**.** Seja $\big(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty\big)$ o espaço de Banach das funções à valores reais, contínuas e definidas no intervalo fechado $[0,1]$, munido da norma do supremo. Então para cada $f \in C([0,1],\mathbb{R})$, existe uma sequência de funções polinomiais $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente para f, isto é, $\|f - p_n\|_\infty \to 0$, quando $n \to \infty$.

Prova. Fixe $x \in [0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina Y_n como sendo uma v.a. com distribuição $\mathrm{Bin}(n,x)$. Observe que

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{Y_n}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \equiv B_n(f)(x).$$

Podemos verificar que Y_n possui a mesma distribuição que $X_1 + \ldots + X_n$, onde X_j's são v.a's i.i.d com distribuição de Bernoulli de parâmetro x, isto é, para cada $j = 1,\ldots,n$ temos $\mathbb{P}(X_j = 1) = x$ e $\mathbb{P}(X_j = 0) = 1-x$. Pela Lei Forte dos Grandes Números, podemos concluir que

$$\frac{Y_n}{n} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}[X_1] = x, \qquad \text{quase certamente.}$$

Já que $\|f\|_\infty < +\infty$, segue do Teorema da Convergência Dominada, da continuidade de f e da igualdade acima que existe o limite

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f)(x) \equiv \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[f\left(\frac{Y_n}{n}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{Y_n}{n}\right)\right] = \mathbb{E}\left[f(x)\right] = f(x).$$

Como $x \in [0,1]$ é fixo porém arbitrário, podemos concluir que a sequência de polinômios $B_n(f)$ converge pontualmente para a função contínua f.

Vamos verificar agora que a convergência é uniforme. Para isto vamos usar um fato bem-conhecido de Análise que afirma que se $f \in C([0,1],\mathbb{R})$, então f é uniformemente contínua. Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $\delta(\varepsilon) \equiv \delta > 0$ tal que para quaisquer $y,z \in [0,1]$

satisfazendo $|y-z|<\delta$, temos $|f(y)-f(z)|<\varepsilon$. Portanto

$$
\begin{aligned}
|B_n(f)(x)-f(x)| &= \left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{Y_n}{n}\right)-f(x)\right]\right| \\
&= \left|\mathbb{E}\left[\left(f\left(\frac{Y_n}{n}\right)-f(x)\right)\left(\mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{Y_n}{n}-x\right|<\delta\right\}}+\mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{Y_n}{n}-x\right|\geqslant\delta\right\}}\right)\right]\right| \\
&\leqslant \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{Y_n}{n}-x\right|<\delta\right\}}\left|f\left(\frac{Y_n}{n}\right)-f(x)\right|+\mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{Y_n}{n}-x\right|\geqslant\delta\right\}}\left|f\left(\frac{Y_n}{n}\right)-f(x)\right|\right] \\
&\leqslant \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{Y_n}{n}-x\right|<\delta\right\}}\left|f\left(\frac{Y_n}{n}\right)-f(x)\right|\right]+\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{Y_n}{n}-x\right|\geqslant\delta\right\}}\left|f\left(\frac{Y_n}{n}\right)-f(x)\right|\right] \\
\text{(cont. unif. de } f\text{)} &< \varepsilon+\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{Y_n}{n}-x\right|\geqslant\delta\right\}}\left|f\left(\frac{Y_n}{n}\right)-f(x)\right|\right] \\
&\leqslant \varepsilon+2\|f\|_\infty\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_n}{n}-x\right|\geqslant\delta\right).
\end{aligned}
$$

Já que $\mathbb{E}[\frac{Y_n}{n}]=x$, podemos aplicar a Desigualdade de Chebyshev (Teorema 2) para cotar superiormente a última expressão que aparece no lado direito da desigualdade acima. Desta forma ficamos com

$$
\begin{aligned}
|B_n(f)(x)-f(x)| &\leqslant \varepsilon+2\|f\|_\infty\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_n}{n}-x\right|\geqslant\delta\right) \\
&\leqslant \varepsilon+2\|f\|_\infty\ \frac{1}{\delta^2}\ \mathbb{V}\mathrm{ar}\left[\frac{Y_n}{n}\right] \\
&= \varepsilon+2\|f\|_\infty\ \frac{1}{\delta^2}\ \frac{1}{n^2}\mathbb{V}\mathrm{ar}\left[Y_n\right] \\
(X\sim Bin(n,p)\ \Rightarrow\ \mathbb{V}\mathrm{ar}[X]=np(1-p)) \qquad &= \varepsilon+2\|f\|_\infty\ \frac{1}{\delta^2}\ \frac{1}{n^2}\cdot(nx(1-x)) \\
&\leqslant \varepsilon+2\|f\|_\infty\ \frac{1}{\delta^2}\ \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

Já que na desigualdade acima δ só depende de ε, podemos afirmar que:

$$
\text{para todo}\quad n\geqslant n_0\equiv n_0(\varepsilon)\equiv 2\|f\|_\infty\ \frac{1}{\delta^2}\ \frac{1}{\varepsilon},\qquad \text{temos}\qquad |B_n(f)(x)-f(x)|\leqslant 2\varepsilon.
$$

Como a última desigualdade é independente de x, podemos afirmar que

$$
\|B_n(f)-f\|_\infty\equiv\sup_{x\in[0,1]}|B_n(f)(x)-f(x)|\leqslant 2\varepsilon,\qquad \forall n\geqslant n_0, \tag{5}
$$

o que encerra a prova da convergência uniforme. ∎

Corolário 4. O espaço de Banach $\big(C([0,1],\mathbb{R})\,,\,\|\cdot\|_\infty\big)$ é separável. Mais precisamente, a família $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}([0,1],\mathbb{R})$ das funções polinomiais definidas sobre o intervalo fechado $[0,1]$ e com coeficientes racionais é uma família enumerável e densa em $\big(C([0,1],\mathbb{R})\,,\,\|\cdot\|_\infty\big)$.

Prova. Como visto em (5), dadas $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ e $\varepsilon > 0$, existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geqslant n_0$, então o polinômio de Bernstein $B_n(f)$ está ε-próximo de f, com respeito a distância induzida pela norma $\|\cdot\|_\infty$. Ou seja, $\|f - B_n(f)\|_\infty < \varepsilon$, para todo $n \geqslant n_0$.

Em todo restante da prova n será um número natural fixado e tal que $n \geqslant n_0$. Observe que segue diretamente da definição que $B_n(f)$ é um polinômio de grau menor ou igual que n. Sejam $a_1, \ldots, a_n$ os coeficientes deste polinômio.

Já que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, para cada índice $k \in \{1, \ldots, n\}$, podemos encontrar $r_k \in \mathbb{Q}$ tal que $|a_k - r_k| \leqslant \varepsilon\, n^{-1}$. Usando estas observações concluímos que vale a seguinte desigualdade

$$
\begin{aligned}
\sup_{x\in[0,1]} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} r_k x^k \right| &\leqslant \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - B_n(f)| + \sup_{x\in[0,1]} \left| B_n(f)(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k x^k \right| \\
&< \varepsilon + \sup_{x\in[0,1]} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k x^k - \sum_{k=1}^{n} r_k x^k \right| \\
&< \varepsilon + \sup_{x\in[0,1]} \sum_{k=1}^{n} |a_k - r_k||x|^k < \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} |a_k - r_k| < \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} = 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Portanto, para cada $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ e $\varepsilon > 0$ dado, existe alguma função polinomial, com coeficientes racionais, cuja a distância à f na norma do supremo é de no máximo 2ε. Já que a família dos polinômios com coeficientes racionais é enumerável segue que o espaço de Banach $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ é separável. ■

5 Separabilidade de $C([a,b],\mathbb{R})$

Como visto na seção anterior $C([0,1],\mathbb{R})$ é separável. Abaixo mostramos como usar este fato para provar que $C([a,b],\mathbb{R})$ é separável para todo $-\infty < a < b < +\infty$.

Corolário 5. Para cada par $a, b \in \mathbb{R}$ fixado e satisfazendo $a < b$, temos que o espaço de Banach $\big(C([a,b],\mathbb{R})\,,\,\|\cdot\|_\infty\big)$ é separável.

Prova. Para provar que o espaço $C([a,b],\mathbb{R})$ é separável, devemos encontrar um subconjunto enumerável e denso.

Primeiramente, observamos que para cada par de números reais a e b, com $a < b$, fixados, existe uma bijeção afim e crescente $r : [0,1] \to [a,b]$ com inversa $r^{-1} : [a,b] \to [0,1]$ dadas, respectivamente, por

$$
r(t) = (b-a)t + a \qquad \text{e} \qquad r^{-1}(x) = \frac{1}{b-a}x - \frac{a}{b-a}.
$$

Já que as funções r e r^{-1} são funções polinomiais, então ambas são também funções contínuas.

Do Corolário 4, sabemos que o conjunto $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}([0,1],\mathbb{R})$ das funções polinomiais, definidas sobre $[0,1]$, com coeficientes racionais é um subconjunto enumerável e denso de $C([0,1],\mathbb{R})$.

Considere a família de funções polinomiais

$$D \equiv \{p \circ r^{-1} \,:\, p \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}([0,1],\mathbb{R})\}.$$

Note que cada elemento $p \circ r^{-1}$ da família D é de fato uma função real contínua definida sobre $[a,b]$, ou seja, $D \subset C([a,b],\mathbb{R})$.

Observe também que podemos ver a família D como imagem do operador $\Phi : \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}([0,1],\mathbb{R}) \to D$, definido por $\Phi(p) = p \circ r^{-1}$. Além do mais, $\Phi : \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}([0,1],\mathbb{R}) \to D$ define uma bijeção, cuja inversa $\Phi^{-1} : D \to \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}([0,1],\mathbb{R})$ é dada por $\Phi^{-1}(q) \equiv q \circ r$.

Como $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}([0,1],\mathbb{R})$ é enumerável, o conjunto D também é enumerável. Para finalizar a prova do teorema, basta mostrar que D é um subconjunto denso em $C([a,b],\mathbb{R})$.

Sejam $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ uma função arbitrária e $\varepsilon > 0$ um número positivo dado. Nosso objetivo é encontrar uma função $q \in D$ tal que $\|f - q\|_\infty < \varepsilon$.

Considere a função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida pela composição $g = f \circ r$. Como f e r são contínuas, g é uma função contínua, ou seja, $g \in C([0,1],\mathbb{R})$.

Segue do Corolário 4 que $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}([0,1],\mathbb{R})$ é um subconjunto denso em $C([0,1],\mathbb{R})$. Logo para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe alguma função polinomial $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}([0,1],\mathbb{R})$ tal que

$$\|g - p\|_\infty < \varepsilon.$$

Assim, temos da definição de supremo que

$$|g(t) - p(t)| < \varepsilon, \qquad \forall t \in [0,1].$$

Já que $g = f \circ r$, segue da desigualdade acima que

$$|f(r(t)) - p(t)| < \varepsilon, \qquad \forall t \in [0,1].$$

Como a função $r : [0,1] \to [a,b]$ é uma bijeção, podemos afirmar que para cada $x \in [a,b]$, existe um único $t \in [0,1]$ tal que $x = r(t)$, a saber, $t = r^{-1}(x)$. Substituindo t por $r^{-1}(x)$ na desigualdade acima, ficamos com

$$|f(x) - p(r^{-1}(x))| < \varepsilon.$$

Observamos que $q(x) \equiv p(r^{-1}(x))$, é um elemento da família D, isto é, $q \in D$. Além do mais, segue da desigualdade acima que

$$|f(x) - q(x)| < \varepsilon.$$

Como o ponto x na desigualdade acima é arbitrário em $[a,b]$ e as funções f e q são funções contínuas definidas em um intervalo compacto, segue do Teorema de Weierstrass que

$$\|f - q\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - q(x)| = |f(x_0) - q(x_0)| < \varepsilon.$$

O que mostra que D é um subconjunto denso de $C([a,b],\mathbb{R})$ e encerra a prova do teorema. ■

6 Separabilidade de $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Como de costume denotamos por $\mathbb{Q}[x]$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes racionais em uma indeterminada. O subconjunto enumerável e denso de $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ que vamos exibir é construído à partir dos elementos de $\mathbb{Q}[x]$ e de certos truncamentos determinados pelos números naturais.

Proposição 6. A aplicação que associa cada par ordenado $(p, N) \in \mathbb{Q}[x] \times \mathbb{N}$ à função $\mathcal{S}(p, N) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$\mathcal{S}(p,N)(x) \equiv \mathbb{1}_{[-N,N]}(x)p(x) + \frac{p(-N)}{e^{-N^2}}\mathbb{1}_{(-\infty,-N)}(x)e^{-x^2} + \frac{p(N)}{e^{-N^2}}\mathbb{1}_{(N,+\infty)}(x)e^{-x^2}, \qquad (6)$$

define uma função $\mathcal{S} : \mathbb{Q}[x] \times \mathbb{N} \to C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ou seja, a aplicação $x \longmapsto \mathcal{S}(p,N)(x)$ é uma função em $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

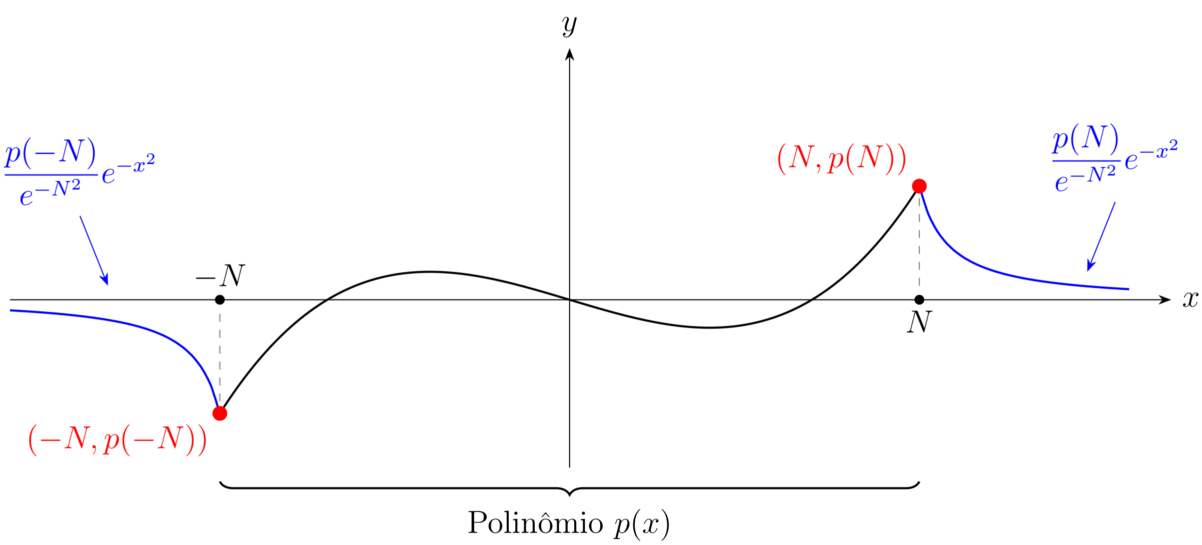


Figura 1: Esboço do gráfico da função $\mathcal{S}(p,N)(x)$. Observe que ela coincide com o polinômio $p(x)$ (preto) em $[-N, N]$. No complementar deste intervalo a função decai exponencial, mas mantendo a continuidade nos pontos $\pm N$.

Prova. A demostração será feita em duas etapas. Primeiro, vamos mostrar que a aplicação $x \longmapsto \mathcal{S}(p,N)(x)$ define uma função contínua em toda reta real e, em seguida, que esta função é realmente um elemento de $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, ou seja,

$$\lim_{|x|\to\infty} \mathcal{S}(p,N)(x) = 0.$$

Observe que segue da continuidade das funções polinomiais e exponencial que, a função $\mathcal{S}(p,N)$ é uma função contínua em todos os pontos de $\mathbb{R} \setminus \{-N, N\}$. Para verificar a continuidade da função $\mathcal{S}(p,N)$ em $x = -N$ e $x = N$, basta mostrar que os limites laterais, em cada um destes pontos, coincidem e também que estes limites laterais coincidem com a imagem da função em cada um destes pontos, respectivamente.

De fato, por inspeção direta na expressão que define $\mathcal{S}(p,N)$ podemos verificar que

$$\lim_{x\uparrow(-N)} \mathcal{S}(p,N)(x) \quad = \quad \mathcal{S}(p,N)(-N) \quad = \quad \lim_{x\downarrow(-N)} \mathcal{S}(p,N)(x).$$

Analogamente, temos

$$\lim_{x\uparrow N} \mathcal{S}(p,N)(x) \quad = \quad \mathcal{S}(p,N)(N) \quad = \quad \lim_{x\downarrow N} \mathcal{S}(p,N)(x).$$

Portanto, podemos concluir que a função $\mathcal{S}(p,N)(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Para verificar que $\mathcal{S}(p,N) \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ basta observar que

$$\lim_{x\to-\infty} \mathcal{S}(p,N)(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{p(-N)}{e^{-N^2}} \mathbb{1}_{(-\infty,-N)}(x) e^{-x^2} = \frac{p(-N)}{e^{-N^2}} \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0.$$

Analogamente,

$$\lim_{x\to+\infty} \mathcal{S}(p,N)(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{p(N)}{e^{-N^2}} \mathbb{1}_{(N,+\infty)}(x) e^{-x^2} = \frac{p(N)}{e^{-N^2}} \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0.$$

O que encerra a prova da proposição. ■

Proposição 7. Seja $\mathcal{S} : \mathbb{Q}[x] \times \mathbb{N} \to C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ a função definida na Proposição 6. Então $\mathrm{Im}(\mathcal{S})$ é um subconjunto enumerável de $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Prova. Como qualquer função é sobrejetiva sobre sua imagem e o conjunto $\mathbb{Q}[x]$ é enumerável, temos que $\mathrm{Card}(\mathrm{Im}(\mathcal{S})) \leqslant \mathrm{Card}(\mathrm{Dom}(\mathcal{S})) = \mathrm{Card}(\mathbb{Q}[x] \times \mathbb{N}) = \mathrm{Card}(\mathbb{N})$. ■

A Proposição 7 garante que a coleção $\mathrm{Im}(\mathcal{S})$ é uma coleção enumerável de funções contida em $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Desta forma, para mostrar que $\big(C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})\,,\, \|\cdot\|_\infty\big)$ é um espaço de Banach separável, é suficiente mostrar que $\mathrm{Im}(\mathcal{S})$ é um subconjunto denso em $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Teorema 8. O espaço de Banach $\big(C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})\,,\, \|\cdot\|_\infty\big)$ é um espaço de Banach separável.

Prova. Como mencionado acima é suficiente mostrar que $\mathrm{Im}(\mathcal{S})$ é um subconjunto denso de $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ou seja, para cada $f \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ fixada e $\varepsilon > 0$ dado, basta mostrar que existe alguma função $\mathcal{S}(p,N) \in \mathrm{Im}(\mathcal{S})$ tal que $\|f - \mathcal{S}(p,N)\|_\infty < \varepsilon$. A prova deste fato é apresentada abaixo.

Fixados $\varepsilon > 0$ e $f \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, sabemos que existe algum $N \equiv N(f,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{7}, \qquad \text{se } |x| > N. \tag{7}$$

Considere a restrição de f ao intervalo fechado $[-N,N]$, isto é, $f|_{[-N,N]}$. Como visto na prova do Corolário 5, o conjunto das funções polinomiais, com coeficientes racionais, definidas no intervalo $[-N,N]$ é denso em $(C([N,N],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Portanto, existe alguma função polinomial, com coeficientes racionais, $p : [-N,N] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{x\in[-N,N]} \Big| (f|_{[-N,N]})(x) \,-\, p(x) \Big| < \frac{\varepsilon}{7}. \tag{8}$$

Agora, considere que a função $\mathcal{S}(p,N)$, definida em (6), com p e N escolhidos acima. Pela desigualdade triangular e por (7) podemos afirmar que vale a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
\|f-\mathcal{S}(p,N)\|_\infty &= \left\|\left(\mathbb{1}_{(-\infty,-N)}+\mathbb{1}_{[-N,N]}+\mathbb{1}_{(N,+\infty)}\right)f \;-\; \mathcal{S}(p,N)\right\|_\infty \\
&\leqslant \left\|\left(\mathbb{1}_{(-\infty,-N)}+\mathbb{1}_{(N,+\infty)}\right)f\right\|_\infty + \left\|\mathbb{1}_{[-N,N]}\,f \;-\; \mathcal{S}(p,N)\right\|_\infty \\
&\leqslant \frac{2\varepsilon}{7} + \left\|\mathbb{1}_{[-N,N]}\,f \;-\; \mathcal{S}(p,N)\right\|_\infty \qquad (9)
\end{aligned}$$

Observe que pela definição de $\mathcal{S}(p,N)$ e da norma $\|\cdot\|_\infty$, a segunda parcela que aparece em (9) é dada pela seguinte expressão

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{1}_{[-N,N]}(x)\,f(x)-\mathbb{1}_{[-N,N]}(x)p(x)-\frac{p(-N)}{e^{-N^2}}\mathbb{1}_{(-\infty,-N)}(x)e^{-x^2}-\frac{p(N)}{e^{-N^2}}\mathbb{1}_{(N,+\infty)}(x)e^{-x^2}\right|.$$

Usando a desigualdade triangular, podemos majorar a expressão acima, usando os seguintes argumentos:

i) a desigualdade (8) implica

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{1}_{[-N,N]}(x)\,f(x)\;-\;\mathbb{1}_{[-N,N]}(x)p(x)\right| = \sup_{x\in[-N,N]}|f(x)-p(x)| < \frac{\varepsilon}{7}; \qquad (10)$$

ii) da desigualdade (8) e de $|f(x)|<\varepsilon$, para todo $|x|>N$, temos

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{p(-N)}{e^{-N^2}}\mathbb{1}_{(-\infty,-N)}(x)e^{-x^2}\right| &= \sup_{x\in(-\infty,-N)}\left|\frac{p(-N)}{e^{-N^2}}e^{-x^2}\right| \\
&= \frac{|p(-N)|}{e^{-N^2}}\sup_{x\in(-\infty,-N)}\left|e^{-x^2}\right| \\
&= |p(-N)| \\
&= |p(-N)-f(-N)|+|f(-N)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{7}. \qquad (11)
\end{aligned}$$

iii) analogamente, temos

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{p(N)}{e^{-N^2}}\mathbb{1}_{(N,+\infty)}(x)e^{-x^2}\right| &= \sup_{x\in(N,+\infty)}\left|\frac{p(N)}{e^{-N^2}}e^{-x^2}\right| \\
&= \frac{|p(N)|}{e^{-N^2}}\sup_{x\in(N,+\infty)}\left|e^{-x^2}\right| \\
&= |p(N)| \\
&= |p(N)-f(N)|+|f(N)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{7}. \qquad (12)
\end{aligned}$$

Finalmente, segue da desigualdade (9) e das estimativas obtidas em (10), (11) e (12) que

$$\begin{aligned}
\|f - \mathcal{S}(p,N)\|_\infty &< \frac{2\varepsilon}{7} + \left\|\mathbb{1}_{[-N,N]} f \; - \; \mathcal{S}(p,N)\right\|_\infty \\
&< \frac{2\varepsilon}{7} + \frac{\varepsilon}{7} + \frac{2\varepsilon}{7} + \frac{2\varepsilon}{7} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

O que encerra a prova de que $\operatorname{Im}(\mathcal{S})$ é denso e consequentemente que $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é separável. ■

Referências

[1] P. Billingsley. *Probability and Measure - Anniversary Edition*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, New York, Anniversary edition, 2012. x+608 pp. ISBN: 978-1-118-12237-2.

[2] J. B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 96. Springer, New York, 2nd edition, 2019. xvi+400 pp. ISBN: 978-1-4939-2711-1.

[3] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Second Edition, Volume 40, John Wiley & Sons, 1999.