German Lozada Cruz

Algumas variações, generalizações e aplicações do teorema do valor médio de Lagrange

Brasília, 6 de abril de 2021

Departamento de Matemática
IBILCE-Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
UNESP-Universidade Estadual Paulista
R. Cristóvão Colombo, 2265
Jardim Nazareth
São José do Rio Preto-SP
15054-000, Brasil
e-mail:german.lozada@unesp.br

German Lozada Cruz (IBILCE/UNESP)

Algumas variações, generalizações e aplicações do teorema do valor médio de Lagrange

Minicurso apresentado no VI Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste, realizado na Universidade de Brasilia, em maio de 2021.

Brasília, DF

Resumo

Sabemos que os *teoremas do tipo valor médio* são resultados básicos da Análise Matemática. Estes teoremas se destacam por sua simplicidade e aplicabilidade em outras áreas, como em Física e Economia por exemplo.

O primeiro contato de nossos alunos dos cursos de graduação em Matemática ou de Engenharia com os teoremas do tipo valor médio é em um curso de cálculo diferencial e integral ou em um primeiro curso de análise real.

Neste minicurso, apresentaremos alguns teoremas do tipo valor médio que não são estudados em disciplinas clássicas de cálculo e análise matemática, bem como veremos algumas variações, generalizações e aplicações do Teorema de Valor Médio de Lagrange.

Palavras-chaves: Teorema de Rolle, Teorema de Lagrange, Teorema de Flett, Teorema de Sahoo-Riedel, Teorema de Çakmak-Tiryaki.

Sumário

Prefácio

O contato de nossos alunos dos cursos de graduação em Matemática ou de Engenharia com os *teoremas do tipo valor médio* é em um curso de Cálculo Diferencial e Integral ou em um primeiro curso de Análise Real.

O primeiro teorema do valor médio é o conhecido *Teorema do Valor Médio de Lagrange*, o qual relaciona a taxa média da variação de uma função nos extremos de um intervalo com o valor da derivada da função em um ponto do mesmo intervalo.

O Teorema do Valor Médio de Lagrange é uma ferramenta muito importante na Análise e é usado para resolver uma grande variedade de problemas em otimização, economia, etc. A origem deste vem do teorema de Rolle, o qual foi provado pelo matemático francês Michel Rolle (1652–1719) para polinômios em 1691. Este teorema apareceu, pela primeira vez, no livro *Methode pour resoudre eles égalitez*, sem nenhuma demonstração e sem nenhum destaque especial. Em 1797, o teorema de Rolle teve seu reconhecimento quando Joseph Lagrange (1736–1813) apresentou seu teorema de valor médio em seu livro *Theorie des functions analytiques*. Recebeu mais reconhecimento quando Augustin Louis Cauchy (1789–1857) provou seu teorema do valor médio em seu livro *Equationnes differentielles ordinaires*.

Existem muitas variações e generalizações dos teoremas clássicos do valor médio. Nas demonstrações destes teoremas são usadas algumas funções auxiliares e então aplica-se diretamente o Teorema de Rolle. Alguns autores chamam isto de "*idea feliz*" ([15]).

Vamos descrever brevemente o conteúdo deste texto.

No primeiro capítulo, vemos brevemente alguns resultados clássicos da análise como o Teorema de Rolle e Teorema do Valor Intermediário. Vemos alguns resultados em que usamos o Teorema de Rolle, assim como algumas generalizações do Teorema de Rolle. O leitor interessado em mais detalhes sobre este assunto recomendamos consultar [1], [3], [8], [9], [10], [13], [16], [17], [21], [27], [31] e [33]

No segundo capitulo, estudamos o Teorema do Valor Médio de Lagrange, algumas variações, generalizações e aplicações do mesmo. O leitor interessado em mais detalhes sobre este assunto recomendamos consultar [2], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [28], [29], [30], [32], [34], [35], [36], [37], [38], [39], [40], [41], [43] e [44]

Finalmente, gostaria de agradecer ao Comitê Organizador do **VI Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste** pela oportunidade em ministrar este minicurso.

São José do Rio Preto, abril de 2020.
German Lozada Cruz

Capítulo 1

Alguns Resultados Clássicos da Análise

Neste capítulo vamos ver brevemente o Teorema de Rolle, o Teorema do Valor Intermediário e alguma generalizações do Teorema de Rolle.

1.1 Teorema do Valor Intermediário

Teorema 1.1.1 (Teorema dos Intervalos Encaixantes) *Seja* $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ *uma sequência de intervalos fechados encaixantes, i.e.,* $I_{n+1} \subset I_n$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Se* $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, *então existe um único* $x_0 \in I_n$, *para todo* n.

Demonstração. *Existência.* Da hipótese temos $a_n \leqslant a_{n+1}$ e $b_{n+1} \leqslant b_n$. Como $a_n < b_n$ para todo n, segue que a sequência $\{a_n\}$ é crescente e limitada superiormente por b_1. Analogamente, a sequência $\{b_n\}$ é decrescente e limitada inferiormente por a_1 (veja a Figura 1.1).

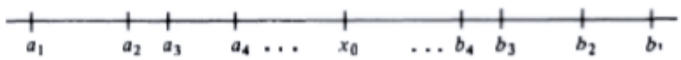

Figura 1.1: Intervalos encaixantes.

Logo, existem x_0 e y_0 tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$, $a_n \leqslant x_0$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = y_0$, $b_n \geqslant y_0$. Como $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, segue que $x_0 = y_0$ e $a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n$, para todo n. Logo, $x_0 \in I_n$ para todo n.

Unicidade. Suponhamos que existe $x_1 \in I_n$, para todos n, com $x_0 \neq x_1$, digamos $x_0 < x_1$. Como $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, segue que dado $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n - b_n < \epsilon$.

Observe que $b_n - a_n = (x_1 - x_0) + (x_0 - a_n) + (b_n - x_1) \geqslant x_1 - x_0$. Logo, tomando $\epsilon = \frac{x_1 - x_0}{2}$ obtemos $2\epsilon = x_1 - x_0 \leqslant b_n - a_n < \epsilon$, o que é um absurdo. Portanto, $x_1 = x_0$. □

Observação 1.1.2 *A hipótese que cada I_n é um intervalo fechado é essencial. Por exemplo, a sequência de intervalos semi-abertos $I_n = (0, \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$, tem a propriedade $I_{n+1} \subset I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $0 \notin I_n$, segue que qualquer $x_0 \in I_n$ é positivo. Logo, pela propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $Nx_0 > 1$, daí $x_0 \notin I_N$. Embora os intervalos I_n sejam encaixantes eles não tem um ponto em comum.*

Teorema 1.1.3 (Teorema do Valor Intermediário) *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) \leqslant c \leqslant f(b)$ ou $f(b) \leqslant c \leqslant f(a)$, então existe pelo menos um $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = c$.*

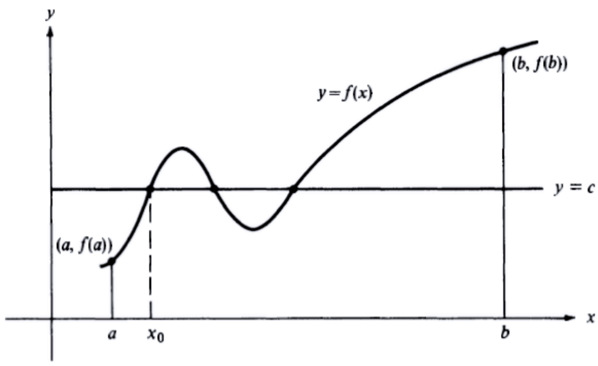

Figura 1.2: Interpretação geométrica do Teorema de Valor Intermediário.

Demonstração. Definamos $a_1 = a$ e $b_1 = b$. Então $f(\frac{a_1+b_1}{2}) > c$ ou $f(\frac{a_1+b_1}{2})$ é igual a c, maior do que c ou menor do que c.

Se $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = c$, escolhemos $x_0 = \frac{a_1+b_1}{2}$ e o resultado está provado.
Se $f(\frac{a_1+b_1}{2}) > c$, então definimos $a_2 = a_1$ e $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
Se $f(\frac{a_1+b_1}{2}) < c$, então definimos $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ e $b_2 = b_1$.
Novamente calculamos $f(\frac{a_2+b_2}{2})$.
Se $f(\frac{a_2+b_2}{2}) = c$, escolhemos $x_0 = \frac{a_2+b_2}{2}$ e o resultado está provado.
Se $f(\frac{a_2+b_2}{2}) > c$, então definimos $a_3 = a_2$ e $b_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$.
Se $f(\frac{a_2+b_2}{2}) < c$, então definimos $a_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$ e $b_3 = b_2$.

Continuando com este raciocínio, encontramos uma solução em um número finito de passos ou encontramos uma sequência de intervalos fechados encaixantes $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ com as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}, \\ f(a_n) < c &< f(b_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Da propriedade dos intervalos encaixastes existe $x_0 \in I_n$ e

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Como f é função contínua segue que $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$. Usando a desigualdade em (1.1.1) obtemos $f(x_0) \leqslant c \leqslant f(x_0)$. Logo $f(x_0) = c$. □

Corolário 1.1.4 (Teorema de Bolzano ou do Anulamento) *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Demonstração. Suponhamos que $f(a) < 0 < f(b)$. Segue do Teorema do Valor Intermediário (Teorema 1.1.3) que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. □

Teorema 1.1.5 (Teorema da Limitação) *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então a imagem de $[a, b]$ por f, $f([a, b]) \subset \mathbb{R}$, é um conjunto limitado.*

Demonstração. Suponhamos que $f([a, b]) \subset \mathbb{R}$ não é um conjunto limitado em $\mathbb{R}$. Então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in [a, b]$ tal que $|f(x_n)| > n$. A sequência $\{x_n\} \subset [a,b]$ é limitada, e do Teorema de Bolzano-Weierstras (ver [21, Teorema 3.10]) existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$, a qual converge para um elemento $x_0 \in [a,b]$. Como f é contínua em $[a,b]$, segue que $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$, quando $n \to \infty$. Escolhendo $\epsilon = 1$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|f(x_{n_k}) - f(x_0)| < 1, \quad \forall k \geqslant N_1.$$

Disto segue que,

$$|f(x_{n_k})| < |f(x_0)| + 1, \quad \forall k \geqslant N_1.$$

Logo, $|f(x_{n_k})| \leqslant L$, $\forall k \in \mathbb{N}$, onde

$$L = \max\Big\{|f(x_{n_1})|, |f(x_{n_2})|, \cdots, |f(x_{n_{N_1-1}})|, |f(x_0)| + 1\Big\}.$$

Por outro lado

$$|f(x_{n_k})| > n_k \geqslant k, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Disto segue que $k \leqslant L$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Isto é uma contradição já que $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente. □

Observação 1.1.6 *No Teorema de Limitação (Teorema 1.1.5) é essencial que o domínio de f seja um intervalo fechado $[a,b]$. Por exemplo, a função $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{1-x}$ é contínua, mas $f([0,1)) = [1,+\infty)$ não é um conjunto limitado.*

Teorema 1.1.7 (Teorema de Weierstrass) *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então existem $x_1, x_2 \in [a,b]$ tais que*

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2), \ \forall x \in [a,b].$$

Isto é, f atinge seu valor máximo e mínimo em $[a,b]$.

Demonstração. Do Teorema da Limitação (Teorema 1.1.5) segue que

$f([a,b]) \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado. Logo, existe $\mathbb{R} \ni M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$. Então

$$f(x) \leqslant M, \quad \forall x \in [a,b], \tag{1.1.2}$$

e para todo $\epsilon > 0$ existe $x_\epsilon \in K$ tal que

$$M - \epsilon < f(x_\epsilon). \tag{1.1.3}$$

Para $\epsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, denotemos o correspondente x_ϵ por z_n. De (1.1.2) e (1.1.3) segue que

$$M - \frac{1}{n} < f(z_n) \leqslant M < M + \frac{1}{n},$$

isto é,

$$|f(z_n) - M| < \frac{1}{n}. \tag{1.1.4}$$

Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass a sequência $\{z_n\} \subset [a,b]$ tem uma subsequência $\{z_{n_k}\}$ que converge para um ponto $x_2 \in [a,b]$ (pois $[a,b]$ é fechado), e como f é contínua em x_2, tem-se

$$\lim_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = f(x_2).$$

Por outro lado, de (1.1.4) segue que

$$\lim_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = M.$$

Portanto, $f(x_2) = M$. De (1.1.2), obtemos

$$f(x) \leqslant f(x_2), \quad \forall x \in [a,b].$$

Similarmente mostra-se que f atinge seu mínimo em $[a,b]$. □

1.2 Teorema de Rolle

Teorema 1.2.1 (Teorema de Rolle) *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Se $f(x) = k$, onde $k = cte$, então $f'(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$. Logo, podemos tomar qualquer $c \in \mathbb{R}$ que a conclusão do teorema está satisfeita.

Suponhamos que f não é constante. Como f é contínua em $[a, b]$, segue do Teorema de Weierstrass, que existem x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$, $\forall x \in [a, b]$. Como f não é constante, $f(x_1) \neq f(x_2)$, logo $x_1, x_2 \in (a, b)$ (pois, $f(a) = f(b)$) e como são extremos, $f'(x_1) = 0$ e $f'(x_2) = 0$. Portanto, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

□

Interpretação geométrica.
Existe um ponto c no intervalo (a, b) onde a tangente ao gráfico da função f é horizontal.

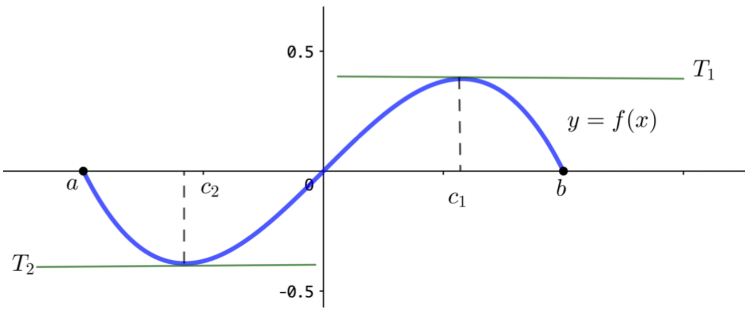

Figura 1.3: Interpretação geométrica do Teorema de Rolle.

Interpretação física.
Suponhamos que um corpo se move ao longo de uma linha reta e, após um certo período de tempo, retorne ao ponto inicial. Então, nesse período de tempo, há um momento em que a velocidade instantânea do corpo é igual a zero.

Observação 1.2.2 *Se $f(a) = 0 = f(b)$, então o Teorema de Rolle diz que entre dois zeros de f existe um zero de f'.*

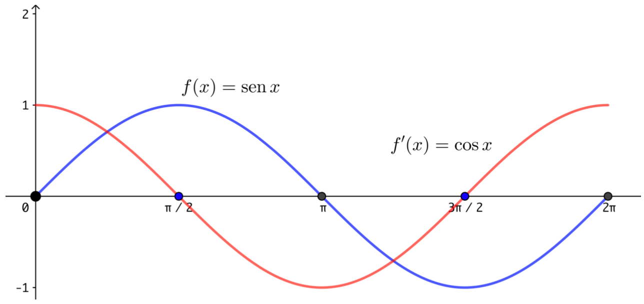

Figura 1.4: Zeros de f e zeros de de f' em $[0, 2\pi]$.

Como vimos acima que na demonstração do Teorema de Rolle usamos o Teorema de Weierstrass (Teorema 1.1.7), i.e., f atinge seu máximo num ponto $c \in (a, b)$ digamos, então $f'(c) = 0$. Vamos dar outra demonstração do Teorema de Rolle usando o Teorema do Valor Intermediário (Teorema 1.1.3).

Outra demonstração do Teorema de Rolle (H. Samelson [27]).

Denotemos por $[a_0, b_0] = [a, b]$.

Afirmação 1: Existe um intervalo $[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$ com $b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$ tal que $f(a_0) = f(b_1)$.

De fato, seja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x + \frac{b-a}{2}) - f(x)$. Então

$$\begin{aligned} g(\tfrac{a+b}{2}) &= f(\tfrac{a+b}{2} + \tfrac{b-a}{2}) - f(\tfrac{a+b}{2}) \\ &= f(b) - f(\tfrac{a+b}{2}) = -f(\tfrac{a+b}{2}) + f(a) \text{ pois } f(a) = f(b)) \\ &= -f(a + \tfrac{b-a}{2}) + f(a) \\ &= -\Big(f(a + \tfrac{b-a}{2}) - f(a)\Big) = -g(a). \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $\xi \in (a, \frac{a+b}{2})$ tal que $g(\xi) = 0$, i.e., $f(\xi + \frac{b-a}{2}) = f(\xi)$.

Agora, denotando por $[a_1, b_1] = [\xi, \xi + \frac{b-a}{2}]$ facilmente vemos que $f(a_1) = f(b_1)$ e $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. Agora, como $\xi < \frac{a+b}{2}$, segue que $\xi + \frac{b-a}{2} < \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2} = b$, logo $[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$. Isto demonstra a Afirmação.

Agora aplicando a **Afirmação 1** repetidamente obtemos uma sequência $[a_n, b_n]$ de intervalos encaixantes tal que:

(**i**) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$,
(**ii**) $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$, $n = 1, 2, \cdots$,
(**iii**) $f(a_n) = f(b_n)$.

De (**ii**) segue que as sequências $\{a_n\}$ é crescente e $\{b_n\}$ é decrescente, além disso são limitadas. Logo, existem $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ e $\eta = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. De (**i**) segue que $\xi = \eta$ e $a_n \leqslant \xi \leqslant b_n$.

Agora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(\xi),$$

mas por (**iii**), segue que $f'(\xi) = 0$.

Finalmente, afirmamos que $\xi \neq a, \neq b$. Caso contrário, se $\xi = a$, então $[a_1, b_1] = [\xi, \xi + \frac{b-a}{2}] = [a, \frac{a+b}{2}]$ e $[a_2, b_2] = [\xi, \xi + \frac{b_1 - a_1}{2}] = [a, \frac{3a+b}{4}]$, de modo que $f(a) = f(\frac{a+b}{2}) = f(\frac{3a+b}{4})$. Mas então podemos escolher $[a_2, b_2] = [\frac{3a+b}{4}, \frac{a+b}{2}]$ ao invés de $[a_2, b_2] = [a, \frac{3a+b}{4}]$ e assim, consequentemente não perigo do limite ξ de a_n ser igual a a. Similarmente, para $\xi \neq b$. □

Aplicações do Teorema de Rolle

Nesta seção vamos ver algumas aplicações simples do Teorema de Rolle.

Proposição 1.2.3 *Se p um polinômio de grau n, então p tem no máximo n raizes distintas*

Demonstração. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau n, onde $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \cdots, n$ e $a_n \neq 0$.

Vamos usar Indução em n.

• $n = 1$. $p(x) = a_1 x + a_0$ tem uma única raiz, $x = -\dfrac{a_0}{a_1}$.
• Suponhamos por indução, que todo polinômio de grau $n-1$, $n > 1$, tem no máximo $n-1$ raízes reais distintas. Mostremos então que $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tem no máximo n raízes reais distintas.

Suponhamos que $p(x)$ tem $n+1$ raízes distintas $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1}$,

$$p(x_1) = p(x_2) = \cdots = p(x_n) = p(x_{n+1}) = 0,$$

então aplicando o Teorema de Rolle em cada intervalo, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $\cdots$, $[x_n, x_{n+1}]$, existem $c_1, c_2, \cdots, c_n$ tais que

$$\begin{aligned}
p'(c_1) &= 0, \ x_1 < c_1 < x_2 \\
p'(c_2) &= 0, \ x_2 < c_2 < x_3 \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \\
p'(c_n) &= 0, \ x_n < c_n < x_{n+1}.
\end{aligned}$$

Disto segue que o polinômio

$$p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$$

de grau $n-1$ tem n raízes distintas $c_1, c_2, \cdots, c_n$. Isto contradiz a hipótese de indução de que todo polinômio de grado $n-1$ tem no máximo $n-1$ raízes distintas. Portanto, o polinômio $p(x)$ de grau n tem no máximo n raízes distintas. $\square$

Proposição 1.2.4 ([16]) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma aplicação contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c)\Big(f(c) - \tfrac{f(a)+f(b)}{2}\Big) = -\Big(c - \tfrac{a+b}{2}\Big). \qquad (1.2.1)$$

Demonstração. Denotemos por $M = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$ o ponto médio da corda de $A = (a, f(a))$ a $B = (b, f(b))$ e seja $P = (x, f(x))$ um ponto no gráfico de f (veja a Figura 1.5)

A distância de M a P é dada por

$$d(x) = \sqrt{\Big(x - \tfrac{a+b}{2}\Big)^2 + \Big(f(x) - \tfrac{f(a)+f(b)}{2}\Big)^2}, \ a \leqslant x \leqslant b,$$

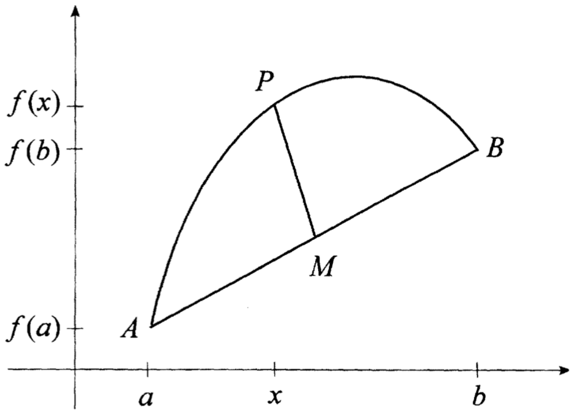

Figura 1.5: Distância de M a P.

e d nos extremos dos intervalos são iguais (a metade do comprimento da corda AB), i.e.,

$$d(a) = \frac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2 + (f(a) - f(b))^2} = \frac{1}{2}|AB| = d(b).$$

Agora consideremos a função $h = d^2$, i.e.,

$$h(x) = \left(x - \tfrac{a+b}{2}\right)^2 + \left(f(x) - \tfrac{f(a)+f(b)}{2}\right)^2.$$

Claramente vemos que h é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e

$$h'(x) = 2\left(x - \tfrac{a+b}{2}\right) + 2\left(f(x) - \tfrac{f(a)+f(b)}{2}\right) f'(x).$$

Além disso,

$$h(a) = \frac{1}{4}\big[(a-b)^2 + (f(a) - f(b))^2\big] = \big(\tfrac{1}{2}|AB|\big)^2 = h(b).$$

Então pelo Teorema de Rolle existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$, i.e.,

$$\left(c - \tfrac{a+b}{2}\right) + \left(f(c) - \tfrac{f(a)+f(b)}{2}\right) f'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c)\left(f(c) - \tfrac{f(a)+f(b)}{2}\right) = -\left(c - \tfrac{a+b}{2}\right).$$

□

Observação 1.2.5 *Denotemos por* $C = (c, f(c))$ *e consideremos* $c \neq \frac{a+b}{2}$. *Então a equação* (1.2.1) *se escreve como*

$$f'(c)\left[\frac{f(c)-\frac{f(a)+f(b)}{2}}{c-\frac{a+b}{2}}\right] = -1,$$

ou seja

$$(\textit{inclinação da reta tangente em } C)\cdot(\textit{inclinação de } MC) = -1.$$

Geometricamente isto nos diz que: a reta que passa por M *e* C *é perpendicular à reta tangente em* C.

Proposição 1.2.6 ([3]) *Se* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *são funções contínuas em* $[a, b]$ *e deriváveis em* (a, b) *satisfazendo* $f(a) = 0 = g(b)$ *(ou* $f(b) = 0 = g(a)$*), então existe* $\eta \in (a, b)$ *tal que*

$$f'(\eta)g(\eta) + f(\eta)g'(\eta) = 0.$$

Demonstração. Definamos a função auxiliar $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = f(x)g(x).$$

A função h é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Se $f(a) = 0 = g(b)$ temos

$$h(a) = f(a)g(a) = 0 = f(b)g(b).$$

Então, pelo Teorema de Rolle existe $\eta \in (a, b)$ tal que $h'(\eta) = 0$, i.e.,

$$h'(\eta) = 0 \Leftrightarrow f'(\eta)g(\eta) + f(\eta)g'(\eta) = 0$$

Analogamente para o caso em que $f(b) = 0 = g(a)$, existe $\eta \in (a, b)$ tal que $h'(\eta) = 0$, i.e.,

$$h'(\eta) = 0 \Leftrightarrow f'(\eta)g(\eta) + f(\eta)g'(\eta) = 0$$

□

Vamos ver uma aplicação concreta da proposição anterior atraves um exemplo

Exemplo 1.2.7 *Demonstre que a equação*

$$2x \operatorname{sen}(x + x^2) + (2x^3 + x^2 - 8x - 4)\cos(x + x^2) = 0 \tag{1.2.2}$$

tem uma solução entre 0 *e* 2*.*

Solução. Consideremos as funções $f, g : [0, 2] \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \operatorname{sen}(x + x^2)$ e $g(x) = x^2 - 4$. Agora, definamos a função $h : [0, 2] \to \mathbb{R}$ por $h(x) = f(x)g(x)$.

Como as funções f e g são contínuas em $[0, 2]$ e deriváveis em $(0, 2)$, segue que a função h é contínua em $[0, 2]$, derivável em $(0, 2)$ e

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= 2x \operatorname{sen}(x + x^2) + (x^2 - 4)(1 + 2x)\cos(x + x^2). \end{aligned}$$

Como $f(0) = 0 = g(2)$, segue que $h(0) = h(2)$. Logo, pelo Teorema de Rolle, existe $\eta \in (0, 2)$ tal que $h'(\eta) = 0$, i.e.,

$$2\eta \operatorname{sen}(\eta + \eta^2) + (2\eta^3 + \eta^2 - 8\eta - 4)\cos(\eta + \eta^2) = 0.$$

□

Proposição 1.2.8 ([3]) *Sejam* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funções contínua em* $[a, b]$ *e deriváveis em* (a, b) *com* $g(x) \neq 0$ *para todo* $x \in [a, b]$*. Se* $f(a)g(b) = f(b)g(a)$*, então existe* $\eta \in (a, b)$ *tal que*

$$f'(\eta)g(\eta) - g'(\eta)f(\eta) = 0.$$

Demonstração. Definamos a função $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ por $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Como as funções f, g são contínuas em $[a, b]$, deriváveis em (a, b)e $g(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$, segue que h é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e

$$h'(x) = \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Se $f(a)g(b) = f(b)g(a)$, então

$$h(a) = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)} = h(a).$$

Logo, pelo Teorema de Rolle, existe $\eta \in (a, b)$ tal que $h'(\eta) = 0$, i.e.,

$$\begin{aligned} h'(\eta) = 0 &\Leftrightarrow \frac{g(\eta)f'(\eta) - f(\eta)g'(\eta)}{[g(\eta)]^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow f(\eta)g'(\eta) - g(\eta)f'(\eta) = 0. \end{aligned}$$

$\square$

Vamos ver uma aplicação concreta da proposição anterior atraves um exemplo

Exemplo 1.2.9 *Demonstre que a equação*

$$(2x^3 + x^2 + 2x + 1)\cos(x + x^2) - 2x\,\mathrm{sen}(x + x^2) = 0 \tag{1.2.3}$$

tem uma solução entre -1 *e* 0.

Solução. Sejam $f, g : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \mathrm{sen}(x + x^2)$ e $g(x) = x^2 + 1$. As funções f e g são contínuas em $[-1, 0]$, deriváveis em $(-1, 0)$ e $f'(x) = (1 + 2x)\cos(x + x^2)$ e $g'(x) = 2x$. Considere a função $h : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\mathrm{sen}(x + x^2)}{x^2 + 1}.$$

A função h é contínua em $[-1,0]$, derivável em $(-1,0)$ e

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(x^2+1)[\operatorname{sen}(x+x^2)]' - \operatorname{sen}(x+x^2)(x^2+1)'}{[x^2+1]^2} \\ &= \frac{(2x^3+x^2+2x+1)\cos(x+x^2) - 2x\operatorname{sen}(x+x^2)}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$h(-1) = \frac{f(-1)}{g(-1)} = 0 = \frac{f(0)}{g(0)} = h(0).$$

Então pelo Teorema de Rolle, existe $\eta \in (-1,0)$ tal que $h'(\eta) = 0$, i.e.,

$$\begin{aligned} h'(\eta) = 0 &\Leftrightarrow \frac{(2\eta^3+\eta^2+2\eta+1)\cos(\eta+\eta^2) - 2\eta\operatorname{sen}(\eta+\eta^2)}{(\eta^2+1)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow (2\eta^3+\eta^2+2\eta+1)\cos(\eta+\eta^2) - 2\eta\operatorname{sen}(\eta+\eta^2) = 0. \end{aligned}$$

$\square$

Proposição 1.2.10 ([3]) *Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções contínua em $[a,b]$ e deriváveis em (a,b). Se $f(a) = 0 = f(b)$, então mostre que existe $\eta \in (a,b)$ tal que*

$$f'(\eta) + g'(\eta)f(\eta) = 0.$$

Demonstração. Consideremos a função auxiliar $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = f(x)\, e^{g(x)}.$$

Claramente a função h é contínua em $[a,b]$, derivável em (a,b) e

$$h'(x) = \left(f(x)\, e^{g(x)}\right)' = f'(x)\, e^{g(x)} + g'(x)f(x)e^{g(x)}.$$

Além disso,

$$h(a) = f(a)\, e^{g(a)} = 0 = f(b)\, e^{g(b)} = h(b).$$

Logo, pelo Teorema de Rolle, existe $e \in (a, b)$ tal que $h'(\eta) = 0$, i.e.,

$$\begin{aligned} h'(\eta) = 0 &\Leftrightarrow f'(\eta)\, e^{g(\eta)} + g'(\eta) f(\eta) e^{g(\eta)} = 0 \\ &\Leftrightarrow f'(\eta) + g'(\eta) f(\eta) = 0. \end{aligned}$$

□

A proposição anterior tem uma interpretação geométrica: Existe um ponto c no intervalo (a, b) onde a reta tangente ao gráfico da função f é paralela à reta tangente ao gráfico da função g nesse mesmo ponto.

Uma ideia para obtermos a função h é a seguinte: Consideremos a equação diferencial

$$f'(x) + g'(x) f(x) = 0. \tag{1.2.4}$$

Vamos resolver a equação diferencial ordinária (1.2.4) usando um fator integrante $\mu = \mu(x)$ (veja [?]), i.e., μ é um fator integrante de (1.2.4) se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[\mu f] &= \mu f'(x) + g'(x) \mu f(x) \\ \mu f'(x) + f(x) \mu'(x) &= \mu f'(x) + g'(x) \mu f(x) \\ \mu'(x) &= g'(x) \mu(x) \\ \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} &= g'(x) \end{aligned}$$

Integrando obtemos $\ln \mu(x) = g(x) + C$. Tomando $C = 0$ obtemos

$$\mu(x) = e^{g(x)}.$$

Agora voltando a equação diferencial (1.2.4) obtemos

$$\begin{aligned} e^{g(x)}f'(x) + g'(x)e^{g(x)}f(x) = 0 &\Leftrightarrow (e^{g(x)}f(x))' = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{g(x)}f(x) = C, \quad C = \text{cte}. \end{aligned}$$

Assim, definimos agora $h(x) = e^{g(x)}f(x)$.

Proposição 1.2.11 ([31]) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Se $f(a) = 0 = f(b)$, então para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ existe $\eta \in (a, b)$ tal que $f'(\eta) = \lambda f(\eta)$.*

Demonstração. Consideremos a função auxiliar $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = f(x)\, e^{-\lambda x},$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $e^{-\lambda x} \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, segue que os zeros de f são também zeros de h, isto nos permite concluir que $h(a) = 0 = h(b)$.

Por outro lado a função h é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e

$$h'(x) = f'(x)\, e^{-\lambda x} - \lambda f(x)\, e^{-\lambda x}.$$

Pelo Teorema de Rolle, existe $\eta \in (a, b)$ tal que $h'(\eta) = 0$, i.e.,

$$h'(\eta) = 0 \Leftrightarrow f'(\eta)e^{-\lambda\eta} - \lambda f(\eta)e^{-\lambda\eta} = 0 \Leftrightarrow f'(\eta) = \lambda f(\eta).$$

□

A proposição anterior tem uma interpretação geométrica: Existe um ponto c no intervalo (a, b) onde a reta tangente ao gráfico da função f tem inclinação igual a um múltiplo qualquer do valor de f nesse ponto.

Uma ideia para obtermos a função h é a seguinte: Consideremos a equação diferencial

$$f'(x) = \lambda f(x). \tag{1.2.5}$$

Multiplicando a EDO (1.2.5) por $e^{-\lambda x}$ obtemos

$$\begin{aligned} f'(x)\, e^{-\lambda x} - \lambda f(x)\, e^{-\lambda x} &= 0 \\ \frac{d}{dx}\big(f(x)\, e^{-\lambda x}\big) &= 0 \\ f(x)\, e^{-\lambda x} &= k, \quad k = \text{cte.} \end{aligned}$$

Assim, agora definimos $h(x) = f(x)\, e^{-\lambda x}$.

Observação 1.2.12 *Se* $g(x) = -\lambda x$ *em na* Proposição 1.2.10 *obtemos a* Proposição 1.2.11. *Portanto a* Proposição 1.2.11 *é um corolário da* Proposição 1.2.10.

O seguinte exemplo foi proposto por D. Andrica e apareceu na Gazeta Matemática, Bucharest, 1975 (veja [1, Problema 1]).

Exemplo 1.2.13 ([1]) *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua em* $[a, b]$, *derivável em* (a, b) *e* $f(x) \neq 0$ *para todo* $x \in [a, b]$, *então mostre que existe* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$\frac{f'(\eta)}{f(\eta)} = \frac{1}{a - \eta} + \frac{1}{b - \eta}.$$

Demonstração. Considere a função $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = f(x)(a - x)(b - x).$$

Facilmente vemos que h é uma função contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e

$$h'(x) = f'(x)(a - x)(b - x) - f(x)(b - x) - f(x)(a - x).$$

Além disso, $h(a) = 0 = h(b)$. Então pelo Teorema de Rolle existe $\eta \in (a, b)$ tal

que $h'(\eta) = 0$, i.e.,

$$\begin{aligned} h'(\eta) = 0 &\Leftrightarrow f'(\eta)(a-\eta)(b-\eta) - f(\eta)(b-\eta) - f(\eta)(a-\eta) = 0 \\ &\Leftrightarrow f'(\eta)(a-\eta)(b-\eta) = f(\eta)(b-\eta) + f(\eta)(a-\eta) \\ &\Leftrightarrow \frac{f'(\eta)}{f(\eta)} = \frac{1}{a-\eta} + \frac{1}{b-\eta}. \end{aligned}$$

□

Uma ideia para obtermos a função h é a seguinte: Consideremos a equação diferencial

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x}.$$

A solução é dada por

$$\begin{aligned} \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx &= \int \frac{1}{a-x}dx + \int \frac{1}{b-x}dx \\ \ln|f(x)| &= -\ln|a-x| - \ln|b-x| + c_1 \\ \ln|f(x)(a-x)(b-x)| &= c_1 \\ |f(x)(a-x)(b-x)| &= e^{c_1} \\ f(x)(a-x)(b-x) &= c, \quad c = \pm e^{c_1}. \end{aligned}$$

Agora vamos ver algumas aplicações envolvendo integrais.

Exemplo 1.2.14 *Seja* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *função contínua satisfazendo* $\int\limits_0^1 f(x)dx = 0$. *Mostre que existe* $c \in (0,1)$ *tal que*

$$(1-c)f(c) = c\int\limits_0^c f(x)dx.$$

Solução. Consideremos a função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = e^x(1-x)\int\limits_0^x f(t)dt.$$

A função g é contínua em $[0,1]$, derivável em $(0,1)$ e

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^x(1-x)\int_0^x f(t)dt + e^x\Big[(1-x))\int_0^x f(t)dt\Big]' \\ &= e^x(1-x)\int_0^x f(t)dt + e^x\Big[-\int_0^x f(t)dt + (1-x)f(x)\Big] \\ &= e^x\Big[-x\int_0^x f(t)dt + (1-x)f(x)\Big]. \end{aligned}$$

Além disso, $h(0) = 0 = h(1)$. Pelo Teorema de Rolle existe $c \in (0,a)$ tal que $h'(c) = 0$, i.e.,

$$\begin{aligned} h'(c) = 0 &\Leftrightarrow e^c\Big[-c\int_0^c f(t)dt + (1-c)f(c)\Big] = 0 \\ &\Leftrightarrow -c\int_0^c f(t)dt + (1-c)f(c) = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-c)f(c) = c\int_0^c f(t)dt. \end{aligned}$$

□

Uma ideia para obtermos a função h é a seguinte: Da conclusão considere a equação $(1-x)f(x) = x\int_0^x f(t)dt$. Seja $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ a primitiva de f, i.e., $F'(x) = f(x)$. Assim, obtemos a seguinte equação diferencial

$$(1-x)f(x) = x\int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow (1-x)F'(x) = xF(x)$$

Resolvendo esta equação diferencial obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{F'(x)}{F(x)} &= \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x} \\
\int \frac{F'(x)}{F(x)} &= \int (-1 + \frac{1}{1-x})dx \\
\ln|F(x)| &= -x - \ln|1-x| + c_1 \\
\ln|F(x)(1-x)| + x &= c_1 \\
|F(x)(1-x)|e^x &= e^{c_1} \\
e^x(1-x)F(x) &= c, \quad c = \pm e^{c_1} \\
e^x(1-x)\int_0^x f(t)dt &= K.
\end{aligned}$$

Lema 1.2.15 ([13, Lema 2.1]) *Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo $\int_0^1 f(x)dx = 0$, então existe $\eta \in (0,1)$ tal que*

$$f(\eta) = \int_0^\eta f(x)dx.$$

Demonstração. Consideremos a função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = e^{-x}\int_0^x f(t)dt.$$

A função h é contínua em $[0,1]$, derivável em $(0,1)$ e

$$h'(x) = -e^{-x}\int_0^x f(t)dt + e^{-x}f(x) = e^{-x}\left[f(x) - \int_0^x f(t)dt\right].$$

Além disso, $h(0) = 0 = h(1)$, então pelo Lema de Rolle, existe $\eta \in (0,1)$ tal

que $h'(\eta) = 0$, i.e.,

$$h'(\eta) = 0 \Leftrightarrow e^{-\eta}\left[f(\eta) - \int_0^{\eta} f(t)dt\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow f(\eta) = \int_0^{\eta} f(t)dt.$$

□

Lema 1.2.16 ([13, Lema 2.7]) *Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo*

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx.$$

Mostre que existe $\eta \in (0,1)$ tal que

$$\int_0^{\eta} f(x)dx = 0.$$

Solução. Consideremos a função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \int_0^x f(t)dt$. Então usando integração por partes fazendo $u = h(x)$ e $dv = dx$, obtemos

$$\int_0^1 h(x)dx = xh(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xh'(x)dx = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 xf(x)dx = 0.$$

Agora, definamos a função $H : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada $H(x) = \int_0^x h(t)dt$. Facilmente vemos que H é contínua em $[0,1]$, derivável em $(0,1)$ e $H'(x) = h(x)$. Além disso, $H(0) = 0 = H(1)$. Então pelo Teorema de Rolle existe $\eta \in (0,1)$ tal que $H'(\eta) = 0$, i.e.,

$$H'(\eta) = 0 \Leftrightarrow h(\eta) = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\eta} f(x)dx = 0.$$

$\square$

Teorema 1.2.17 ([13, Teorema 2.9]) *Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo*

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx.$$

Então existe $\eta \in (0,1)$ tal que

$$f(\eta) = \int_0^\eta f(x)dx.$$

Demonstração. (**i**) Pelo Lema 1.2.16, existe $\eta_0 \in (0,1)$ tal que $\int_0^{\eta_0} f(x)dx = 0$. Agora, consideremos a função $h_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h_1(x) = e^{-x} \int_0^x f(t)dt.$$

A função h_1 é contínua em $[0,1]$, derivável em $(0,1)$ e

$$h_1'(x) = -e^{-x} \int_0^x f(t)dt + e^{-x} f(x) = e^{-x} \left(f(x) - \int_0^x f(t)dt \right).$$

Além disso, $h_1(0) = 0 = h_1(\eta_0)$. Pelo Teorema de Rolle, existe $\eta \in (0,\eta_0) \subset (0,1)$ tal que $h'(\eta) = 0$, i.e.,

$$\begin{aligned} h'(\eta) = 0 \Leftrightarrow e^{-\eta} \left(f(\eta) - \int_0^\eta f(t)dt \right) = 0 \\ \Leftrightarrow f(\eta) - \int_0^\eta f(x)dx = 0 \\ \Leftrightarrow f(\eta) = \int_0^\eta f(x)dx. \end{aligned}$$

$\square$

Lema 1.2.18 ([33]) *Sejam $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ funções deriváveis. Se $f(0) = 0 = f(1)$, então existe $\eta \in (0,1)$ tal que*

$$f'(\eta) = f(\eta)g(f(\eta)).$$

Demonstração. Consideremos a função auxiliar $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(t) = f(t)\, e^{-\int_0^t g(f(s))ds}$$

A função h é contínua em $[0,1]$, derivável $(0,1)$ e

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(t)\, e^{-\int_0^t g(f(s))ds} - f(t)\, g(f(t)) e^{-\int_0^t g(f(s))ds} \\ &= \Big[f'(t) - f(t)g(f(t)) \Big]\, e^{-\int_0^t g(f(s))ds}. \end{aligned}$$

Além disso, $h(0) = 0 = h(1)$. Então pelo Teorema de Rolle, existe $\eta \in (0,1)$ tal que $h'(\eta) = 0$, i.e.,

$$\begin{aligned} \Big[f'(\eta) - f(\eta)g(f(\eta)) \Big]\, e^{-\int_0^\eta g(f(s))ds} = 0 &\Leftrightarrow f'(\eta) - f(\eta)g(f(\eta)) = 0 \\ &\Leftrightarrow f'(\eta) = f(\eta)g(f(\eta)). \end{aligned}$$

$\square$

1.3 Teorema de Rolle. Generalizações

Nesta seção vamos considerar uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua que tem derivadas laterais em cada ponto de (a,b). Os símbolos $f'_-(x)$ e $f'_+(x)$ denotam a derivadas laterais à esquerda de f e a derivada lateral à direita de f no ponto $x \in (a,b)$, respectivamente.

O seguinte resultado é uma generalização do Teorema de Rolle para as funções que tem derivadas laterais num intervalo (a, b).

Teorema 1.3.1 (Teorema de Rolle Generalizado, Karamata [8]) *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$, $f(a) = f(b)$ e $f'_-(x)$ e $f'_+(x)$ existem para cada $x \in (a, b)$, então existem $\eta \in (a, b)$ e $p, q \geqslant 0$, $p + q = 1$ tal que*

$$pf'_+(\eta) + qf'_-(\eta) = 0. \tag{1.3.1}$$

Demonstração. Se $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$, podemos tomar $\eta = \frac{b-a}{2}$ e $p = \frac{1}{2} = q$.

Se $f(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$, então f atinge seu máximo (positivo) ou seu mínimo (negativo) ou ambos em em $[a, b]$, pois f é contínua em $[a, b]$. Seja $\eta \in (a, b)$ tal que $f(\eta) > 0$ é um máximo ou $f(\eta) < 0$ é seu mínimo.

Se $f'_-(\eta) = f'_+(\eta) = f'(\eta)$, então obtemos o Teorema de Rolle com $p = \frac{1}{2} = q$.

Suponhamos que $f'_-(\eta) \neq f'_+(\eta)$.

Se $f'_-(\eta) = 0$, então tomando $p = 0$ e $q = 1$ obtemos (1.3.1).

Se $f'_+(\eta) = 0$, então tomando $p = 1$ e $q = 0$ obtemos (1.3.1).

Se $f'_-(\eta)\, f'_+(\eta) \neq 0$, então da definição de $f'_-(x)$ e $f'_+(x)$, segue que o produto $f'_-(\eta)\, f'_+(\eta)$ é negativo. Agora tomando

$$p = \frac{f'_-(\eta)}{f'_-(\eta) - f'_+(\eta)} \quad \text{e} \quad q = \frac{f'_+(\eta)}{f'_+(\eta) - f'_-(\eta)}$$

temos $p + q = 1$ e a equação (1.3.1). □

Observação 1.3.2 *Se f é derivável, então $f'_+(\eta) = f'(\eta) = f'_+(\eta)$. Logo, a desigualdade* (1.3.1) *se transforma em*

$$0 = pf'_+(\eta) + qf'_-(\eta) = pf'(\eta) + qf'(\eta) = (p + q)f'(\eta) = f'(\eta).$$

Assim, o Teorema 1.3.1 *implica no* Teorema de Rolle.

Teorema 1.3.3 (Teorema de Rolle Generalizado, Kubik [9]) *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função derivável à ambos lados em cada ponto de* (a, b) *e* $f(a) = f(b)$, *então existe* $\eta \in (a, b)$ *tal que*

$$f'_+(\eta) \cdot f'_-(\eta) \leqslant 0. \tag{1.3.2}$$

Demonstração. Do Teorema de Rolle Generalizado de Karamata (Teorema 1.3.1), existem para cada $x \in (a, b)$, então existem $\eta \in (a, b)$ e $p, q \geqslant 0$, $p+q = 1$ tal que

$$pf'_+(\eta) + qf'_-(\eta) = 0, \tag{1.3.3}$$

então obviamente temos $f'_+(\eta)f'_-(\eta) \leqslant 0$

Se $f'_+(\eta)f'_-(\eta) \neq 0$, de (1.3.3) ob temos

$$pf'_+(\eta)f'_-(\eta) = -q\big(f'_-(\eta)\big)^2 < 0,$$

Logo, $f'_+(\eta)f'_-(\eta) < 0$. □

Observação 1.3.4 *Se* f *é derivável, então* $f'_+(\eta) = f'(\eta) = f'_+(\eta)$. *Logo, a desigualdade* (1.3.2) *no* Teorema 1.3.3 *se transforma em* $\big[f'(\eta)\big]^2 \leqslant 0$. *Portanto* $f'(\eta) = 0$. *Assim, o* Teorema 1.3.3 *implica no* Teorema de Rolle.

R. Witula et al. mostraram que os Teoremas 1.3.1 e 1.3.3 são equivalentes (veja [43, Proposição 1, p.148]).

1.4 Exercícios

1. Mostre que a equação

   (a) $x^7 + x^3 + x + 2 = 0$ tem uma única raiz real.

   (b) $x^3 - x - \cos x = 0$ tem uma única raiz em $[0, \pi]$.

2. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas em $[a, b]$, deriváveis em (a, b) com $f(a) = g(a)$ e $f(b) = g(b)$. Mostre que existe $\eta \in (a, b)$ tal que $f'(\eta) = g'(\eta)$.

3. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e $f(a) = 0 = f(b)$. Mostre que existe $\eta \in (a, b)$ tal que $f'(\eta) = f(\eta)$.

4. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) com $f(a) = 0 = f(b)$ com $f(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Mostre que para todo $0 \neq r \in \mathbb{R}$ existe $\eta \in (a, b)$ tal que $rf'(\eta) + f(\eta) = 0$.

5. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo $\int\limits_0^1 f(x)dx = 0$. Mostre que existe $\eta \in (0, 1)$ tal que

   (a) $\frac{f(\eta)}{\eta} = \int\limits_0^\eta f(x)dx$.

   (b) $f(\eta) = f'(\eta) \int\limits_0^\eta f(x)dx$, se f é derivável em $(0, 1)$.

   (c) $\eta f(\eta) = \int\limits_\eta^1 f(x)dx$.

Capítulo 2

Teorema do Valor Médio de Lagrange

Neste capitulo vamos estudar o Teorema do Valor Médio de Lagrange, algumas variações, generalizações e aplicações do mesmo.

Teorema 2.0.1 (Teorema do Valor Médio de Lagrange) *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua em* $[a, b]$ *e derivável em* (a, b)*, então existe* $\eta \in (a, b)$ *tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(\eta)(b - a). \tag{2.0.1}$$

Demonstração. Consideremos a função h dada por

$$h(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{2.0.2}$$

A equação (2.0.2) é a equação da reta secante que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Agora definamos a função auxiliar

$$\phi(x) = f(x) - h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{2.0.3}$$

Como f é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), segue que ϕ é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Além disso,

$$\phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Também

$$\begin{aligned}\phi(a) &= f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0\\ \phi(b) &= f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = 0.\end{aligned}$$

Assim, a função ϕ satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle. Então existe $\eta \in (a,b)$ tal que $\phi'(\eta) = 0$, ou seja

$$\phi'(\eta) = 0 \Leftrightarrow f'(\eta) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Leftrightarrow f'(\eta) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

Observação 2.0.2 (**i**) *A equação* (2.0.1) *pode ser escrita como*

$$f(b) = f(a) + f'(\eta)(b-a), \;\; a < \eta < b.$$

(**ii**) *Se considerarmos o intervalo* $[a,b] = [a, a+h]$*, a equação* (2.0.1) *pode ser escrita como*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h)h, \;\; 0 < \theta < 1.$$

Interpretação geométrica.

A reta secante que passa pelos pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$ do gráfico de f tem a inclinação igual a $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Então existe um ponto $x = \eta$ dentro do intervalo $[a,b]$, onde a reta tangente ao gráfico de f é paralela à reta secante, ou seja $f'(\eta) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Interpretação física.

Se $f(t)$ representa a posição de um corpo que se move ao longo de uma reta,

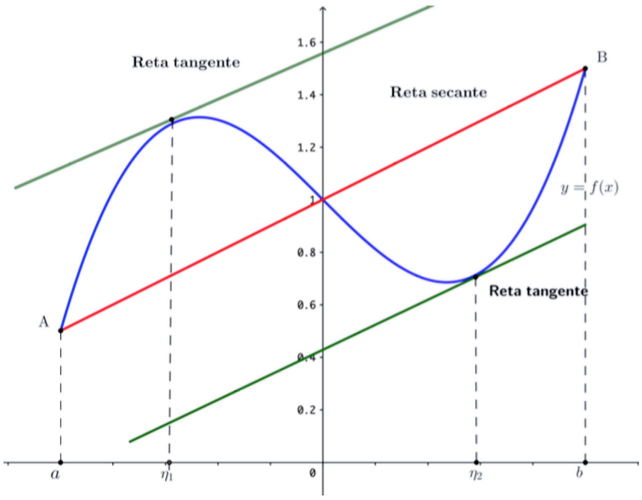

Figura 2.1: Interpretação geométrica do Teorema do Valor Médio.

dependendo do tempo t, então o quociente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ é a velocidade média do corpo no período de tempo $b-a$. Como $f'(t)$ é a velocidade instantânea, o teorema diz que existe um instante de tempo η, para o qual a velocidade instantânea é igual a velocidade média.

Escolhas da função auxiliar ϕ

A função auxiliar ϕ usada na demonstração do Teorema do Valor Médio de Lagrange é uma expressão formidável cuja origem é intrigante.

(**1**). A explicação mais simples da escolha de ϕ provavelmente seja a citada por R.C. Yates ([44]).

A função ϕ é a diferença da ordenada do ponto $P = (x, f(x))$ no gráfico de f e da ordenada do ponto $Q = (x, h(x))$ na reta secante ao gráfico de f. Como as funções f e h se encontrar nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ temos $\phi(a) = 0 = \phi(b)$. Assim, temos uma função para a qual podemos aplicar o Teorema de Rolle, consequentemente obtemos o Teorema do Valor Médio de Lagrange.

Existem outras maneiras de obter ϕ. Uma abordagem é observar que, para os pontos $P = (x, f(x))$ no gráfico de f, a área do triângulo APB é

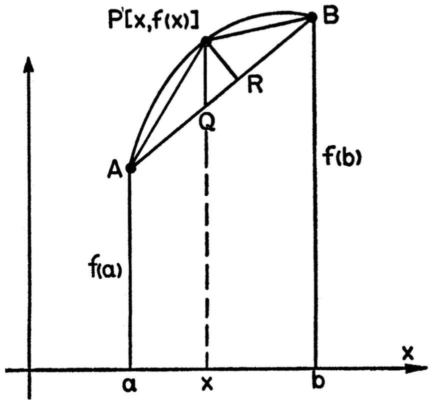

Figura 2.2: Da onde vem a função auxiliar $\phi = f - h$.

proporcional à altura PR acima da base AB. Assim, a altura PR é maximizada quando a área é maximizada. Da Geometria Analítica, lembramos que a fórmula para a área do triângulo é $\frac{1}{2}|D(x)|$, onde $D(x)$ é o determinante

$$D(x) = \begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix}.$$

Observe que, $D(a) = 0 = D(b)$. Logo, do Teorema de Rolle $D'(\eta) = 0$ para algum $\eta \in (a, b)$. Para calcular $D'(x)$, primeiro vamos expandir $D(x)$:

$$\begin{aligned} D(x) &= x \begin{vmatrix} f(a) & 1 \\ f(b) & 1 \end{vmatrix} - f(x) \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & f(a) \\ b & f(b) \end{vmatrix} \\ &= (f(a) - f(b))x - (a - b)f(x) + (af(b) - bf(a)). \end{aligned}$$

Logo, $D'(x) = f(a) - f(b) - (a - b)f'(x)$. Agora, fazendo $D'(\eta) = 0$, obtemos o Teorema do Valor Médio.

(**2**). M.Poliferno [20] observou que existem desvantagens pedagógicas quando consideramos a função $\phi(x) = f(x) - h(x)$. Primeiramente, parece mais natural girar o sistema de coordenadas xy, do que olhar o espaço entre o gráfico de f e a reta secante (veja a Figura 2.3).

Considere o novo sistema de coordenadas $x'y'$ o qual é a rotação do sistema

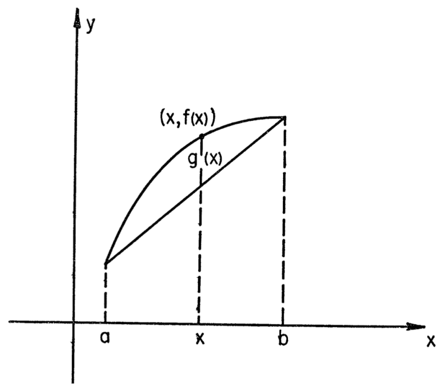

Figura 2.3: Função auxiliar $\phi = f - h$.

xy onde o eixo x' (o novo eixo x) é paralelo à reta secante. Então aplicamos o teorema de Rolle à função d, onde $d(x) =$ a distância do ponto $(x, f(x))$ ao eixo x' (Veja Figura 2.4).

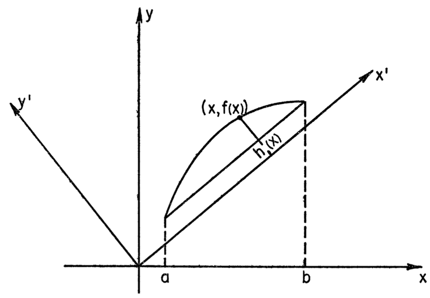

Figura 2.4: Função auxiliar $d(x)$.

Da Geometria Analítica sabemos que a distância de uma reta $y = mx + b$ ao ponto (x_1, y_1) é dada por $\frac{y_1 - mx_1 - b}{\sqrt{m^2+1}}$, onde $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ e uma equação do eixo x' é $y = mx$, então

$$d(x) = \frac{f(x) - mx}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

Do ponto de vista geométrico vemos facilmente que $d(a) = 0 = d(b)$.

Agora, aplicando o Teorema de Rolle à função d obtemos que existe $\eta \in (a, b)$ tal que $d'(\eta) = 0$, i.e., $f'(\eta) = m$.

(**3**). Segundo H. Silverman [28] quando consideramos a função auxiliar $\phi(x) = f(x) - h(x)$ a maioria dos estudantes pensam na função ϕ como sendo artificial e a demonstração do Teorema do Valor Médio como uma mágica.

Para acharmos uma função auxiliar como diferença de f com a reta secante que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, podemos natural considerar a diferença de f com uma reta com inclinação $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ que passa pela origem paralela à reta secante, isto leva a considerar a função auxiliar

$$\phi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x. \tag{2.0.4}$$

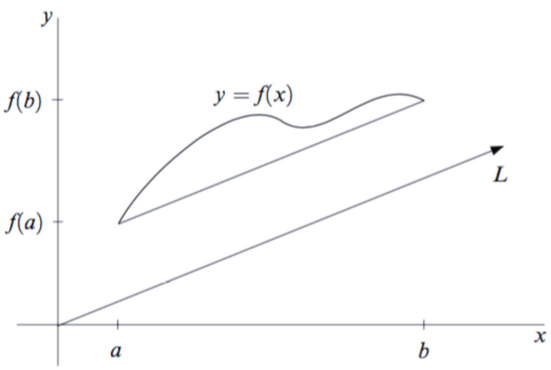

Figura 2.5: Função auxiliar ϕ.

Da Figura 2.5 vemos facilmente que $\phi(a) = \phi(b)$, ou o leitor pode verificar que

$$\phi(a) = \phi(b) = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}.$$

A função ϕ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), então pelo Teorema de Rolle existe $\eta \in (a, b)$ tal que $\phi'(\eta) = 0$. Agora,

$$\phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Logo, de $\phi'(\eta) = 0$ obtemos $f'(\eta) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Agora se consideramos a função auxiliar ϕ como sendo uma perturbação linear de f, então ϕ tem a forma

$$\phi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{2.0.5}$$

Uma traslação para baixo por $f(a)$ nos leva a tradicional função auxiliar dada em (2.0.3).

Observação 2.0.3 *O quociente* $\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$ *é a interseção no eixo* y *da reta secante que passa pelos pontos* $(a, f(a))$ *e* $(b, f(b))$.

(**4**). M.R. Spiegel em [30] observou que podemos encontrar ϕ da seguinte forma: Vamos procurar uma aproximação linear de f, $\alpha + \beta x$, no intervalo $[a, b]$, onde α e β são constantes a serem determinadas. Agora consideremos a diferença, $\phi(x)$, entre $f(x)$ e sua aproximação linear $\alpha + \beta x$, i.e.,

$$\phi(x) = f(x) - (\alpha + \beta x), \tag{2.0.6}$$

onde α e β são números reais a serem determinados satisfazendo a condição $\phi(a) = \phi(b)$. Observe que

$$\begin{aligned} \phi(a) &= f(a) - (\alpha + \beta a) \\ \phi(b) &= f(b) - (\alpha + \beta b), \end{aligned} \tag{2.0.7}$$

logo

$$\phi(a) = \phi(b) \Leftrightarrow f(a) - (\alpha + \beta a) = f(b) - (\alpha + \beta b) \Leftrightarrow \beta = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Para encontrar α, fazemos $\phi(a) = 0$, assim de (2.0.7) obtemos

$$\alpha = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}a.$$

Portanto, substituindo α e β em (2.0.6) obtemos

$$
\begin{aligned}
\phi(x) &= f(x) - \Big(f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}a + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x\Big) \\
&= f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).
\end{aligned}
$$

• Se fazemos uma ligeira modificação da aproximação linear de f da forma

$$\phi(x) = f(x) + \beta x, \tag{2.0.8}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que a condição $\phi(a) = \phi(b)$ seja satisfeita. Então

$$\phi(a) = \phi(b) \Leftrightarrow f(a) + \beta a = f(b) + \beta b \Leftrightarrow \beta = -\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Assim a função $\phi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle. Então existe $\eta \in (a,b)$ tal que $\phi'(\eta) = 0$. Assim

$$\phi'(\eta) = 0 \Leftrightarrow f'(\eta) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Leftrightarrow f'(\eta) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Observe que a função $\phi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ é a mesma que aparece em (2.0.4).

• Se fazemos uma ligeira modificação da aproximação linear de f da forma

$$\phi(x) = f(x) - \big(\alpha + \beta(x-a)\big), \tag{2.0.9}$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ serem determinados satisfazendo a condição $\phi(a) = \phi(b)$. Observe que

$$
\begin{aligned}
\phi(a) &= f(a) - \alpha \\
\phi(b) &= f(b) - \big(\alpha + \beta(b-a)\big).
\end{aligned}
\tag{2.0.10}
$$

Logo,

$$\phi(a) = \phi(b) \Leftrightarrow f(a) - \alpha = f(b) - \big(\alpha + \beta(b-a)\big) \Leftrightarrow \beta = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Para encontrar α, fazemos $\phi(a) = 0$, assim de (2.0.10) obtemos

$$\alpha = f(a).$$

Portanto, substituindo α e β em (2.0.9) obtemos a tradicional função auxiliar usada na demonstração do Teorema do Valor Médio

$$\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a).$$

• Se fazemos uma ligeira modificação da aproximação linear da f da forma

$$\phi(x) = f(x) - \beta(x-a),$$

obtemos a função auxiliar $\phi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ a qual a função que aparece em (2.0.5).

(**5**). J.Tong [36] introduziu uma nova função auxiliar da forma

$$H(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\Big(x - \frac{a+b}{2}\Big). \tag{2.0.11}$$

Facilmente vemos que

$$\begin{aligned}
H(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\Big(a - \frac{a+b}{2}\Big) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\Big(\frac{a-b}{2}\Big) \\
&= f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{2} = \frac{f(a) + f(a)}{2} \\
H(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\Big(b - \frac{a+b}{2}\Big) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\Big(\frac{b-a}{2}\Big) \\
&= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{2} = \frac{f(a) + f(b)}{2}.
\end{aligned}$$

Assim, $H(a) = H(b)$.

As coordenadas do ponto médio M do segmento AB (Veja a Figura 2.6) são $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$ e as coordenadas do ponto médio N do intervalo (a, b) são $\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$.

Agora a equação da reta que passa por N e é paralela ao segmento de reta AB é dada por $y = l(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$. O significado geométrico da função auxiliar H é a diferença de f com a função l.

A função auxiliar H é interessante porque $\frac{a+b}{2}$ é a média aritmética de a e b e valor de $H(a)$ é a média aritmética de $f(a)$ e $f(b)$. Assim, para mostrar o Teorema do Valor Médio usando a função auxiliar H, a média aritmética de a e b é usada para obter a média aritmética de $f(a)$ e $f(b)$. Isto torna a função auxiliar $H(x)$ e $H(a)$ mais fáceis de memorizar.

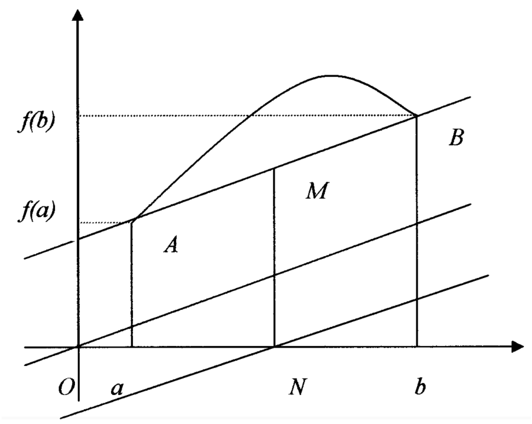

Figura 2.6: Função auxiliar H.

Em termos de determinantes a função H é dada por

$$H(x) = \frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} f(x) + \frac{f(a)+f(b)}{2} & x & 1 \\ f(b) & b & 1 \\ f(a) & a & 1 \end{vmatrix}.$$

Fazendo uns cálculos simples obtemos $H(a) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

Observação 2.0.4 *Se mudarmos ligeiramente a função auxiliar H dada em*

(2.0.11) *pela função auxiliar*

$$H(x) = f(x) - \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Big(x - \frac{a+b}{2}\Big). \tag{2.0.12}$$

Facilmente vemos que

$$\begin{aligned} H(a) &= f(a) - \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Big(a - \frac{a+b}{2}\Big) \\ &= \frac{f(a)-f(b)}{2} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Big(\frac{a-b}{2}\Big) = 0 \\ H(b) &= f(b) - \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Big(b - \frac{a+b}{2}\Big) \\ &= \frac{f(b)-f(a)}{2} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Big(\frac{b-a}{2}\Big) = 0. \end{aligned}$$

Assim, $H(a) = 0 = H(b)$. Logo, do Teorema de Rolle obtemos a conclusão do Teorema de Lagrange.

(**6**). J.Tong em [38] exibe uma família de funções auxiliares que envolvem dois parâmetros α e β as quais satisfazem o Teorema de Rolle. Consequentemente obtemos uma família de Teoremas de Valor Médio. Em particular quando $\alpha = \beta$ obtêm-se o Teorema do Valor Médio de Lagrange. Isto leva a concluir que a existência de funções auxiliares é infinito.

M.A.Qazi em [22] mostrou a equivalência entre o Teorema de Rolle e o Teorema do Valor Médio de Lagrange.

Proposição 2.0.5 *O Teorema de Rolle e o Teorema do Valor Médio de Lagrange são equivalentes.*

Demonstração. (**i**) Teorema de Rolle implica Teorema do Valor Médio.

De fato, seja f uma função que satisfaz as hipóteses do Teorema do valor médio. Consideremos a função

$$\begin{aligned} \psi : \quad [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\to \psi(x) = f(x) + \lambda x \end{aligned}$$

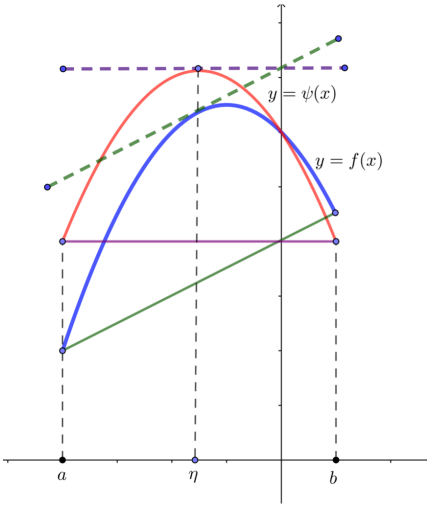

Figura 2.7: Gráficos de f e ψ.

onde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Vamos escolher λ tal que a condição $\psi(a) = \psi(b)$ seja satisfeita. Então

$$\psi(a) = \psi(b) \Leftrightarrow f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b \Leftrightarrow \lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Assim a função $\psi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle. Então existe $\eta \in (a, b)$ tal que $\psi'(\eta) = 0$. Assim

$$\psi'(\eta) = 0 \Leftrightarrow f'(\eta) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Leftrightarrow f'(\eta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(**ii**) Teorema do Valor Médio implica Teorema de Rolle.

De fato, se $f(a) = f(b)$, o Teorema do Valor Médio (Teorema 2.0.1) se reduz ao Teorema de Rolle (Teorema 1.2.1). $\square$

Portanto, daqui em diante não distinguiremos o Teorema de Rolle do Teorema do Valor Médio de Lagrange e consideraremos ambos como o teorema do valor médio.

Outra demonstração do Teorema do Valor Médio([26, pp. 28–30])

A seguinte demonstração do Teorema do Valor Médio não faz uso de uma função auxiliar.

Denotemos por $[a_0, b_0] = [a, b]$ e definamos $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ e $d = \frac{a+b}{2}$, o qual divide o intervalo $[a_0, b_0]$ em dois subintervalos de comprimento $h = \frac{b_0-a_0}{2}$.

Afirmação 1. Existe um intervalo $[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$ de comprimento h tal que $\frac{f(b_1)-f(a_1)}{h} = m$.

De fato, definamos

$$m_1 = \frac{f(d) - f(a_0)}{h} \quad \text{e} \quad m_2 = \frac{f(b_0) - f(d)}{h}.$$

Então,

$$\min\{m_1, m_2\} \leqslant m \leqslant \max\{m_1, m_2\}. \tag{2.0.13}$$

Agora, definamos a função $g : [a, d] \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Observe que

$$g(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(d) - f(a)}{h} = m_1$$
$$g(d) = \frac{f(d+h) - f(d)}{h} = \frac{f(b) - f(d)}{h} = m_2.$$

De (2.0.13), segue que existe $a_1 \in (a, d)$ tal que $g(a_1) = m$, i.e.,

$$\frac{f(a_1 + h) - f(a_1)}{h} = m.$$

Denotando por $b_1 = a_1 + h$, temos que existe o intervalo $[a_1, b_1]$ de comprimento h que está contido em $[a_0, b_0]$ tal que $\frac{f(b_1)-f(a_1)}{b_1-a_1} = m$. Isto demonstra a Afirmação.

Agora aplicando a **Afirmação 1** repetidamente obtemos uma sequência $[a_n, b_n]$ de intervalos encaixantes tal que:

(i) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$,

(ii) $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$, $n = 1, 2, \cdots$,

(iii) $\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} = m$.

Então pelo Teorema dos Intervalos Encaixantes (Teorema 1.1.1) existe um único $\eta \in [a_n, b_n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se $\eta = a_N$ para algum $N \in \mathbb{N}$, então $\eta = a_n$ para todo $n > N$, de modo que

$$m = \frac{f(b_n) - f(\eta)}{b_n - \eta} \to f'(\eta).$$

Similarmente, obtemos $m = f'(\eta)$ se $\eta = b_N$ para algum $N \in \mathbb{N}$

Se $a_n < \eta < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$m = \mu_n \left[\frac{f(\eta) - f(a_n)}{\eta - a_n}\right] + (1 - \mu_n)\left[\frac{f(b_n) - f(\eta)}{b_n - \eta}\right], \ \forall n \in \mathbb{N}$$

onde

$$0 < \mu_n = \frac{\eta - a_n}{b_n - a_n} < 1.$$

Se $\left|\frac{f(\eta)-f(a_n)}{\eta-a_n} - f'(\eta)\right| < \epsilon$ e $\left|\frac{f(b_n)-f(\eta)}{b_n-\eta} - f'(\eta)\right| < \epsilon$, onde $\epsilon > 0$, então

$$\begin{aligned}
\left|m - f'(\eta)\right| &= \left|\mu_n \left[\frac{f(\eta) - f(a_n)}{\eta - a_n} - f'(\eta)\right] + (1 - \mu_n)\left[\frac{f(b_n) - f(\eta)}{b_n - \eta} - f'(\eta)\right]\right| \\
&\leqslant \mu_n \left|\frac{f(\eta) - f(a_n)}{\eta - a_n} - f'(\eta)\right| + (1 - \mu_n)\left|\frac{f(b_n) - f(\eta)}{b_n - \eta} - f'(\eta)\right| \\
&< \mu_n \epsilon + (1 - \mu_n)\epsilon = \epsilon.
\end{aligned}$$

Com um pouco de cuidado, pode-se garantir que $a < \eta < b$. Deixamos isto para o leitor verificar. □

2.1 Teorema de Lagrange: Variações

Em 1958 T.M. Flett[1] em [5] enunciou e demonstrou uma variação do Teorema de Rolle onde a condição $f(a) = f(b)$ foi substituída por $f'(a) = f'(b)$. Por

[1]Thomas Muirhead Flett (1923-1976), matemático britânico.

este motivo, diz-se que o Teorema de Flett é um Teorema do tipo de Lagrange com uma condição do tipo Rolle, ou simplesmente, Teorema do tipo Valor Médio com uma condição do tipo Rolle.

Teorema 2.1.1 (Teorema de Flett) *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função derivável em $[a,b]$ e $f'(a) = f'(b)$, então existe $\eta \in (a,b)$ tal que*

$$f(\eta) - f(a) = f'(\eta)(\eta - a). \tag{2.1.1}$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que $f'(a) = f'(b) = 0$, pois caso contrário fazemos $\psi(x) = f(x) - xf'(a)$ e daí teremos $\psi'(a) = \psi'(b) = 0$.

Consideremos a função $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & x \in (a,b] \\ f'(a), & x = a. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

A função g é contínua em $[a,b]$ e derivável em $(a,b]$. Além disso,

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{x-a} - \frac{g(x)}{x-a}, \quad \forall x \in (a,b].$$

Observe que $g(a) = 0$. Se $g(b) = 0$, pelo Teorema de Rolle existe $\eta \in (a,b)$ tal que $g'(\eta) = 0$ e o teorema está provado.

Suponhamos $g(b) \neq 0$. Se $g(b) > 0$, então

$$g'(b) = \frac{f'(b) - g(b)}{b-a} = -\frac{g(b)}{b-a} < 0.$$

Assim, como g é contínua e $g'(b) < 0$, existe uma vizinhança de b onde g é decrescente, logo, existe $x_1 \in (a,b)$ tal que $0 = g(a) < g(b) \leqslant g(x_1)$. Segue do Teorema do Valor Intermediário, que existe $\xi \in (a, x_1)$ tal que $g(\xi) = g(b)$. E então, do Teorema de Rolle aplicado ao intervalo $[\xi, b]$, existe $\eta \in (\xi, b) \subset (a,b)$

tal que $g'(\eta) = 0$, isto é,

$$g'(\eta) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\eta) - g(\eta)}{\eta - a} = 0 \Leftrightarrow f'(\eta) = g(\eta) = \frac{f(\eta) - f(a)}{\eta - a}.$$

O caso em que $g(b) < 0$ a demonstração é análoga. □

Interpretação geométrica.

Se o gráfico de $y = f(x)$ tem tangente em cada ponto do intervalo $[a, b]$ e as retas tangentes nos extremos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ são paralelas, então, existe um ponto $\eta \in (a, b)$ de modo que a reta tangente ao gráfico de f que passa por $(\eta, f(\eta))$ também passa por $(a, f(a))$, como podemos ver na Figura 2.8.

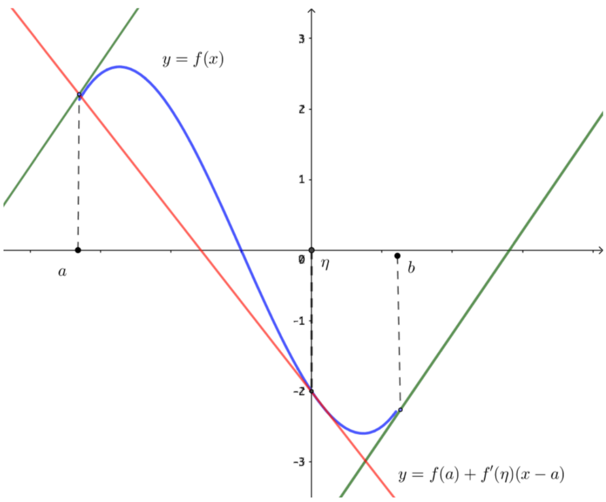

Figura 2.8: Interpretação geométrica doTeorema de Flett.

Interpretação física.

Se as velocidades inicial e final de uma partícula com trajetória suave $x = f(t)$ no intervalo de tempo $[a, b]$ forem iguais, então, existe um instante $t = \eta \in (a, b)$ tal que a velocidade instantânea da partícula neste instante, é exatamente a velocidade média do percurso até o instante $t = \eta$.

Uma prova diferente do Teorema de Flett usando o Teorema de Fermat pode ser encontrada em [23, p.225].

Em 1977, R.E. Myers (veja [19, Teorema 1′]) mostrou um resultado o qual é uma ligeira modificação do Teorema de Flett.

Teorema 2.1.2 (Teorema de Myers) *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função derivável em $[a,b]$ e $f'(a) = f'(b)$, então existe $\eta \in (a,b)$ tal que*

$$f(b) - f(\eta) = f'(\eta)(b - \eta). \tag{2.1.3}$$

Demonstração. A demonstração é análoga a demonstração do Teorema de Flett exceto com algumas pequenas mudanças. Para isto considere a função

$$\begin{aligned} g: \quad [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x \quad &\to g(x) = \begin{cases} \frac{f(b)-f(x)}{b-x}, & x \in [a,b) \\ f'(b), & x = b. \end{cases} \end{aligned}$$

Os detalhes da demonstração deixamos para o leitor. □

A interpretação geométrica e física do Teorema de Myers (Teorema 2.1.2) é semelhante ao teorema de Flett.

É imediato ver que existem nove possíveis quocientes tendo como numerador $f(b) - f(a)$, $f(b) - f(\eta)$, $f(\eta) - f(a)$ e denominador $b - a$, $b - \eta$, $\eta - a$.

T.M.Flett (veja [5]), D.H. Trahan (veja [41]) e o Teorema do Valor Médio (Teorema 2.0.1) dão condições para garantir que três desses nove quocientes são iguais a $f'(\eta)$.

R.E. Myers (veja [19]) deu condições para que os outros seis quocientes seja válidos, i.e., deu condições para garantir a existência de um número que é igual ao quociente que queremos.

Teorema 2.1.3 *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), então existe $\eta \in (a,b)$ tal que*

$$f(b) - f(\eta) = f'(\eta)(\eta - a). \tag{2.1.4}$$

Demonstração. Consideremos a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = f(b)x - (x - a)f(x).$$

Claramente vemos que g é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Logo, do Teorema do Valor Médio existe $\eta \in (a, b)$ tal que $g(b) - g(a) = g'(\eta)(b - a)$.

Agora, $g'(x) = f(b) - f(x) - (x - a)f'(x)$. Logo,

$$\begin{aligned} g(b) - g(a) &= g'(\eta)(b - a) \\ f(b)b - (b - a)f(b) - f(b)a &= \big[f(b) - f(\eta) - (\eta - a)f'(\eta)\big](b - a) \\ 0 &= \big[f(b) - f(\eta) - (\eta - a)f'(\eta)\big](b - a). \end{aligned}$$

Como $b - a > 0$, segue que (2.1.4) está satisfeita. □

Teorema 2.1.4 *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe $\eta \in (a, b)$ tal que*

$$f(\eta) - f(a) = f'(\eta)(b - \eta). \tag{2.1.5}$$

Demonstração. Consideremos a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = f(a)x + (b - x)f(x).$$

Claramente vemos que g é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Logo, do Teorema do Valor Médio existe $\eta \in (a, b)$ tal que $g(b) - g(a) = g'(\eta)(b - a)$.

Agora, $g'(x) = f(a) - f(x) + (b - x)f'(x)$. Logo,

$$\begin{aligned} g(b) - g(a) &= g'(\eta)(b - a) \\ f(a)b - \big[f(a)a + (b - a)f(a)\big] &= \big[f(a) - f(\eta) + (b - \eta)f'(\eta)\big](b - a) \\ 0 &= \big[f(a) - f(\eta) + (b - \eta)f'(\eta)\big](b - a) \end{aligned}$$

Como $b - a > 0$, segue que (2.1.5) está satisfeita. $\square$

S.Reich deu uma demonstração diferente do teorema acima (veja [24, Corolário 3]).

Teorema 2.1.5 *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função derivável em $[a, b]$ e f' é contínua em $[a, b]$ e*

$$\big[f(b) - f(a)\big]\big[f(b) - f(a) - (b - a)f'(b)\big] < 0, \tag{2.1.6}$$

então existe $\eta \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(\eta)(\eta - a). \tag{2.1.7}$$

Demonstração. Consideremos a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = f(b) - f(a) - (x - a)f'(x).$$

Claramente vemos que g é uma função contínua em $[a, b]$ e

$$\begin{aligned} g(a) &= f(b) - f(a) \\ g(b) &= f(b) - f(a) - (b - a)f'(b). \end{aligned}$$

De (2.1.6) concluímos que $g(a)$ e $g(b)$ tem sinais opostos. Logo, do Teorema do Valor Intermediário existe $\eta \in (a, b)$ tal que $g(\eta) = 0$, i.e.,

$$\begin{aligned} g(\eta) = 0 &\Leftrightarrow f(b) - f(a) - (\eta - a)f'(\eta) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(\eta)(\eta - a). \end{aligned}$$

$\square$

Definição 2.1.6 *Sejam L_1 e L_2 duas retas com inclinações m_1 e m_2 respectivamente. Dizemos que L_1 é mais íngrime que L_2 se $|m_1| > |m_2|$.*

A condição (2.1.6) do Teorema 2.1.5 tem uma interpretação geométrica: a reta tangente que passa por $(b, f(b)$ é mais íngrime do que a reta secante que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Além disso, as duas retas tem inclinações como o mesmo sinal.

Teorema 2.1.7 *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função derivável em* $[a, b]$ *e* f' *é contínua em* $[a, b]$ *e*

$$\big[f(b) - f(a)\big]\big[f(b) - f(a) - (b - a)f'(a)\big] < 0, \tag{2.1.8}$$

então existe $\eta \in (a, b)$ *tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(\eta)(b - \eta). \tag{2.1.9}$$

Demonstração. Consideremos a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = f(b) - f(a) - (b - x)f'(x).$$

Claramente vemos que g é uma função contínua em $[a, b]$ e

$$\begin{aligned} g(a) &= f(b) - f(a) - (b - a)f'(a) \\ g(b) &= f(b) - f(a). \end{aligned}$$

De (2.1.8) concluímos que $g(a)$ e $g(b)$ tem sinais opostos. Logo, do Teorema do Valor Intermediário existe $\eta \in (a, b)$ tal que $g(\eta) = 0$, i.e.,

$$\begin{aligned} g(\eta) = 0 &\Leftrightarrow f(b) - f(a) - (b - \eta)f'(\eta) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(\eta)(b - \eta). \end{aligned}$$

□

A condição (2.1.8) dada no Teorema 2.1.7 tem uma interpretação geométrica semelhante à do Teorema 2.1.5.

Teorema 2.1.8 *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função derivável em* $[a, b]$ *e* f' *é* *contínua em* $[a,b]$ *e*

$$f'(a)\big[f(b)-f(a)-(b-a)f'(b)\big]>0, \tag{2.1.10}$$

então existe $\eta \in (a,b)$ *tal que*

$$f(\eta)-f(a)=f'(\eta)(b-a). \tag{2.1.11}$$

Demonstração. Consideremos a função $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ dada por

$$g(x)=f(x)-f(a)-(b-a)f'(x).$$

Claramente vemos que g é uma função contínua em $[a,b]$ e

$$\begin{aligned} g(a)&=-(b-a)f'(a)\\ g(b)&=f(b)-f(a)-(b-a)f'(b). \end{aligned}$$

De (2.1.8) concluímos que $g(a)$ e $g(b)$ tem sinais opostos. Logo, do Teorema do Valor Intermediário existe $\eta \in (a,b)$ tal que $g(\eta)=0$, i.e.,

$$\begin{aligned} g(\eta)=0 &\Leftrightarrow f(\eta)-f(a)-(b-a)f'(\eta)=0\\ &\Leftrightarrow f(\eta)-f(a)=f'(\eta)(b-a). \end{aligned}$$

□

S.Penner removeu a condição (2.1.10) no Teorema 2.1.8 e deu condição $f'(\lambda)=0$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ e obteve a mesma conclusão (veja [23, p.233]).

Teorema 2.1.9 *Se* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *é uma função derivável em* $[a,b]$ *e* f' *é contínua em* $[a,b]$ *e*

$$f'(b)\big[f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)\big]>0, \tag{2.1.12}$$

então existe $\eta \in (a, b)$ *tal que*

$$f(b) - f(\eta) = f'(\eta)(b - a). \tag{2.1.13}$$

Demonstração. Consideremos a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = f(b) - f(x) - (b - a)f'(x).$$

Claramente vemos que g é uma função contínua em $[a, b]$ e

$$\begin{aligned} g(a) &= f(b) - f(a) - (b - a)f'(a) \\ g(b) &= -(b - a)f'(b). \end{aligned}$$

De (2.1.12) concluímos que $g(a)$ e $g(b)$ tem sinais opostos. Logo, do Teorema do Valor Intermediário existe $\eta \in (a, b)$ tal que $g(\eta) = 0$, i.e.,

$$\begin{aligned} g(\eta) = 0 &\Leftrightarrow f(b) - f(\eta) - (b - a)f'(\eta) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(b) - f(\eta) = f'(\eta)(b - a). \end{aligned}$$

□

Em 1998, P.K. Sahoo e T. Riedel (veja [26, Teorema 5.2]) deram uma variação do Teorema de Flett's (Teorema 2.1.1) onde eles removeram a condição de fronteira na derivada de f, i.e., $f'(a) = f'(b)$.

Teorema 2.1.10 (Teorema de Sahoo-Riedel) *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função derivável em* $[a, b]$, *então existe* $\eta \in (a, b)$ *tal que*

$$f(\eta) - f(a) = f'(\eta)(\eta - a) - \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(\eta - a)^2. \tag{2.1.14}$$

Demonstração. Consideremos a função auxiliar $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(x) = f(x) - \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(x - a)^2. \tag{2.1.15}$$

Facilmente vemos que ψ é derivável em $[a, b]$ e

$$\psi'(x) = f'(x) - \frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}(x-a).$$

Também

$$\psi'(a) = f'(a) = \psi'(b).$$

Aplicando o Teorema de Flett à função ψ, existe $\eta \in (a, b)$ tal que

$$\psi(\eta) - \psi(a) = \psi'(\eta)(\eta - a)$$

ou seja

$$\begin{gathered}\left\{f(\eta) - \frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(\eta-a)^2\right\} - f(a) = \left\{f'(\eta) - \frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(\eta-a)\right\}(\eta-a) \\ f(\eta) - f(a - \frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(\eta-a)^2 = f'(\eta)(\eta-a) - \frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(\eta-a)^2.\end{gathered}$$

Desta última igualdade segue (2.1.14). □

Observação 2.1.11 *A função auxiliar ψ usada no* Teorema de Sahoo-Riedel *é obtida considerando a diferença de f com uma aproximação quadrática de f,*

$$\alpha + \beta(x-a) + \gamma(x-a)^2$$

numa vizinhança de a, i.e., $\psi(x) = f(x) - \left[\alpha + \beta(x-a) + \gamma(x-a)^2\right]$ e impondo a condição de fronteira na derivada de ψ, $\psi'(a) = \psi'(b)$. Assim

$$\begin{aligned}\psi'(a) = \psi'(b) &\Leftrightarrow f'(a) - \beta = f'(b) - \beta - 2\gamma(b-a) \\ &\Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}.\end{aligned}$$

As constantes α e β são arbitrárias e por conveniência podemos tomar $\alpha = 0 = \beta$.

Obviamente, a função auxiliar ψ é única. Por exemplo a função $\Psi : [a, b] \to \mathbb{R}$

dada por

$$\Psi(x) = f(x) - \frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}\Big(\frac{x^2}{2} - ax\Big)$$

serve também para demonstrar o Teorema de Sahoo-Riedel pois $\Psi'(x) = \psi'(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Da Observação 2.1.11 podemos considerar a função auxiliar ψ, da forma

$$\psi(x) = f(x) + \lambda(x-a)^2,$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ que será escolhido de modo que a condição $\psi'(a) = \psi'(b)$ seja satisfeita. De fato, observe que $\psi'(x) = f'(x) + 2\lambda(x-a)$. Logo

$$\begin{aligned}\psi'(a) = \psi'(b) &\Leftrightarrow f'(a) = f'(b) + 2\lambda(b-a)\\ &\Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b-a}.\end{aligned}$$

Assim, obtemos a função auxiliar ψ dada em (2.1.15) usada na demonstração do Teorema de Sahoo-Riedel (Teorema 2.1.10).

Também da Observação 2.1.11 podemos considerar uma função auxiliar adequada para mostrar uma variação do Teorema de Sahoo-Riedel.

Teorema 2.1.12 ([11]) *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $[a, b]$, então existe $\eta \in (a, b)$ tal que*

$$f(\eta) - f(a) = f'(\eta)(\eta - a) - \frac{(n-1)}{n}\frac{f'(b) - f'(a)}{(b-a)^{n-1}}(\eta - a)^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.1.16)$$

Proof. Seja $n \in \mathbb{N}$ e considere a função auxiliar $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(x) = f(x) + \lambda(x-a)^n,$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ que vamos escolher λ tal que a condição $\psi'(a) = \psi'(b)$ seja satisfeita.

Facilmente vemos que ψ é derivável em $[a, b]$ e $\psi'(x) = f'(x) + n\lambda(x-a)^{n-1}$.

Então

$$\begin{aligned}\psi'(a) = \psi'(b) &\Leftrightarrow f'(a) = f'(b) + n\lambda(b-a)^{n-1}\\ &\Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{n}\frac{f'(b)-f'(a)}{(b-a)^{n-1}}.\end{aligned}$$

Assim, temos a função auxiliar

$$\psi(x) = f(x) - \frac{1}{n}\frac{f'(b)-f'(a)}{(b-a)^{n-1}}(x-a)^n$$

a qual satisfaz as hipótes do Teorema de Flett (Theorem 2.1.1). Então existe $\eta \in (a,b)$ tal que

$$\psi(\eta) - \psi(a) = \psi'(\eta)(\eta - a),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\left\{f(\eta) - \frac{1}{n}\frac{f'(b)-f'(a)}{(b-a)^{n-1}}(\eta-a)^n\right\} - f(a) &= \left\{f'(\eta) - \frac{f'(b)-f'(a)}{(b-a)^{n-1}}(\eta-a)^{n-1}\right\}(\eta-a)\\ f(\eta) - f(a) - \frac{1}{n}\frac{f'(b)-f'(a)}{(b-a)^{n-1}}(\eta-a)^n &= f'(\eta)(\eta-a) - \frac{f'(b)-f'(a)}{(b-a)^{n-1}}(\eta-a)^n.\end{aligned}$$

Agora, da última igualdade segue (2.1.16). ■

Observação 2.1.13 **(i)** *Se* $n = 1$ *em* (2.1.16) *obtemos o* Teorema de Flett (Teorema 2.1.1).
(ii) *Se* $n = 2$ *em* (2.1.16) *obtemos o* Teorema de Sahoo-Riedel (Teorema 2.1.10). *Neste caso a função auxiliar é da forma*

$$\psi(x) = f(x) - \frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{(b-a)}(x-a)^2 \text{ ([26, Teorema 5.2]).}$$

(iii) *Se* $n = 3$ *em* (2.1.16) *obtemos*

$$f(\eta) - f(a) = f'(\eta)(\eta-a) - \frac{2}{3}\frac{f'(b)-f'(a)}{(b-a)^2}(\eta-a)^3 \tag{2.1.17}$$

a qual é uma ligeira variação de (2.1.14). *Neste caso usamos a função auxiliar*

$$\psi(x) = f(x) - \frac{1}{3}\frac{f'(b) - f'(a)}{(b-a)^2}(x-a)^3.$$

Provavelmente, o primeiro estudo sobre o Teorema de Flett e sua generalização foi feito em 1966 por Donald H. Trahan [41]. Ele forneceu uma condição diferente na hipótese do Teorema de Flett usando uma desigualdade onde compara as inclinações da reta secante que passa pelo extremos e as retas tangentes no extremos do intervalo onde a função esta definida.

Primeiro vamos ver dois resultados básicos que serão usados na generalização.

Lema 2.1.14 ([41, Lema 1]) *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a,b]$*, derivável em* $(a,b]$ *e* $\big[f(b) - f(a)\big]f'(b) \leqslant 0$*, então existe* $\eta \in (a,b]$ *tal que* $f'(\eta) = 0$*.*

Demonstração. Suponhamos que $\big[f(b) - f(a)\big]f'(b) = 0$. Neste caso temos: Se $f(a) = f(b)$, então pelo Teorema de Rolle existe $\eta \in (a,b)$ tal que $f'(\eta) = 0$. Se $f'(b) = 0$, então fazendo $\eta = b$ temos $f'(\eta) = 0$.

Agora, suponhamos que $\big[f(b) - f(a)\big]f'(b) < 0$. Neste caso, $f'(b) < 0$ e $f(b) > f(a)$ ou $f'(b) > 0$ e $f(b) < f(a)$.

No primeiro caso, como f é contínua em $[a,b]$ com $f(b) > f(a)$ e $f'(b) < 0$, segue que a função f tem um máximo em $\eta \in (a,b)$. Similarmente, no segundo caso f tem um mínimo em algum $\eta \in (a,b)$ e portanto $f'(\eta) = 0$. Assim, a demonstração esta completa. □

O seguinte lema é uma consequência imediata do lema anterior.

Lema 2.1.15 ([41, Lema 2]) *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a,b]$*, derivável em* $(a,b]$ *e* $\big[f(b) - f(a)\big]f'(b) < 0$*, então existe* $\eta \in (a,b)$ *tal que* $f'(\eta) = 0$*.*

Agora, vejamos uma generalização do Teorema do Valor Médio de Flett.

Teorema 2.1.16 ([41]) *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função derivável em $[a,b]$*

$$\Big[f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Big]\Big[f'(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Big] \geqslant 0, \tag{2.1.18}$$

então existe $\eta \in (a,b)$ tal que

$$f(\eta) - f(a) = f'(\eta)(\eta - a).$$

Demonstração. Definamos a função $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & \text{se } x \in (a,b] \\ f'(a), & \text{se } x = a. \end{cases} \tag{2.1.19}$$

A função h é contínua em $[a,b]$, derivável em $(a,b]$ e

$$\begin{aligned} h'(x) &= \big(\frac{1}{x-a}\big)'(f(x) - f(a)) + \frac{1}{x-a}(f(x) - f(a))' \\ &= -\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2} + \frac{f'(x)}{x-a}, \quad \forall x \in (a,b]. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \big[h(b) - h(a)\big]h'(b) &= \Big[\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(a)\Big]\Big[-\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2} + \frac{f'(b)}{b-a}\Big] \\ &= -\frac{1}{b-a}\Big[\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(a)\Big]\Big[\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(b)\Big] \\ &= -\frac{1}{b-a}\Big[f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Big]\Big[f'(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Big]. \end{aligned}$$

Agora, usando (2.1.18) vemos que

$$\big[h(b) - h(a)\big]h'(b) \leqslant 0.$$

Portanto, aplicando o Lema 2.1.15, existe $\eta \in (a,b)$ tal que $h'(\eta) = 0$, i.e.,

$$h'(\eta) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\eta - a}\Big[\frac{f(\eta)-f(a)}{\eta - a} - f'(\eta)\Big] \Leftrightarrow f'(\eta) = \frac{f(\eta)-f(a)}{\eta - a}.$$

□

Observação 2.1.17 *Obviamente, a classe de funções de Trahan, isto é, funções diferenciáveis em $[a, b]$ que satisfazem a condição de Trahan* (2.1.18)*, é mais ampla que a classe de funções de Flett f deriváveis em $[a, b]$ que satisfazem a condição de Flett $f'(a) = f'(b)$.*

De fato, se $f'(a) = f'(b)$, então a condição de Trahan (2.1.18) *é trivialmente satisfeita. Por outro lado existem funções que satisfazem a condição de Trahan mas não satisfazem a condição de Flett, como por exemplo a função $f : [-\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ é derivável com $f'(x) = 3x^2$, esta satisfaz a condição de Trahan, pois*

$$\begin{aligned}&\left[f'(1) - \frac{f(1) - f(-\frac{1}{2})}{1 - (-\frac{1}{2})}\right]\left[f'(-\tfrac{1}{2}) - \frac{f(1) - f(-\frac{1}{2})}{1 - (-\frac{1}{2})}\right]\\ &= \left[3 - \frac{1 + \frac{1}{8}}{1 + \frac{1}{2}}\right]\left[\frac{3}{4} - \frac{1 + \frac{1}{8}}{1 + \frac{1}{2}}\right] = \left[3 - \tfrac{3}{4}\right]\left[\tfrac{3}{4} - \tfrac{3}{4}\right] = 0 \geqslant 0.\end{aligned}$$

Mas não satisfaz a condição de Flett, pois $f'(1) = 3 \neq \frac{3}{4} = f'(-\frac{1}{2})$.

O Teorema de Trahan (Teorema 2.1.16) é uma generalização do Teorema de Flett (Teorema 2.1.1) como ser visto no seguinte corolário.

Corolário 2.1.18 *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função derivável em $[a, b]$ e $f'(a) = f'(b)$, então existe $\eta \in (a, b)$ tal que*

$$f'(\eta) = \frac{f(\eta) - f(a)}{\eta - a}.$$

Demonstração. De fato, considere a função h dada na demonstração do Teorema de Trahan, i.e.,

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, & \text{se } x \in (a, b] \\ f'(a), & \text{se } x = a. \end{cases}$$

A função h é contínua em $[a, b]$, derivável em $(a, b]$ e

$$h'(x) = -\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} + \frac{f'(x)}{x-a}, \quad \forall x \in (a, b].$$

Consideremos os seguintes casos:

Caso 1. Quando

$$f(b) - f(a) = f'(b)(b-a). \tag{2.1.20}$$

Neste caso temos

$$\begin{aligned} h(b) - h(a) &= \frac{f(b) - f(a)}{b-a} - f'(a) \\ &= f'(b) - f'(a) = 0 \text{ (pelo Teorema 2.1.1)} \end{aligned}$$

Portanto, $h(b) = h(a)$. Logo, aplicando o Teorema de Rolle à função h, obtemos $h'(\eta) = 0$ para algum $\eta \in (a, b)$. Isto é,

$$h'(\eta) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\eta - a}\Big(\frac{f(\eta) - f(a)}{\eta - a} - f'(\eta)\Big) = 0 \Leftrightarrow f'(\eta) = \frac{f(\eta) - f(a)}{\eta - a}.$$

Caso 2. Quando

$$f(b) - f(a) \neq f'(b)(b-a). \tag{2.1.21}$$

Neste caso obtemos $f'(b) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} > 0$ ou $f'(b) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} < 0$. Agora, usando o fato que $f'(b) = f'(a)$, obtemos

$$\left[f'(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\right]\left[f'(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\right] > 0.$$

Assim, usando o Teorema de Trahan obtemos o Teorema de Flett. □

Corolário 2.1.19 *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função derivável em $[a, b]$, $f'(a)$ e*

$f'(b)$ são ambos menores ou maiores que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

então existe $\eta \in (a,b)$ tal que

$$f'(\eta) = \frac{f(\eta)-f(a)}{\eta - a}.$$

Demonstração. Suponhamos que

$$f'(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{e} \quad f'(b) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Daí,

$$\left[f'(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]\left[f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right] \geqslant 0.$$

Então do Teorema de Trahan existe $\eta \in (a,b)$ tal que

$$f'(\eta) = \frac{f(\eta)-f(a)}{\eta - a}.$$

Analogamente, se

$$f'(a) \geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{e} \quad f'(b) \geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Daí,

$$\left[f'(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]\left[f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right] \geqslant 0.$$

Então do Teorema de Trahan existe $\eta \in (a,b)$ tal que

$$f'(\eta) = \frac{f(\eta)-f(a)}{\eta - a}.$$

□

Significado geométrico da condição de Trahan.

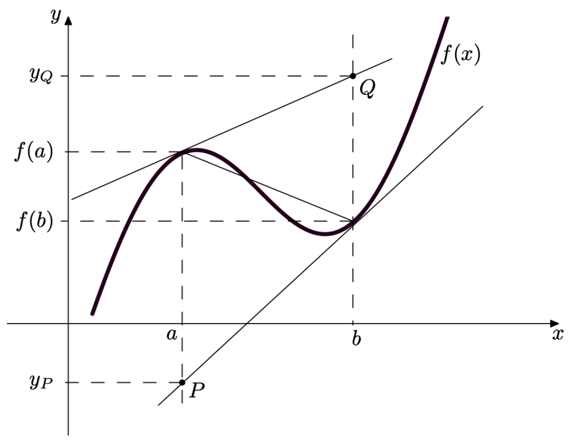

Figura 2.9: Interpretação geométrica do Teorema de Trahan.

A condição de Trahan (2.1.18) é satisfeita se, e somente se

$$\left[f'(b) \geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \wedge f'(a) \geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right] \vee$$
$$\left[f'(b) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \wedge f'(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right].$$

Assim, a condição de Trahan exige que as inclinações das retas tangente nos extremos do intervalo $[a,b]$ sejam maiores ou iguais ou que ambas sejam menores ou iguais à inclinação $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ da reta secante que passa pelos pontos $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$.

Consideremos os seguintes casos:
(**i**) Se $f'(b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, então a reta tangente em b é paralela à reta secante, e a reta tangente em a pode ser qualquer (paralela à secante, acima ou abaixo do gráfico da secante em (a,b). Analogamente para o caso $f'(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
(**ii**) Se $f'(b) \neq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ e $f'(a) \neq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, então uma das retas tangente nos extremos deve estar acima e a segunda abaixo do gráfico da reta secante em (a,b), ou vice-versa, veja a Figura 2.9. Mais especificamente, seja a reta tangente em a que intercepta a reta $x = b$ no ponto $Q = (b, y_Q)$ e a reta tangente em b interceptar a reta $= a$ no ponto $P = (a, y_P)$. Então $y_Q > f(b0$ e $y_P < f(a)$ ou $y_Q < f(b)$ e $y_P > f(a)$.

D.Çakmak e A.Tiryaki (veja [2, Theorem 2.1]) mostrou uma ligeira variação do Teorema de Sahoo-Riedel (Teorema 2.1.10) e este se reduz ao Teorema de Myers (Teorema 2.1.2) quando $f'(a) = f'(b)$.

Teorema 2.1.20 (Teorema de Çakmak-Tiryaki's) *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável em*$[a,b]$, *então existe* $\eta \in (a,b)$ *tal que*

$$f(b) - f(\eta) = f'(\eta)(b-\eta) + \frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(b-\eta)^2. \tag{2.1.22}$$

Demonstração. Considere a função auxiliar $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = f(x) - \frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(x-b)^2. \tag{2.1.23}$$

Facilmente vemos que h é derivável em $[a,b]$ e

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(x-b). \tag{2.1.24}$$

Também facilmente vemos que $h'(a) = f'(b) = h'(b)$. Logo, aplicando o Teorema de Myers (Teorema 2.1.2) à função h, existe $\eta \in (a,b)$ tal que

$$h(b) - h(\eta) = h'(\eta)(b-\eta),$$

a qual implica

$$f(b) - \left\{f(\eta) - \frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{\eta-a}(\eta-b)^2\right\} = \left\{f'(\eta) - \frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(\eta-b)\right\}(b-\eta)$$
$$f(b) - f(\eta) + \frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{\eta-a}(\eta-b)^2 = f'(\eta)(b-\eta) + \frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(b-\eta)^2.$$

Agora, da última desigualdade segue (2.1.22). □

Escolhendo um função auxiliar simples adequada obtemos a seguinte variação do Teorema de Çakmak-Tiryaki.

Teorema 2.1.21 ([11]) *Se* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é uma função derivável em* $[a,b]$, *então existe* $\eta \in (a, b)$ *tal que*

$$f(b) - f(\eta) = f'(\eta)(b - \eta) + \frac{n-1}{n}\frac{f'(b) - f'(a)}{(b-a)^{n-1}}(b - \eta)^n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.1.25}$$

Proof. Seja $n \in \mathbb{N}$ e considere a função auxiliar $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(x) = f(x) + \lambda(x - b)^n,$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Vamos escolher λ tal que a condição $\phi'(a) = \phi'(b)$ esteja satisfeita.

A função ϕ é derivável em $[a, b]$ e $\phi'(x) = f'(x) + n\lambda(x - b)^{n-1}$. Então

$$\begin{aligned} \phi'(a) = \phi'(b) &\Leftrightarrow f'(a) + n\lambda(a - b)^{n-1} = f'(b) \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{n}\frac{f'(b) - f'(a)}{(a-b)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Assim, temos a função auxiliar

$$\phi(x) = f(x) + \frac{1}{n}\frac{f'(b) - f'(a)}{(a-b)^{n-1}}(x - b)^n$$

a qual satisfaz as condições do Teorema Myers (Theorem 2.1.2). Então existe $\eta \in (a, b)$ tal que

$$\phi(b) - \phi(\eta) = \phi'(\eta)(b - \eta),$$

a qual implica,

$$\begin{aligned} f(b) - \left\{f(\eta) + \frac{1}{n}\frac{f'(b) - f'(a)}{(a-b)^{n-1}}(\eta - b)^n\right\} &= \left\{f'(\eta) + \frac{f'(b) - f'(a)}{(a-b)^{n-1}}(\eta - b)^{n-1}\right\}(b - \eta) \\ f(b) - f(\eta) - \frac{1}{n}\frac{f'(b) - f'(a)}{(a-b)^{n-1}}(\eta - b)^n &= f'(\eta)(\eta - b) + \frac{f'(b) - f'(a)}{(a-b)^{n-1}}(\eta - b)^{n-1}(b - \eta). \end{aligned} \tag{2.1.26}$$

(**i**) Se n é par, da equação (2.1.26) obtemos

$$\begin{aligned} f(b) - f(\eta) + \frac{1}{n}\frac{f'(b) - f'(a)}{(b-a)^{n-1}}(b-\eta)^n &= f'(\eta)(\eta - b) + \frac{f'(b) - f'(a)}{(b-a)^{n-1}}(b-\eta)^n \\ f(b) - f(\eta) &= f'(\eta)(b-\eta) + \frac{n-1}{n}\frac{f'(b) - f'(a)}{(b-a)^{n-1}}(b-\eta)^n. \end{aligned}$$

(**ii**) Se n é ímpar, da equação (2.1.26) obtemos

$$\begin{aligned} f(b) - f(\eta) + \frac{1}{n}\frac{f'(b) - f'(a)}{(b-a)^{n-1}}(b-\eta)^n &= f'(\eta)(\eta - b) + \frac{f'(b) - f'(a)}{(b-a)^{n-1}}(b-\eta)^n \\ f(b) - f(\eta) &= f'(\eta)(b-\eta) + \frac{n-1}{n}\frac{f'(b) - f'(a)}{(b-a)^{n-1}}(b-\eta)^n. \end{aligned}$$

Agora, de (**i**) e (**ii**) obtemos (2.1.25). ■

Observação 2.1.22 (**i**) *Se* $n = 1$ *em* (2.1.25) *obtemos o* Teorema de Myers (Teorema 2.1.2).
(**ii**) *Se* $n = 2$ *em* (2.1.25) *obtemos o* Teorema de Çakmak-Tiryaki (veja Teorema 2.1.20)*. Neste caso a função auxiliar é da forma*

$$\phi(x) = f(x) + \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{(a-b)}(x-b)^2.$$

(**iii**) *Se* $n = 3$ *em* (2.1.25) *obtemos*

$$f(b) - f(\eta) = f'(\eta)(b-\eta) + \frac{2}{3}\frac{f'(b) - f'(a)}{(b-a)^2}(b-\eta)^3 \tag{2.1.27}$$

a qual é uma variação de (2.1.22)*. Neste caso temos a função auxiliar*

$$\phi(x) = f(x) + \frac{1}{3}\frac{f'(b) - f'(a)}{(b-a)^2}(x-b)^3.$$

Seguindo as ideias de D. H. Trahan em [41] obtemos uma generalização do Teorema de Myers (Teorema 2.1.2). O seguinte resultado é análogo ao Lema 2.1.14.

Lema 2.1.23 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a, b]$*, derivável em* $[a, b)$ *e* $\big[f(b) - f(a)\big]f'(a) \leqslant 0$*, então existe* $\eta \in [a, b)$ *tal que* $f'(\eta) = 0$*.*

Demonstração. Suponhamos que $\big[f(b) - f(a)\big]f'(a) = 0$. Neste caso temos: Se $f(a) = f(b)$, então pelo Teorema de Rolle existe $\eta \in (a, b)$ tal que $f'(\eta) = 0$. Se $f'(a) = 0$, então fazendo $\eta = a$ temos $f'(\eta) = 0$.

Agora, suponhamos que $\big[f(b) - f(a)\big]f'(a) < 0$. Neste caso, $f'(a) < 0$ e $f(b) > f(a)$ ou $f'(a) > 0$ e $f(b) < f(a)$.

No primeiro caso, como f é contínua em $[a, b]$ com $f(b) > f(a)$ e $f'(a) < 0$, segue que a função f tem um mínimo em $\eta \in (a, b)$. Similarmente, no segundo caso f tem um máximo em algum $\eta \in (a, b)$ e portanto $f'(\eta) = 0$. Assim, a demonstração esta completa. □

O seguinte lema é uma consequência imediata do lema anterior.

Lema 2.1.24 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a, b]$*, derivável em* $[a, b)$ *e* $\big[f(b) - f(a)\big]f'(a) < 0$*, então existe* $\eta \in (a, b)$ *tal que* $f'(\eta) = 0$*.*

Demonstração. É análoga ao lema anterior. O detalhes deixamos ao leitor como um exercício. □

Agora, vejamos uma generalização do Teorema do Valor Médio de Myers.

Teorema 2.1.25 (Generalização do Teorema de Myers) *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função derivável em* $[a, b]$ *e*

$$\left[f'(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right]\left[f'(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right] \geqslant 0, \tag{2.1.28}$$

então existe $\eta \in (a, b)$ *tal que*

$$f(b) - f(\eta) = f'(\eta)(b - \eta).$$

Demonstração. Definamos a função $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(b)-f(x)}{b-x}, & \text{se } x \in [a, b) \\ f'(b), & \text{se } x = b. \end{cases} \tag{2.1.29}$$

A função h é contínua em $[a,b]$, derivável em $[a,b)$ e

$$\begin{aligned} h'(x) &= \Big(\frac{1}{b-x}\Big)'(f(b)-f(x)) + \frac{1}{x-a}(f(b)-f(x))' \\ &= \frac{f(b)-f(x)}{(b-x)^2} - \frac{f'(x)}{b-x}, \quad \forall x \in [a,b). \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \big[h(b)-h(a)\big]h'(a) &= \Big[f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Big]\Big[\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2} - \frac{f'(a)}{b-a}\Big] \\ &= -\frac{1}{b-a}\Big[f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Big]\Big[f'(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Big]. \end{aligned}$$

Usando (2.1.28) vemos que

$$\big[h(b)-h(a)\big]h'(a) \leqslant 0.$$

Portanto, aplicando o Lema 2.1.24, existe $\eta \in (a,b)$ tal que $h'(\eta) = 0$, i.e.,

$$h'(\eta) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{b-\eta}\Big[\frac{f(b)-f(\eta)}{b-\eta} - f'(\eta)\Big] \Leftrightarrow f'(\eta) = \frac{f(b)-f(\eta)}{b-\eta}.$$

□

O Teorema 2.1.25 é uma generalização do Teorema de Myers (Teorema 2.1.2) como ser visto no seguinte corolário.

Corolário 2.1.26 *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função derivável em $[a,b]$ e $f'(a) = f'(b)$, então existe $\eta \in (a,b)$ tal que*

$$f'(\eta) = \frac{f(b)-f(\eta)}{b-\eta}.$$

Demonstração. De fato, considere a função h dada na demonstração do Teorema 2.1.25, i.e.,

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(b)-f(x)}{b-x}, & \text{se } x \in [a,b) \\ f'(b), & \text{se } x = b. \end{cases}$$

A função h é contínua em $[a, b]$, derivável em $[a, b)$ e

$$h'(x) = \frac{f(b) - f(x)}{(b - x)^2} - \frac{f'(x)}{b - x}, \quad \forall x \in [a, b).$$

Consideremos os seguintes casos:

Caso 1. Quando

$$f(b) - f(a) = f'(b)(b - a). \tag{2.1.30}$$

Neste caso temos

$$\begin{aligned} h(b) - h(a) &= f'(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ &= f'(b) - f'(b) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $h(b) = h(a)$. Logo, aplicando o Teorema de Rolle à função h, obtemos $h'(\eta) = 0$ para algum $\eta \in (a, b)$. Isto é,

$$h'(\eta) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{b - \eta}\Big(\frac{f(b) - f(\eta)}{b - \eta} - f'(\eta)\Big) = 0 \Leftrightarrow f'(\eta) = \frac{f(b) - f(\eta)}{b - \eta}.$$

Caso 2. Quando

$$f(b) - f(a) \neq f'(b)(b - a). \tag{2.1.31}$$

Neste caso obtemos $f'(b) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$ ou $f'(b) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0$. Agora, usando o fato que $f'(b) = f'(a)$, obtemos

$$\left[f'(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right]\left[f'(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right] > 0.$$

Assim, usando o Teorema 2.1.25 obtemos o Teorema de Myers (Teorema 2.1.2).

□

Corolário 2.1.27 *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função derivável em $[a, b]$, $f'(a)$ e*

$f'(b)$ *são ambos menores ou maiores que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

então existe $\eta \in (a,b)$ *tal que*

$$f'(\eta) = \frac{f(b)-f(\eta)}{b-\eta}.$$

Demonstração. É similar ao Corolário 2.1.19. Deixamos como exercício ao leitor. □

Muitos pesquisadores estudaram o Teorema de Flett dando extensões, generalizações ou demonstrações diferentes. Como por exemplo S.Reich deu uma demonstração ligeiramente diferente do Teorema de Flett (veja [24, Corolário 2]).

Em 2004, J.Tong (veja [37]) generalizou o Teorema de Flett removendo a condição de fronteira $f'(a) = f'(b)$ e impondo a condição $M_f = I_f$, onde

$$M_f = \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad \text{e} \quad I_f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Além disso, estudou as igualdades

$$f'(\eta) = \frac{f(b)-f(a)}{\eta-a} \tag{2.1.32}$$

$$f'(\eta) = \frac{f(\eta)-f(a)}{b-a} \tag{2.1.33}$$

Teorema 2.1.28 *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a,b]$ *e derivável em* (a,b)*. Se* $M_f = I_f$*, então existe* $\eta \in (a,b)$ *tal que*

$$f'(\eta) = \frac{f(\eta)-f(a)}{\eta-a}. \tag{2.1.34}$$

Demonstração. Considere a função auxiliar $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \frac{f(x) + f(a)}{2}(x - a) - \int_a^x f(t)dt.$$

A função h é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e usando o primeiro teorema fundamental do Cálculo obtemos

$$h'(x) = \frac{1}{2}f'(x)(x - a) + \frac{1}{2}\big[f(x) + f(a)\big] - f(x).$$

Um cálculo direto mostra que $h(a) = 0$ e

$$h(b) = \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a) - \int_a^b f(t)dt = (b - a)\big[M_f - I_f\big] = 0.$$

Portanto pelo Teorema de Rolle, existe $\eta \in (a, b)$ tal que $h'(\eta) = 0$, i.e.,

$$\begin{aligned} h'(\eta) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}f'(\eta)(\eta - a) + \frac{1}{2}\big[f(\eta) + f(a)\big] - f(\eta) = 0 \\ &\Leftrightarrow f'(\eta)(\eta - a) + \big[f(\eta) + f(a)\big] - 2f(\eta) = 0 \\ &\Leftrightarrow f'(\eta) = \frac{f(\eta) - f(a)}{\eta - a}. \end{aligned}$$

□

Significado geométrico da condição de Tong.
A condição $M_f = I_f$ não é tão evidente geometricamente em comparação com a condição de Flett $f'(a) = f'(b)$. Mas de uma certa maneira podemos pensar como *a área sob o gráfico de f no intervalo $[a, b]$ é exatamente a área do retângulo de lados $b - a$ e $\frac{f(a)+f(b)}{2}$*.

Observação 2.1.29 *Em geral, a igualdade $M_f = I_f$ não vale para qualquer função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Por exemplo, se $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$, então $M_f = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ enquanto que $I_f = \frac{1}{1-0}\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$.*

Neste contexto, temos a seguinte generalização do Teorema 2.1.28.

Teorema 2.1.30 *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), então existe $\eta \in (a,b)$ tal que*

$$f'(\eta) = \frac{f(\eta) - f(a)}{\eta - a} + 6\,\frac{(M_f - I_f)}{(b-a)^2}\,(\eta - a). \tag{2.1.35}$$

Demonstração. Considere a função $H : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$H(x) = f(x) - 6\,\frac{(M_f - I_f)}{(b-a)^2}\,(x-a)(x-b).$$

A função H é contínua em $[a,b]$, derivável em (a,b) e

$$H'(x) = f'(x) - 6\,\frac{(M_f - I_f)}{(b-a)^2}\,(2x - a - b).$$

Também facilmente vemos que $H(a) = f(a)$ e $H(b) = f(b)$. Portanto, $M_H = M_f$. Agora calculando I_H obtemos

$$\begin{aligned}
I_H &= \frac{1}{b-a}\int_a^b H(t)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b \Big\{f(t) - 6\,\frac{(M_f - I_f)}{(b-a)^2}\,(t-a)(t-b)\Big\}dt \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt - 6\,\frac{(M_f - I_f)}{(b-a)^3}\int_a^b (t-a)(t-b)dt \\
&= I_f - 6\,\frac{(M_f - I_f)}{(b-a)^3}\Big[\frac{t^3}{3} - (a+b)\frac{t^2}{2} + abt\Big]\Big|_a^b \\
&= I_f - 6\,\frac{(M_f - I_f)}{(b-a)^3}(b-a)\Big[\frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{2} + ab\Big] \\
&= I_f - 6\,\frac{(M_f - I_f)}{(b-a)^3}(b-a)\Big[\frac{2(b^2 + ab + a^2) - 3(a+b)^2 + 6ab}{6}\Big] \\
&= I_f + 6\,\frac{(M_f - I_f)}{(b-a)^3}(b-a)\Big[\frac{(b-a)^2}{6}\Big] \\
&= I_f + (M_f - I_f) = M_f = M_H.
\end{aligned}$$

Do Teorema 2.1.28, existe $\eta \in (a,b)$ tal que

$$H'(\eta) = \frac{H(\eta) - H(a)}{\eta - a},$$

i.e.,

$$\begin{aligned}
f'(\eta) - 6\,\frac{(M_f - I_f)}{(b-a)^2}\,(2\eta - a - b) &= \frac{1}{\eta - a}\Big[f(\eta) - 6\,\frac{(M_f - I_f)}{(b-a)^2}\,(\eta - a)(\eta - b) - f(a)\Big]\\
f'(\eta) - 6\,\frac{(M_f - I_f)}{(b-a)^2}\,(2\eta - a - b) &= \frac{f(\eta) - f(a)}{\eta - a} - 6\,\frac{(M_f - I_f)}{(b-a)^2}\,(\eta - b)\Big]\\
f'(\eta) &= \frac{f(\eta) - f(a)}{\eta - a} + 6\,\frac{(M_f - I_f)}{(b-a)^2}(\eta - a).
\end{aligned}$$

□

Com relação à igualdade (2.1.32), ela em geral não é satisfeita mesmo para uma função f derivável com $M_f = I_f$, como podemos ver no seguinte exemplo.

Por exemplo consideremos a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{e^x}{e-3} + 3x^2.$$

Facilmente vemos que

$$M_f = \frac{f(0) + f(1)}{2} = \frac{\frac{1}{e-3} + \frac{e}{e-3} + 3}{2} = \frac{4e-8}{2(e-3)} = \frac{2e-4}{e-3}$$

e

$$\begin{aligned}
I_f &= \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \Big(\frac{e^x}{e-3} + 3x^2\Big)dx = \Big[\frac{e^x}{e-3} + x^3\Big]\Big|_0^1\\
&= \Big[\frac{e}{e-3} + 1 - \frac{1}{e-3}\Big] = \Big[\frac{2e-4}{e-3}\Big].
\end{aligned}$$

Logo, $M_f = I_f$. Mas $f'(0) = \frac{1}{e-3} \neq \frac{7e-18}{e-3} = f'(1)$.

Teorema 2.1.31 *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a,b]$ *e* *derivável em (a, b). Se $M_f = I_f$, então existe $\eta \in (a, b)$ tal que*

$$f'(\eta) = \frac{f(b) - f(a)}{2(\eta - a)}. \tag{2.1.36}$$

Demonstração. Consideremos a função $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \int_a^x f(t)dt - \big[f(x) - f(b)\big](x - a) - \frac{x - a}{b - a}\int_a^b f(t)dt.$$

A função h é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e

$$\begin{aligned} h'(x) &= f(x) - f'(x)(x - a) - \big[f(x) - f(b)\big] - \frac{1}{b - a}\int_a^b f(t)dt \\ &= -f'(x)(x - a) + f(b) - \frac{1}{b - a}\int_a^b f(t)dt. \end{aligned}$$

Facilmente vemos que $h(a) = 0 = h(b)$. Então pelo Teorema de Rolle, existe $\eta \in (a, b)$ tal que $h'(\eta) = 0$, i.e.,

$$-f'(\eta)(\eta - a) + f(b) - \frac{1}{b - a}\int_a^b f(t)dt = 0.$$

Usando a hipótese $M_f = I_f$, obtemos

$$f'(\eta)(\eta - a) = f(b) - \frac{f(a) + f(b)}{2} \Leftrightarrow f'(\eta) = \frac{f(b) - f(a)}{2(\eta - a)}.$$

□

Interpretação geométrica.

O Teorema 2.1.31 diz que existe $\eta \in (a, b)$ onde a reta tangente ao gráfico de f em $(\eta, f(\eta))$ é paralela a reta que passa pelos pontos $(2a, f(a))$ e $(2\eta, f(b))$.

A seguinte função $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 3x + \frac{7}{3}$ é tal que

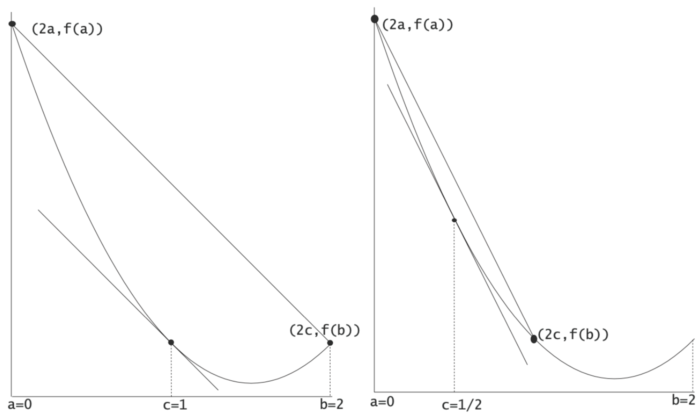

Figura 2.10: Interpretação geométrica do Teorema 2.1.31 onde $c = \eta$.

$M_f \neq I_f$ mas a equação (2.1.36) é satisfeita. De fato, observe

$$
\begin{aligned}
M_f &= \frac{f(0)+f(2)}{2} = \frac{\frac{7}{3}+4-6+\frac{7}{3}}{2} = \frac{\frac{14}{3}-2}{2} = \frac{4}{3}.\\
I_f &= \frac{1}{2-0}\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \Big(x^2-3x+\tfrac{7}{3}\Big)dx\\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{3}x\Big)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\Big(\frac{8}{3}-6+\frac{14}{3}\Big) = \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Logo, $M_f \neq I_f$.

Agora, a derivada de f é dada por $f'(x) = 2x-3$. Com isto da equação (2.1.36) obtemos

$$
\begin{aligned}
f'(\eta) = \frac{f(2)-f(0)}{2(\eta-0)} &\Leftrightarrow 2\eta-3 = \frac{4-6+\frac{7}{3}-\frac{7}{3}}{2\eta}\\
&\Leftrightarrow 2\eta-3 = -\frac{1}{\eta} \Leftrightarrow 2\eta^2-3\eta+1=0\\
&\Leftrightarrow (2\eta-1)(\eta-1)=0.
\end{aligned}
$$

Logo, $\eta = \frac{1}{2}$ ou $\eta = 1$.

Com relação à igualdade (2.1.33), em geral ela não é satisfeita mesmo para uma função f derivável com $M_f = I_f$, como podemos ver o seguinte exemplo.

Exemplo 2.1.32 *Seja* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \frac{e^x}{e-3} + 3x^2$*. Mostre que* $M_f = I_f$ *mas não existe* $\eta \in (0,1)$ *satisfazendo* (2.1.33).

Solução. Observe que f é uma função contínua em $[0,1]$, derivável em $(0,1)$ e $f'(x) = \frac{e^x}{e-3} + 6x$. Além disso

$$M_f = \frac{f(0)+f(1)}{2} = \frac{\frac{1}{e-3} + \frac{4e-9}{e-3}}{2} = \frac{4e-8}{2(e-3)} = \frac{2e-4}{e-3}$$

$$I_f = \frac{1}{1-0}\int\limits_0^1 f(t)dt = \left[\frac{e^t}{e-3} + t^3\right]\Bigg|_0^1 = \frac{e}{e-3} + 1 - \frac{1}{e-3} = \frac{2e-4}{e-3}.$$

Daí, $M_f = I_f$. Suponhamos que existe $\eta \in (0,1)$ satisfazendo (2.1.33), i.e.,

$$f'(\eta) = \frac{f(\eta)-f(0)}{1-0} \Leftrightarrow \frac{e^\eta}{e-3} + 6\eta = \frac{e^\eta}{e-3} + 3\eta^2 - \frac{1}{e-3}$$
$$\Leftrightarrow 3\eta^2 - 6\eta - \frac{1}{e-3} = 0.$$

Agora como $36 + \frac{12}{e-3} < 0$, segue que a equação $3\eta^2 - 6\eta - \frac{1}{e-3} = 0$ não tem solução real. □

Se substituirmos (2.1.33) por

$$f'(\eta) = 2\,\frac{f(\eta)-f(a)}{b-a}$$

temos o seguinte resultado.

Teorema 2.1.33 *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a,b]$ *e derivável em* (a,b)*. Se* $M_f = I_f$*, então existe* $\eta \in (a,b)$ *tal que*

$$f'(\eta) = 2\,\frac{f(\eta)-f(a)}{b-a}.$$

Demonstração. Considere a função $H : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$H(x) = \frac{1}{2}(b-a)f(x) - \int\limits_a^x f(t)dt + f(a)(x-b).$$

Facilmente vemos que H é uma função contínua em $[a,b]$, derivável em (a,b) e

$$H'(x) = \frac{1}{2}(b-a)f'(x) - f(x) + f(a).$$

Também

$$\begin{aligned} H(a) &= \frac{1}{2}(b-a)f(a) + f(a)(a-b) = -\frac{1}{2}(b-a)f(a) \\ H(b) &= \frac{1}{2}(b-a)f(b) - \int\limits_a^b f(t)dt = \frac{1}{2}(b-a)f(b) - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \\ &= \frac{1}{2}(b-a)\Big[f(b) - f(a) - f(b)\Big] = -\frac{1}{2}(b-a)f(a). \end{aligned}$$

Logo, $H(a) = H(b)$. Então pelo Teorema de Rolle, existe $\eta \in (a,b)$ tal que $H'(\eta) = 0$, i.e.,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(b-a)f'(\eta) - f(\eta) + f(a) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(b-a)f'(\eta) = f(\eta) - f(a) \\ &\Leftrightarrow f'(\eta) = 2\,\frac{f(\eta) - f(a)}{b-a}. \end{aligned}$$

□

Interpretação geométrica.

O Teorema 2.1.33 diz que existe $\eta \in (a,b)$ onde a reta tangente ao gráfico de f em $(\eta, f(\eta))$ é paralela a reta que passa pelos pontos $(a, 2f(a))$ e $(b, 2f(\eta))$.

É fácil dar exemplos mostrando que a condição $M_f = I_f$ é independente da condição $f'(a) = f'(b)$. Por exemplo considere a função $f : [\pi/2, 5\pi/2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$. É imediato ver que

$$f'(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0 = \cos(5\pi/2) = f'(5\pi/2).$$

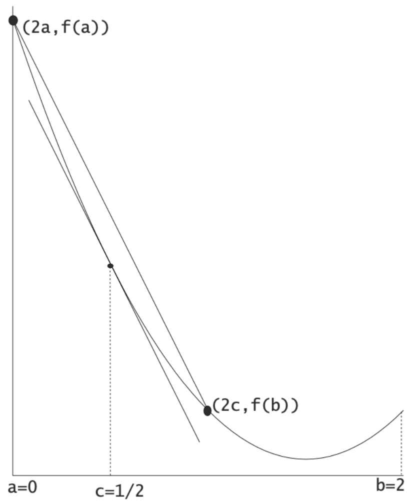

Figura 2.11: Interpretação geométrica do Teorema 2.1.33, onde $c = \eta$.

Mas $M_f \neq I_f$, pois

$$M_f = \frac{f(\pi/2) + f(5\pi/2)}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$I_f = \frac{1}{5\pi/2 - \pi/2} \int_{\pi/2}^{5\pi/2} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\Big[-\cos x \Big]\Big|_{\pi/2}^{5\pi/2} = 0.$$

Em 1999, B.Malesevic ([14]) obteve uma generalização do Teorema de Flett usando uma função infinitesimal.

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $[a, b]$ e derivável um número arbitrário de vezes numa vizinhança à direita do ponto $x = a$.

Considere a expansão de Taylor de ordem um, com resto, dado por

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \alpha(x)(x - a),$$

onde $\lim\limits_{x\to a^+} \alpha(x) = 0$. Isto nos induz definir a função

$$\alpha_1(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a), & x \in (a, b] \\ 0, & x = a. \end{cases} \tag{2.1.37}$$

Então

$$\begin{aligned}\alpha_1'(a) &= \lim_{x\to a^+}\frac{\alpha_1(x)-\alpha_1(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}\\ &= \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)} = \lim_{x\to a^+}\frac{1}{2}f''(x) = \frac{1}{2}f''(a),\end{aligned}$$

onde nas duas últimas igualdade temos usado a Regra de L'Hospital.

Teorema 2.1.34 (Teorema de Malesevic [14]) *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $[a,b]$ e α_1 como em (2.1.37). Se uma das seguintes condições*

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_1 :&\quad \alpha_1'(b)\cdot\alpha(b) < 0, \quad e\\ \mathrm{M}_1 :&\quad \alpha_1'(a)\cdot\alpha(b) < 0,\end{aligned}$$

é satisfeita, então existe $\eta \in (a,b)$ tal que

$$f'(\eta) = \frac{f(\eta)-f(a)}{\eta-a}. \tag{2.1.38}$$

Se ambas condições T_1 e M_1 são satisfeitas então existem dois pontos $\eta_i \in (a,b)$ tal que

$$f'(\eta_i) = \frac{f(\eta_i)-f(a)}{\eta_i-a}, \quad i = 1,2 \tag{2.1.39}$$

Demonstração. Se a condição T_1 é satisfeita então $\alpha_1'(b)\big[\alpha_1(b)-\alpha_1(a)\big] < 0$. Logo, do Lema (2.1.15) existe $\eta_1 \in (a,b)$ tal que $\alpha_1'(\eta_1) = 0$, i.e.,

$$\frac{1}{\eta_1-a}\left[f'(\eta_1)-\frac{f(\eta_1)-f(a)}{\eta_1-a}\right] = 0 \Leftrightarrow f'(\eta_1) = \frac{f(\eta_1)-f(a)}{\eta_1-a},$$

Agora se a condição M_1 é satisfeita então $\alpha_1'(a)\big[\alpha_1(b)-\alpha_1(a)\big] < 0$. Logo, do Lema 2.1.24 existe $\eta_2 \in (a,b)$ tal que $\alpha_1'(\eta_2) = 0$, i.e.,

$$\frac{1}{\eta_2-a}\left[f'(\eta_2)-\frac{f(\eta_2)-f(a)}{\eta_2-a}\right] = 0 \Leftrightarrow f'(\eta_2) = \frac{f(\eta_2)-f(a)}{\eta_2-a}.$$

Se as duas condições T_1 e M_1 são satisfeitas, então pela primeira parte, existem dois pontos $\eta_i \in (a,b)$ para os quais $\alpha_1'(\eta_i) = 0$, i.e., $f'(\eta_i) = \frac{f(\eta_i)-f(a)}{\eta_i - a}$, $i = 1, 2$.

□

Recentemente em 2014, C.Tan e S.Li [32] modificaram as ideias de J.Tong e obteve generalizações dos Teoremas de Flett, Myers e Tong.

Teorema 2.1.35 (Teorema de Tan [32]) *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), então existe $\eta \in (a,b)$ tal que*

$$f'(\eta) = \frac{f(\eta) - f(a)}{\eta - a} + 4\,\frac{(M_f - N_f)}{(b-a)^2}(\eta - a),$$

onde $M_f = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ e $N_f = f(\frac{a+b}{2})$.

Demonstração. Considere a função auxiliar $g : (a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - 4\,\frac{(M_f - N_f)}{(b-a)^2}(x - a).$$

A função g é contínua em $[\frac{a+b}{2}, b]$, derivável em $(\frac{a+b}{2}, b)$ e

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x-a) - [f(x) - f(a)]}{(x-a)^2} - 4\,\frac{(M_f - N_f)}{(b-a)^2}.$$

Alem disso

$$\begin{aligned}
g(\tfrac{a+b}{2}) &= \frac{f(\frac{a+b}{2}) - f(a)}{\frac{a+b}{2} - a} - 4\,\frac{(M_f - N_f)}{(b-a)^2}\big(\tfrac{a+b}{2} - a\big)\\
&= \frac{2\big[f(\frac{a+b}{2}) - f(a)\big]}{b-a} - \frac{2(M_f - N_f)}{(b-a)}\\
&= \frac{4f(\frac{a+b}{2}) - 3f(a) - f(b)}{b-a},\\
g(b) &= \frac{f(b) - f(a)}{b-a} - 4\,\frac{(M_f - N_f)}{(b-a)^2}(b-a)\\
&= \frac{f(b) - f(a)}{b-a} - \frac{2[f(a) + f(b)] - 4f(\frac{a+b}{2})}{b-a}\\
&= \frac{4f(\frac{a+b}{2}) - 3f(a) - f(b)}{b-a}.
\end{aligned}$$

Assim, $g(\frac{a+b}{2}) = g(b)$. Pelo Teorema de Rolle, existe $\eta \in (\frac{a+b}{2}, b) \subset (a, b)$ tal que $g'(\eta) = 0$, i.e.,

$$\begin{aligned}
g'(\eta) = 0 &\Leftrightarrow \frac{f'(\eta)(\eta - a) - [f(\eta) - f(a)]}{(\eta - a)^2} - 4\,\frac{(M_f - N_f)}{(b-a)^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{f'(\eta)(\eta - a) - [f(\eta) - f(a)]}{(\eta - a)^2} = 4\,\frac{(M_f - N_f)}{(b-a)^2} \\
&\Leftrightarrow f'(\eta) = \frac{f(\eta) - f(a)}{\eta - a} + 4\,\frac{(M_f - N_f)}{(b-a)^2}(\eta - a).
\end{aligned}$$

□

Similarmente tem-se o seguinte resultado.

Teorema 2.1.36 *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe $\eta \in (a, b)$ tal que*

$$f'(\eta) = \frac{f(b) - f(\eta)}{b - \eta} + 4\,\frac{(M_f - N_f)}{(b-a)^2}(b - \eta).$$

Demonstração. Deixamos como exercício para o leitor. □

Dos teoremas acima, obtemos os dois corolários a seguir, os quais mostram que o Teorema de Flett e o Teorema de Myers podem ser obtidos sob outras condições.

Corolário 2.1.37 *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e $f(\frac{a+b}{2}) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$, então existe $\eta \in (a, b)$ tal que*

$$f'(\eta) = \frac{f(\eta) - f(a)}{\eta - a}.$$

Corolário 2.1.38 *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e $f(\frac{a+b}{2}) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$, então existe $\eta \in (a, b)$ tal que*

$$f'(\eta) = \frac{f(b) - f(\eta)}{b - \eta}.$$

O.Hutník e J.Molnárová (veja [7]) forneceram um estudo detalhado de várias condições suficientes para garantir a validade do Teorema de Flett. Além disso, forneceram extensões do Teorema de Flett como também deram novas demonstrações alternativas de resultados conhecidos.

R.Davitt et al., estenderam o Teorema de Flett para funções holomórficas (veja [4] e [2]).

2.2 Teorema de Lagrange: Generalizações

Nesta seção vamos algumas generalizações do Teorema do Valor Médio de Lagrange. A primeira generalização que nos conhecemos é o Teorema de Valor Médio de Cauchy e esta será estudada no próximo capítulo.

Em 2004, J. Tong deu uma generalização do Teorema do Valor Médio o qual envolve dois parâmetros α e β. Quando $\alpha = \beta$ ele obtém o Teorema de Valor Médio de Lagrange.

Teorema 2.2.1 ([38, Teorema 1]) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Se α e β são números reais, então existe $\eta \in (a, b)$ tal que*

$$f'(\eta) = \frac{-(\alpha - \beta)f(\eta) + \alpha f(b) - \beta f(a)}{(\alpha - \beta)\eta + \beta b - \alpha a} \tag{2.2.1}$$

Demonstração. Consideremos a função auxiliar $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \alpha(x - a)\big[f(x) - f(b)\big] - \beta(x - b)\big[f(x) - f(a)\big].$$

Facilmente vemos que h é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e

$$\begin{aligned} h'(x) &= \alpha\big[f(x) - f(b)\big] + \alpha(x - a)f'(x) - \beta\big[f(x) - f(a)\big] - \beta(x - b)f'(x) \\ &= \big[\alpha(x - a) - \beta(x - b)\big]f'(x) + (\alpha - \beta)f(x) - \alpha f(b) + \beta f(a) \\ &= \big[(\alpha - \beta)x + \beta b - \alpha a\big]f'(x) + (\alpha - \beta)f(x) - \alpha f(b) + \beta f(a). \end{aligned}$$

Além disso, $h(a) = 0 = h(b)$. Então pelo Teorema de Rolle existe $\eta \in (a, b)$ tal

que $h'(\eta) = 0$, i.e.,

$$\begin{aligned}
&\big[(\alpha-\beta)\eta + \beta b - \alpha a\big] f'(\eta) + (\alpha-\beta) f(\eta) - \alpha f(b) + \beta f(a) = 0 \\
&\Leftrightarrow \big[(\alpha-\beta)\eta + \beta b - \alpha a\big] f'(\eta) = -(\alpha-\beta) f(\eta) + \alpha f(b) - \beta f(a) \\
&\Leftrightarrow f'(\eta) = \frac{-(\alpha-\beta) f(\eta) + \alpha f(b) - \beta f(a)}{(\alpha-\beta)\eta + \beta b - \alpha a}.
\end{aligned}$$

□

Observação 2.2.2 *No* Teorema 2.2.1 *aparecem η e $f(\eta)$. No caso especial, i.e., quando $\alpha = \beta$ estes desaparecem. Neste caso temos o Teorema do Valor Médio, $f'(\eta) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Alguns casos especiais.

Caso 1: $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ (veja [34]). Neste caso a equação (2.2.1) se transforma em

$$f'(\eta) = -\frac{f(\eta) - \frac{f(a)+f(b)}{2}}{\eta - \frac{a+b}{2}}.$$

Caso 2: $\alpha = 1$, $\beta = 0$ (veja [19, Teorema 2] ou Teorema 2.1.3). Neste caso a equação (2.2.1) se transforma em

$$f'(\eta) = \frac{f(b) - f(\eta)}{\eta - a}.$$

Caso 3: $\alpha = 0$, $\beta = 1$. (veja [19, Teorema 2′] ou Teorema 2.1.4). Neste caso a equação (2.2.1) se transforma em

$$f'(\eta) = \frac{f(\eta) - f(a)}{b - \eta}.$$

Este resultado tem uma boa interpretação geométrica; o triângulo formado pelo eixo x, a reta tangente que passa por $(\eta, f(\eta)$ e a reta secante que passa pelos pontos $(\eta, f(\eta))$ e $(b, f(a))$ é um triângulo isósceles.

Caso 4: $\alpha = b$, $\beta = a$. Neste caso a equação (2.2.1) se transforma em

$$\begin{aligned} f'(\eta) &= \frac{-(b-a)f(\eta) + bf(b) - af(a)}{(b-a)\eta + ab - ba} \\ &= -\frac{f(\eta)}{\eta} + \frac{bf(b) - af(a)}{(b-a)\eta} \end{aligned}$$

a qual corresponde ao Teorema do Valor Médio aplicado a função $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = xf(x)$.

Caso 5: $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$. Neste caso a equação (2.2.1) se transforma em

$$\begin{aligned} f'(\eta) &= \frac{-(f(a) - f(b))f(\eta) + f(a)f(b) - f(b)f(a)}{(f(a) - f(b))\eta + bf(b) - af(a)} \\ &= \frac{-(f(a) - f(b))f(\eta)}{(f(a) - f(b))\eta - b(f(a) - f(b)) - (b-a)f(a)} \\ &= \frac{f(\eta)}{b - \eta + \frac{b-a}{f(a)-f(b)} f(a)}. \end{aligned}$$

Se modificamos a função auxiliar h dada no Teorema 2.2.1 obtemos outros resultados interessantes. Por exemplo se consideramos a função auxiliar

$$h(x) = (x-a)(x-b)[f(x) - f(a)]\,[f(x) - f(b)] \tag{2.2.2}$$

obtemos o seguinte resultado.

Teorema 2.2.3 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Então existe $\eta \in (a, b)$ tal que*

$$f'(\eta) = -\frac{f(b) - f(\eta)}{b - \eta} \cdot \frac{f(\eta) - f(a)}{\eta - a} \cdot \frac{\eta - \frac{a+b}{2}}{f(\eta) - \frac{f(a)+f(b)}{2}}.$$

Demonstração. A função h dada em (2.2.2) é contínua em $[a, b]$, derivável em (a,b) e

$$\begin{aligned}
h'(x) &= (x-a)'(x-b)(f(x)-f(a))\,(f(x)-f(b)) \\
&\quad + (x-a)\big[(x-b)(f(x)-f(a))\,(f(x)-f(b))\big]' \\
&= (x-a)'(x-b)(f(x)-f(a))\,(f(x)-f(b)) \\
&\quad + (x-a)\Big[(x-b)'(f(x)-f(a))\,(f(x)-f(b)) \\
&\quad + (x-b)[(f(x)-f(a))\,(f(x)-f(b))]'\Big] \\
&= (x-b)(f(x)-f(a))\,(f(x)-f(b)) \\
&\quad + (x-a)\Big[(f(x)-f(a))\,(f(x)-f(b)) \\
&\quad + (x-b)[f'(x)(f(x)-f(b)) + f'(x)(f(x)-f(a))]\Big] \\
&= 2(f(x)-f(a))\,(f(x)-f(b))\big(x-\frac{a+b}{2}\big) \\
&\quad + 2(x-a)(x-b)f'(x)\big(f(x)-\frac{f(a)+f(b)}{2}\big).
\end{aligned}$$

Além disso, $h(a) = 0 = h(b)$. Então pelo Teorema de Rolle, existe $\eta \in (a,b)$ tal que $h'(\eta) = 0$, i.e.,

$$\begin{aligned}
&(f(\eta)-f(a))\,(f(\eta)-f(b))\big(\eta-\tfrac{a+b}{2}\big) \\
&\quad + (\eta-a)(\eta-b)f'(\eta)\big(f(\eta)-\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\big) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\eta-a)(\eta-b)f'(\eta)\big(f(\eta)-\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\big) = -(f(\eta)-f(a))\,(f(\eta)-f(b))\big(\eta-\tfrac{a+b}{2}\big) \\
&\Leftrightarrow f'(\eta) = -\frac{f(\eta)-f(a)}{\eta-a}\cdot\frac{f(\eta)-f(b)}{\eta-b}\cdot\frac{\eta-\frac{a+b}{2}}{f(\eta)-\frac{f(a)+f(b)}{2}}.
\end{aligned}$$

□

Dos resultados acima podemos concluir que o Teorema de Valor Médio é na verdade uma familia de teoremas de valor médio.

Em 2000, J. Tong em [35] mostrou uma generalização do Teorema do Valor Médio de Lagrange envolvendo duas funções.

Teorema 2.2.4 *Sejam* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funções contínuas em* $[a,b]$ *e* *deriváveis em* (a,b)*, então existe* $\eta \in (a,b)$ *tal que*

$$f'(\eta)(b-\eta) + g'(\eta)(\eta - a) = \big[g(b) - g(\eta)\big] + \big[f(\eta) - f(a)\big] \tag{2.2.3}$$

Demonstração. Consideremos a função auxiliar $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \big[f(x) - f(a)\big](x-b) - \big[g(x) - g(b)\big](x-a).$$

A função h é contínua em $[a,b]$, derivável em (a,b) e

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)(x-b) + f(x)f(a) - \big[g'(x)(x-a) + g(x) - g(b)\big] \\ &= f'(x)(x-b) - g'(x)(x-a) + f(x) - f(a) + g(b) - g(x). \end{aligned}$$

Então pelo Teorema de Rolle, existe $\eta \in (a,b)$ tal que $h'(\eta) = 0$, i.e.,

$$\begin{aligned} &f'(\eta)(\eta-b) - g'(\eta)(\eta-a) + f(\eta) - f(a) + g(b) - g(\eta) = 0 \\ &\Leftrightarrow f'(\eta)(b-\eta) + g'(\eta)(\eta-a) = \big[g(b) - g(\eta)\big] + \big[f(\eta) - f(a)\big]. \end{aligned}$$

□

Observação 2.2.5 *Se* $f = g$*, então a equação* (2.2.3) *se transforma em*

$$\begin{aligned} f'(\eta)(b-\eta) + f'(\eta)(\eta-a) &= \big[f(b) - f(\eta)\big] + \big[f(\eta) - f(a)\big] \\ f'(\eta)(b-a) &= f(b) - f(a) \\ f'(\eta) &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \end{aligned}$$

a qual é o Teorema do Valor Médio de Lagrange.

O seguinte resultado segue do Teorema 2.2.4.

Corolário 2.2.6 *Seja* $k \in \mathbb{R}$*. Se* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $[a,b]$ *e derivável em* (a,b)*, então existe* $\eta \in (a,b)$ *tal que*

$$f'(\eta) = \frac{kf(b) - (k-1)f(\eta) - f(a)}{b + (k-1)\eta - ka}. \tag{2.2.4}$$

Demonstração. Considerando $g(x) = kf(x)$ no Teorema 2.2.4 obtemos

$$\begin{aligned} f'(\eta)(b-\eta) + kf'(\eta)(\eta - a) &= k\big[f(b) - f(\eta)\big] + \big[f(\eta) - f(a)\big] \\ f'(\eta)\big[b + (k-1)\eta - ka\big] &= kf(b) - (k-1)f(\eta) - f(a) \\ f'(\eta) &= \frac{kf(b) - (k-1)f(\eta) - f(a)}{b + (k-1)\eta - ka}. \end{aligned}$$

□

Observe que o Teorema do Valor Médio de Lagrange é um caso particular do Corolário 2.2.6 tomando $k = 1$.

Também podemos observer que a equação (2.2.4) pode ser obtida da equação (2.2.1) tomando $\alpha = k \in \mathbb{R}$ e $\beta = 1$.

Teorema de Lagrange para funções com derivadas laterais

Agora vamos considerar uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua que tem derivadas laterais em cada ponto de (a, b).

O seguinte resultado é uma generalização do Teorema de Valor Médio de Lagrange para as funções que tem derivadas laterais num intervalo (a, b).

Teorema 2.2.7 (Teorema de Lagrange Generalizado, Karamata [8]) *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$, $f'_-(x)$ e $f'_+(x)$ existem para cada $x \in (a, b)$, então existem $\eta \in (a, b)$ e $p, q \geqslant 0$, $p + q = 1$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = pf'_+(\eta) + qf'_-(\eta). \tag{2.2.5}$$

Demonstração. Considere a função $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = (b - a)(f(x) - f(a)) - (x - a)(f(b) - f(a)).$$

Claramente a função h é contínua em $[a, b]$, tem derivadas laterais em todos os pontos de (a, b) e $h(a) = h(a)$. Portanto h satisfaz as hipótese do Teorema de

Rolle Generalizado (Teorema 1.3.1), logo existem $\eta \in (a,b)$ e $p, q \geqslant 0$, $p+q=1$ tal que

$$p\,h'_+(\eta) + q\,h'_-(\eta) = 0.$$

Como

$$\begin{aligned} h'_+(\eta) &= (b-a)f'_+(\eta) - (f(b)-f(a)),\\ h'_-(\eta) &= (b-a)f'_-(\eta) - (f(b)-f(a)), \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} p\,h'_+(\eta) + q\,h'_-(\eta) = 0 &\Leftrightarrow p\big[(b-a)f'_+(\eta) - (f(b)-f(a))\big]\\ &\qquad + q\big[(b-a)f'_-(\eta) - (f(b)-f(a))\big] = 0\\ &\Leftrightarrow (b-a)\big[pf'_+(\eta) + qf'_-(\eta)\big] = (p+q)\big[f(b)-f(a)\big]\\ &\Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = pf'_+(\eta) + qf'_-(\eta). \end{aligned}$$

$\square$

Observação 2.2.8 *Se f é derivável, então $f'_+(\eta) = f'(\eta) = f'_+(\eta)$. Logo, a igualdade* (2.2.5) *se transforma em*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = pf'_+(\eta) + qf'_-(\eta) = pf'(\eta) + qf'(\eta) = (p+q)f'(\eta) = f'(\eta).$$

Assim, o Teorema 2.2.7 *implica no* Teorema do Valor Médio.

Observação 2.2.9 *Do* Teorema 2.2.7 *obtemos*

$$\begin{aligned} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} &= pf'_+(\eta) + qf'_-(\eta)\\ &\leqslant \max\{pf'_+(\eta) + qf'_+(\eta), pf'_-(\eta) + qf'_-(\eta)\}\\ &\leqslant \max\{f'_+(\eta), f'_-(\eta)\}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} &= pf'_+(\eta)+qf'_-(\eta)\\ &\geqslant \min\{pf'_+(\eta)+qf'_+(\eta), pf'_-(\eta)+qf'_-(\eta)\}\\ &\geqslant \min\{f'_+(\eta), f'_-(\eta)\}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\min\{f'_-(\eta), f'_+(\eta)\} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \max\{f'_-(\eta), f'_+(\eta)\}.$$

Teorema 2.2.10 (Teorema de Lagrange Generalizado, Kubik [9]) *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função derivável à ambos lados em cada ponto de (a,b), então existe $\eta \in (a,b)$ tal que*

$$\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'_+(\eta)\right)\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'_-(\eta)\right) \leqslant 0. \qquad (2.2.6)$$

Demonstração. Do Teorema de Lagrange Generalizado (Teorema 2.2.7), existem $\eta \in (a,b)$ e $p, q \geqslant 0$, $p+q=1$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = pf'_+(\eta)+qf'_-(\eta).$$

Então

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'_+(\eta)\Big)\Big(\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'_-(\eta)\Big)\\ &= \Big[(p-1)f'_+(\eta)+qf'_-(\eta)\Big)\Big(pf'_+(\eta)+(q-1)f'_-(\eta)\Big]\\ &= (p-1)p\big(f'_+(\eta)\big)^2 + (p-1)(q-1)f'_+(\eta)f'_-(\eta)\\ &\quad + pqf'_+(\eta)f'_-(\eta) + q(q-1)\big(f'_-(\eta)\big)^2\\ &= -pq\big(f'_+(\eta)\big)^2 + 2pqf'_+(\eta)f'_-(\eta) + pq\big(f'_-(\eta)\big)^2\\ &= -pq\big[f'_+(\eta) - f'_-(\eta)\big]^2 \leqslant 0.\end{aligned}$$

Caso o produto acima seja diferente de zero, o lado direito dessa igualdade implica que o produto é negativo. □

Observe que se f é derivável então a desigualdade (2.2.6) se transforma em

$$\Big(\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(\eta)\Big)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(\eta) = 0$$
$$\Leftrightarrow f'(\eta) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

a qual é o Teorema do Valor Médio de Lagrange.

R. Witula et al. mostraram que os Teoremas 2.2.7 e 2.2.10 são equivalentes (veja [43, Proposição 2, p.149]).

2.3 Teorema de Lagrange: Aplicações

Os seguintes resultados geralmente são incluídos no livros textos. Estes são consequências imediatas do Teorema do Valor Médio.

Lema 2.3.1 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Suponhamos que $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, então f é constante em $[a,b]$.*

Demonstração. Seja $x \in (a,b]$. Aplicando o Teorema do Valor Médio à f no intervalo $[a,x]$ obtemos

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x-a)$$

para algum $c \in (a,x)$. Como $f'(c) = 0$, segue que $f(x) = f(a)$. □

Lema 2.3.2 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua em I e derivável no interior de I. Suponhamos que f' é limitada, então f é uniformemente contínua em I.*

Demonstração. Como f' é limitada segue que existe $M > 0$ tal que $|f'(z)| \leqslant M$ para todo z no interior de I.

Sejam $x, y \in I$ com $x < y$. Aplicando o Teorema do Valor Médio à f no intervalo $[x, y]$ obtemos

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$$

para algum $c \in (x, y)$. Logo,

$$|f(y) - f(x)| \leqslant |f'(c)|\,|y - x| \leqslant M|y - x|.$$

Esta desigualdade implica na continuidade uniforme de f. □

Os seguintes dois resultados são consequências do Teorema do Valor Médio e não são incluídos em muitos livros textos. Estes resultados aparecem em M. Furi e M. Martelli [6, Corolário 3 e Corolário 4].

Lema 2.3.3 *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) exceto possivelmente em um número finito de pontos, então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant |f'(c)|(b - a). \tag{2.3.1}$$

Demonstração. Suponhamos que existe $d \in (a, b)$ onde f não é diferenciável. Aplicando o Teorema do Valor Médio (Teorema 2.0.1) à função f em $[a, d]$ e $[d, b]$ obtemos respectivamente

$$\begin{aligned} f(d) - f(a) &= f'(c_1)(d - a),\; c_1 \in (a, d) \\ f(b) - f(d) &= f'(c_2)(b - d),\; c_2 \in (d, b). \end{aligned}$$

Somando estas duas desigualdades obtemos

$$f(b) - f(a) = f'(c_1)(d - a) + f'(c_2)(b - d)$$

e daí

$$\begin{aligned}|f(b)-f(a)| &\leqslant |f'(c_1)|\,|d-a| + |f'(c_2)|\,|b-d| \\ &\leqslant \max\{|f'(c_1)|, |f'(c_2)|\}(d-a) + \max\{|f'(c_1)|, |f'(c_2)|\}(b-d) \\ &\leqslant |f'(c)|(d-a+b-d) = |f'(c)|(b-a),\end{aligned}$$

onde $|f'(c)| = \max\{|f'(c_1)|, |f'(c_2)|\}$.

Esta demonstração obviamente pode ser estendida ao caso em que f não é diferenciável em mais de um ponto. □

Lema 2.3.4 *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b), exceto possivelmente em um número finito n de pontos, então existem $n+1$ pontos $c_1, c_2, \cdots c_{n+1} \in (a,b)$ e $n+1$ números positivos $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ tal que*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n+1} = 1$$

e

$$f(b) - f(a) = (b-a)\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j f'(c_j). \tag{2.3.2}$$

Demonstração. Suponhamos que existe um ponto $d \in (a,b)$ onde a função f não é derivável. Aplicando o Teorema do Valor Médio (Teorema 2.0.1) à função f em $[a,d]$ e $[d,b]$ obtemos respectivamente

$$\begin{aligned}f(d) - f(a) &= f'(c_1)(d-a),\ c_1 \in (a,d) \\ f(b) - f(d) &= f'(c_2)(b-d),\ c_2 \in (d,b).\end{aligned}$$

Somando estas duas desigualdades obtemos

$$f(b) - f(a) = f'(c_1)(d-a) + f'(c_2)(b-d).$$

Re-escrevendo esta igualdade obtemos

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \left[\frac{d-a}{b-a} f'(c_1) + \frac{b-d}{b-a} f'(c_2) \right] (b-a) \\ &= [\alpha_1 f'(c_1) + \alpha_2 f'(c_2)] (b-a), \end{aligned}$$

onde

$$\alpha_1 = \frac{d-a}{b-a} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{b-d}{b-a}.$$

Claramente vemos que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\alpha_1 > 0$ e $\alpha_2 > 0$.

Esta demonstração obviamente pode ser estendida ao caso em que f não é diferenciável em mais de um ponto. □

Sejam $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $p \in I$. Dizemos que p é um ponto fixo de f se $f(p) = p$.

Lema 2.3.5 (Lema da Contração) *Se $f : [a, b] \to [a, b]$ é uma função contínua e $f'(x) < 1$ para todo $x \in [a, b]$, então f tem um único ponto fixo.*

Demonstração. *Existência.* Se $f(a) = a$, então a é um ponto fixo, ou se $f(b) = b$, então b é um ponto fixo. Vamos supor que $f(a) \neq a$ e $f(b) \neq b$. Definamos $g : [a, b] \to [a, b]$ por $g(x) = f(x) - x$. A função g é contínua em $[a, b]$ com $g(a) = f(a) - a > 0$ e $g(b) = f(b) - b < 0$. Isto é, $g(a)\, g(b) < 0$. Então do Teorema de Bolzano (Teorema (1.1.4)) segue que existe $p \in (a, b)$ tal que $g(p) = 0$, i.e., $g(p) = f(p) - p = 0$, ou equivalentemente $f(p) = p$, ou seja p é um ponto fixo de f.
Unicidade. Suponhamos que existem dois pontos fixos de f, digamos p e q. Podemos supor que $p < q$. Aplicando o Teorema do Valor Médio (Teorema 2.0.1) à f no intervalo $[p, q]$ existe $c \in (p, q)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(p) - f(q)}{p - q} = \frac{p - q}{p - q} = 1.$$

Mas isto contradiz a hipótese $f'(x) < 1$ para todo $x \in [a, b]$. Portanto, $p = q$. □

Teorema 2.3.6 (Desigualdade de Schur) *Se $x, y, z > 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então*

$$(x-y)(x-z)x^{\lambda} + (y-x)(y-z)y^{\lambda} + (z-x)(z-y)z^{\lambda} \geqslant 0, \tag{2.3.3}$$

com igualdade se, e somente se $x = y = z$.

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que $0 < x < y < z$. Vamos considerar dois casos $\lambda \geqslant 0$ e $\lambda < 0$. Vamos demonstrar quando $\lambda \geqslant 0$ já que o caso em que $\lambda < 0$ a demonstração é similar.

Observe que o lado esquerdo na desigualdade (2.3.3) pode ser escrito como

$$(x-y)(x-z)x^{\lambda} + (z-y)\big[(z-x)z^{\lambda} - (y-x)y^{\lambda}\big].$$

Isto nos leva a considerar a função $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = (t-x)t^{\lambda}$. A função é contínua em $[y, z]$, derivável em (a, b) e

$$f'(x) = t^{\lambda} + \lambda(t-x)t^{\lambda-1} = t^{\lambda-1}\big[t + \lambda(t-x)\big].$$

Então pelo Teorema do Valor Médio existe $\eta \in (y, z)$ tal que

$$f(z) - f(y) = f'(\eta)(z-y) \Leftrightarrow (z-x)z^{\lambda} - (y-x)y^{\lambda} = \eta^{\lambda-1}\big[\eta + \lambda(\eta - x)\big] \geqslant 0.$$

Portanto,

$$(x-y)(x-z)x^{\lambda} + (z-y)\big[(z-x)z^{\lambda} - (y-x)y^{\lambda}\big] \geqslant 0,$$

o que dá a desigualdade de Schur. □

As seguintes resultados foram estudados por C.Lupu e T.Lupu em [13].

Lema 2.3.7 ([13, Lema 2.2]) *Se $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com $f(1) = 0$, então mostre que existe $\eta \in (0, 1)$ tal que*

$$f(\eta) = \int_0^{\eta} f(x)dx. \tag{2.3.4}$$

Demonstração. Consideremos a função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = xe^{-x} \int\limits_0^x f(t)dt.$$

A função h é derivável em $[0,1]$ e

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(e^{-x} - xe^{-x}\right) \int\limits_0^x f(t)dt + xf(x)e^{-x} \\ &= e^{-x} \left[\int\limits_0^x f(t)dt - x \left(\int\limits_0^x f(x)dx - f(x) \right) \right]. \end{aligned}$$

Além disso, $h'(0) = 0$

$$h'(1) = e^{-1} \left[\int\limits_0^1 f(t)dt - \left(\int\limits_0^1 f(x)dx - f(1) \right) \right] = 0.$$

Então pelo Teorema de Flett, existe $\eta \in (0,1)$ tal que

$$h'(\eta) = \frac{h(\eta) - h(0)}{\eta - 0}$$

a qual é equivalente a

$$\begin{aligned} \eta e^{-\eta} \left[\int\limits_0^\eta f(t)dt - \eta \left(\int\limits_0^\eta f(x)dx - f(\eta) \right) \right] &= \eta e^{-\eta} \int\limits_0^\eta f(t)dt \\ \eta^2 e^{-\eta} \left(\int\limits_0^\eta f(x)dx - f(\eta) \right) &= 0 \\ \int\limits_0^\eta f(x)dx - f(\eta) &= 0. \end{aligned}$$

Desta última igualdade obtemos (2.3.4). □

Lema 2.3.8 ([13, Lema 2.4]) *Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com $\int\limits_0^1 f(x)dx = 0$, então mostre que existe $\eta \in (0,1)$ tal que*

$$\int\limits_0^\eta xf(x)dx = 0.$$

Demonstração. Consideremos a função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = x\int\limits_0^x f(t)dt - \int\limits_0^x tf(t)dt.$$

A função h é derivável em $[a,b]$ e

$$h'(x) = \int\limits_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \int\limits_0^x f(t)dt.$$

Além disso, $h'(0) = 0 = h'(1)$. Então aplicando o Teorema de Flett (Teorema 2.1.1) existe $\eta \in (a,b)$ tal que

$$h'(\eta) = \frac{f(\eta) - f(0)}{\eta - 0}$$

ou equivalentemente

$$\eta h'(\eta) = h(\eta) - h(0) \Leftrightarrow \eta\int\limits_0^\eta f(x)dx = \eta\int\limits_0^\eta f(x)dx - \int\limits_0^\eta xf(x)dx$$
$$\Leftrightarrow \int\limits_0^\eta xf(x)dx = 0.$$

□

Observação 2.3.9 *Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função derivável com as mesmas* *hipóteses do* Lema 2.3.8, *existe* $\eta \in (0,1)$ *tal que*

$$\eta f(\eta) = \int_0^\eta xf(x)dx.$$

De fato, primeiramente do Lema 2.3.8 *existe* $\eta_0 \in (0,1)$ *tal que* $\int_0^{\eta_0} xf(x)dx = 0.$

Agora consideremos a função auxiliar $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$h(x) = e^{-x}\int_0^x tf(t)dt.$$

Claramente a função h *é contínua em* $[0,1]$, *derivável* $(1,0)$ *e*

$$h'(x) = -e^{-x}\int_0^x tf(t)dx + e^{-x}xf(x) = e^{-x}\left[xf(x) - \int_0^x tf(t)dt\right].$$

Por outro lado $h(0) = 0 = h(\eta_0)$. *Logo, aplicando o* Teorema de Rolle *à função* h *no intervalo* $[0,\eta_0]$, *existe* $\eta \in (0,\eta_0) \subset (0,1)$ *tal que* $h'(\eta) = 0$, *i.e.,*

$$\begin{aligned} h'(\eta) = 0 &\Leftrightarrow e^{-\eta}\left[\eta f(\eta) - \int_0^\eta xf(x)dx\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \eta f(\eta) = \int_0^\eta xf(x)dx. \end{aligned}$$

Observação 2.3.10 *Seja* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua com as mesmas hipóteses do* Lema 2.3.8, *existe* $\eta \in (0,1)$ *tal que*

$$\eta f(\eta) = f'(\eta)\int_0^\eta xf(x)dx.$$

De fato, primeiramente do Lema 2.3.8 *existe* $\eta_0 \in (0,1)$ *tal que* $\int_0^{\eta_0} xf(x)dx = 0.$

Agora consideremos a função auxiliar $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$h(x) = e^{-f(x)} \int_0^x t f(t) dt.$$

Claramente a função h *é contínua em* $[0,1]$, *derivável* $(1,0)$ *e*

$$h'(x) = -e^{-x} f'(x) \int_0^x t f(t) dx + e^{-f(x)} x f(x) = e^{-f(x)} \left[x f(x) - f'(x) \int_0^x t f(t) dt \right].$$

Por outro lado, $h(0) = 0$ *e* $h(\eta_0) = e^{-f(\eta_0)} \int_0^{\eta_0} x f(x) dt x = 0$. *Logo, aplicando o* Teorema de Rolle *à função* h *no intervalo* $[0, \eta_0]$, *existe* $\eta \in (0, \eta_0) \subset (0,1)$ *tal que* $h'(\eta) = 0$, *i.e.,*

$$\begin{aligned} h'(\eta) = 0 &\Leftrightarrow e^{-f(\eta)} \left[\eta f(\eta) - f'(\eta) \int_0^\eta x f(x) dx \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \eta f(\eta) = f'(\eta) \int_0^\eta x f(x) dx. \end{aligned}$$

Lema 2.3.11 ([13, Lema 2.8]) *Seja* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua satisfazendo*

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx.$$

Então existe $\eta \in (0,1)$ *tal que*

$$\int_0^\eta x f(x) dx = 0.$$

Demonstração. Considere a função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt.$$

A função h é contínua em $[0,1]$, derivável em $(0,1)$ e

$$h'(x) = \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Além disso, $h(0) = 0 = h(1)$, segue do Teorema de Rolle que existe $\eta_0 \in (0,1)$ tal que $h'(\eta_0) = 0$. Por outro lado como $h'(0) = 0$, segue do Teorema de Flett, que existe $\eta \in (0,\eta_0) \subset (0,1)$ tal que

$$h'(\eta) = \frac{h(\eta) - h(0)}{\eta - 0}$$

a qual é equivalente à

$$\eta\int_0^\eta f(x)dx = \eta\int_0^\eta f(x)dx - \int_0^\eta xf(x)dx \Leftrightarrow \int_0^\eta xf(x)dx = 0.$$

□

Teorema 2.3.12 ([13, Teorema 2.9]) *Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo*

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx.$$

Então existe $\eta \in (0,1)$ tal que

$$\eta f(\eta) = \int_0^\eta xf(x)dx.$$

Demonstração. Observe que do Lema 2.3.11 existe $\eta_0 \in (0,1)$ tal que

$\int_0^{\eta_0} xf(x)dx = 0$. Agora, considere a função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = e^{-t}\int_0^t xf(x)dx$.

A função h é contínua em $[0,1]$, derivável em $(0,1)$ e

$$h'(t) = -e^{-t}\int_0^t xf(x)dx + e^{-t}tf(t) = e^{-t}\left[tf(t) - \int_0^t xf(x)dx\right].$$

Além disso, $h(0) = 0 = h(\eta_0)$. Então pelo Teorema de Rolle, existe $\eta \in (0,\eta_0) \subset (0,1)$ tal que $h'(\eta) = 0$, i.e.,

$$h'(\eta) = 0 \Leftrightarrow e^{-\eta}\left[\eta f(\eta) - \int_0^\eta xf(x)dx\right] = 0 \Leftrightarrow \eta f(\eta) = \int_0^\eta xf(x)dx.$$

□

Lema 2.3.13 ([40]) *Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com $\int_0^1 f(x)dx = 0$, então mostre que existe $\eta \in (0,1)$ tal que*

$$\eta^2 f(\eta) = \int_0^\eta (x + x^2)f(x)dx.$$

Demonstração. Do Lema 2.3.8 existe $\eta_1 \in (0,1)$ tal que $\int_0^{\eta_1} xf(x)dx = 0$. Da Observação 2.3.9, existe $\eta_2 \in (0,1)$ tal que $\eta_2 f(\eta_2) = \int_0^{\eta_2} xf(x)dx$.

Agora consideremos a função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \int_0^x (t^2 + (1-x)t)f(t)dt.$$

A função h é derivável em $[0,1]$ e

$$\begin{aligned} h'(x) &= \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}\big[(t^2+(1-x)t)f(t)\big]dt + (x^2+(1-x)x)f(x) \\ &= xf(x) - \int_0^x tf(t)dt. \end{aligned}$$

Além disso, $h'(0)=0$ e $h'(\eta_2)=\eta_2 f(\eta_2)-\int_0^{\eta_2} xf(x)dx = 0$. Então pelo Teorema de Flett existe $\eta \in (0,\eta_2) \subset (0,1)$ tal que

$$h'(\eta) = \frac{h(\eta)-h(0)}{\eta - 0},$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned} \eta h'(\eta) = h(\eta)-h(0) &\Leftrightarrow \eta\left[\eta f(\eta) - \int_0^\eta xf(x)dx\right] = \int_0^\eta (x^2+(1-\eta)x)f(x)dx \\ &\Leftrightarrow \eta^2 f(\eta) - \eta\int_0^\eta xf(x)dx = \int_0^\eta (x^2+x)f(x)dx - \eta\int_0^\eta xf(x)dx \\ &\Leftrightarrow \eta^2 f(\eta) = \int_0^\eta (x^2+x)f(x)dx. \end{aligned}$$

□

No cálculo da derivada de h na observação anterior usamos a Regra de Leibniz a qual nos permite derivar uma função definida por uma integral (veja [21, Teorema 11.3, p.288]).

As seguintes aplicações foram estudadas por C.Lupu e T.Lupu em [13], onde eles principalmente estudaram algumas propriedades de alguns operadores integrais, os quais vamos definir a continuação. Para uma função $\varphi \in C([0,1])$

definamos o operador $\mathcal{T}$ por

$$\begin{array}{rlcl} \mathcal{T}: & C([0,1]) & \to C([0,1]) & \\ & \varphi & \to \quad \mathcal{T}\varphi & : [0,1] \to \mathbb{R} \\ & & & t \to (\mathcal{T}\varphi)(t) = \varphi(t) - \int_0^t \varphi(x)dx. \end{array}$$

Analogamente para uma função $\psi \in C([0,1])$ definamos o operador $\mathcal{S}$ por

$$\begin{array}{rlcl} \mathcal{S}: & C([0,1]) & \to C([0,1]) & \\ & \psi & \to \quad \mathcal{S}\psi & : [0,1] \to \mathbb{R} \\ & & & t \to (\mathcal{S}\psi)(t) = t\psi(t) - \int_0^t x\psi(x)dx. \end{array}$$

Teorema 2.3.14 ([13, Teorema 2.11]) *Se $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, então existem $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \in (0,1)$ tal que*

(i) $\int_0^1 f(x)dx\,(\mathcal{T}g)(\eta_1) = \int_0^1 g(x)dx\,(\mathcal{T}f)(\eta_1)$.

(ii) $(\mathcal{T}f)(\eta_2) = (\mathcal{S}f)(\eta_2)$.

(iii) $\int_0^1 f(x)dx\,(\mathcal{S}g)(\eta_3) = \int_0^1 g(x)dx\,(\mathcal{S}f)(\eta_3)$.

Demonstração. (**i**) Definamos a função $h_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$h_1(t) = f(t)\int_0^1 g(x)dx - g(t)\int_0^1 f(x)dx.$$

A função h_1 é contínua em $[0,1]$ e

$$\begin{aligned} \int_0^1 h_1(x)dx &= \int_0^1 \left[f(x)\int_0^1 g(x)dx - g(x)\int_0^1 f(x)dx \right] dx \\ &= \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx - \int_0^1 g(x)dx \int_0^1 f(x)dx = 0. \end{aligned}$$

Do Lema 1.2.15, existe $\eta_1 \in (0,1)$ tal que $h_1(\eta) = \int\limits_0^{\eta_1} h_1(x)dx$, i.e.,

$$\begin{aligned} f(\eta_1)\int\limits_0^1 g(x)dx - g(\eta_1)\int\limits_0^1 f(x)dx &= \int\limits_0^{\eta_1}\left[f(x)\int\limits_0^1 g(x)dx - g(x)\int\limits_0^1 f(x)dx\right]dx \\ &= \int\limits_0^{\eta_1} f(x)dx\int\limits_0^1 g(x)dx - \int\limits_0^{\eta_1} g(x)dx\int\limits_0^1 f(x)dx, \end{aligned}$$

o qual é equivalente a

$$\int\limits_0^1 f(x)\left[g(\eta_1) - \int\limits_0^{\eta_1} g(x)dx\right] = \int\limits_0^1 g(x)dx\left[f(\eta_1) - \int\limits_0^{\eta_1} f(x)dx\right]$$

e equivalente a

$$\int\limits_0^1 f(x)(\mathcal{T}g)(\eta_1) = \int\limits_0^1 g(x)dx(\mathcal{T}f)(\eta_1).$$

(**ii**) Definamos a função $h_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $h_2(t) = (t-1)f(t)$. A função h_2 é contínua e $h_2(1) = 0$, segue do Lema 2.3.7 que existe $\eta_2 \in (0,1)$ tal que $h_2(\eta_2) = \int\limits_0^{\eta_2} h(x)dx$, i.e.,

$$\begin{aligned} (\eta_2 - 1)f(\eta_2) = \int\limits_0^{\eta_2}(x-1)f(x)dx &\Leftrightarrow \eta_2 f(\eta_2) - \int\limits_0^{\eta_2} xf(x)dx = f(\eta_2) - \int\limits_0^{\eta_2} f(x)dx \\ &\Leftrightarrow (\mathcal{T}f)(\eta_2) = (\mathcal{S}f)(\eta_2). \end{aligned}$$

(**iii**) Definamos a função $h_3 : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h_3(t) = f(t)\int\limits_0^1 g(x)dx - g(t)\int\limits_0^1 f(x)dx.$$

Facilmente vemos que a função h_3 é contínua e $\int\limits_0^1 h_3(x)dx = 0$. Pela Observação 2.3.9, existe $\eta_3 \in (0,1)$ tal que $\eta_3 h(\eta_3) = \int\limits_0^{\eta_3} xh_3(x)dx$, i.e.,

$$\eta_3 \left(f(\eta_3) \int\limits_0^1 g(x)dx - g(\eta_3) \int\limits_0^1 f(x)dx \right) = \int\limits_0^{\eta_3} x \left(f(x) \int\limits_0^1 g(x)dx - g(x) \int\limits_0^1 f(x)dx \right) dx$$

$$\eta_3 f(\eta_3) \int\limits_0^1 g(x)dx - \eta_3 g(\eta_3) \int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^{\eta_3} xf(x)dx \int\limits_0^1 g(x)dx - \int\limits_0^{\eta_3} xg(x)dx \int\limits_0^1 f(x)dx$$

$$\int\limits_0^1 f(x)dx \left(\eta_3 g(\eta_3) - \int\limits_0^{\eta_3} xg(x)dx \right) = \int\limits_0^1 g(x)dx \left(\eta_3 f(\eta_3) - \int\limits_0^{\eta_3} xf(x)dx \right)$$

o qual é equivalente à

$$\int\limits_0^1 f(x)dx\,(\mathcal{S}g)(\eta_3) = \int\limits_0^1 g(x)dx\,(\mathcal{S}f)(\eta_3).$$

□

Teorema 2.3.15 ([13, Teorema 2.12]) *Se $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, então existem $\eta_1, \eta_2 \in (0,1)$ tal que*

(i) $\int\limits_0^1 (1-x)f(x)dx\,(\mathcal{T}g)(\eta_1) = \int\limits_0^1 (1-x)dx\,(\mathcal{T}f)(\eta_1)$.

(ii) $\int\limits_0^1 (1-x)f(x)dx\,(\mathcal{S}g)(\eta_2) = \int\limits_0^1 (1-x)dx\,(\mathcal{S}f)(\eta_2)$.

Demonstração. (**i**) Definamos a função $h_4 : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$h_4(t) = f(t) \int\limits_0^1 (1-x)g(x)dx - g(t) \int\limits_0^1 (1-x)f(x)dx.$$

A função h_4 é contínua e

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 h_4(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 (1-x)g(x)dx - \int_0^1 g(x)dx \int_0^1 (1-x)f(x)dx \\
&= \int_0^1 xf(x)dx \int_0^1 g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 xg(x)dx \qquad (2.3.5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 xh_4(x)dx &= \int_0^1 xf(x)dx \int_0^1 (1-x)g(x)dx - \int_0^1 xg(x)dx \int_0^1 (1-x)f(x)dx \\
&= \int_0^1 xf(x)dx \int_0^1 g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 xg(x)dx \qquad (2.3.6)
\end{aligned}
$$

De (2.3.5) e (2.3.6) concluímos que $\int_0^1 h_4(x)dx = \int_0^1 xh_4(x)dx$. Então pelo Teorema 1.2.17, existe $\eta_1 \in (0,1)$ tal que $h_4(\eta_1) = \int_0^{\eta_1} h_4(x)dx$, i.e.,

$$
\begin{aligned}
& f(\eta_1)\int_0^1 (1-x)g(x)dx - g(\eta_1)\int_0^1 (1-x)f(x)dx \\
&= \int_0^{\eta_1} \left[f(x)\int_0^1 (1-x)g(x)dx - g(x)\int_0^1 (1-x)f(x)dx \right]
\end{aligned}
$$

a qual é equivalente à

$$
\int_0^1 (1-x)f(x)dx \left[g(\eta_1) - \int_0^{\eta_1} g(x)dx \right] = \int_0^1 (1-x)g(x)dx \left[f(\eta_1) - \int_0^{\eta_1} f(x)dx \right]
$$

$$
\int_0^1 (1-x)f(x)dx\,(\mathcal{T}g)(\eta_1) = \int_0^1 (1-x)g(x)dx\,(\mathcal{T}f)(\eta_1).
$$

(**ii**) Aplicando o Teorema 2.3.12 à função h_4 do item (**i**) obtemos que existe

$\eta_2 \in (0,1)$ tal que $\eta_2\, h_4(\eta_2) = \int\limits_0^{\eta_2} x h_4(x)dx$, i.e.,

$$\begin{aligned}
&\eta_2 f(\eta_2)\int\limits_0^1 (1-x)g(x)dx - \eta_2 g(\eta_2)\int\limits_0^1 (1-x)f(x)dx\\
&\quad= \int\limits_0^{\eta_2} xf(x)dx \int\limits_0^1 (1-x)g(x)dx - \int\limits_0^{\eta_2} xg(x)dx \int\limits_0^1 (1-x)f(x)dx
\end{aligned}$$

o qual é equivalente à

$$\int\limits_0^1 (1-x)f(x)dx\left[\eta_2 g(\eta_2) - \int\limits_0^{\eta_2} xg(x)dx\right] = \int\limits_0^1 (1-x)g(x)dx\left[\eta_2 f(\eta_2) - \int\limits_0^{\eta_2} xf(x)dx\right]$$

$$\int\limits_0^1 (1-x)f(x)dx\,(\mathcal{S}g)(\eta_2) = \int\limits_0^1 (1-x)g(x)dx\,(\mathcal{S}f)(\eta_2).$$

□

Generalização do Teorema de Sahoo-Riedel e do Teorema de Çakmak-Tiryaki

Os seguintes resultados foram estudados por A.Mohapatra em [18]. Estes são generalizações do Teorema de Sahoo-Riedel (Teorema 2.1.10) e do Teorema de Çakmak-Tiryaki (Teorema 2.1.20).

Teorema 2.3.16 ([18, Teorema 2.5]) *Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções deriváveis em $[a,b]$, então existe $\eta \in (a,b)$ tal que*

$$\begin{aligned}
&\big[g(b)-g(a)\big]g'(b)\big[f(\eta)-f(a)-f'(\eta)(\eta-a)\big]\\
&\quad= \big[f'(b)-f'(a)\big]\big[g(\eta)-g(a)\big]\Big[\tfrac{1}{2}(g(\eta)-g(a))-g'(\eta)(\eta-a)\Big] \qquad (2.3.7)
\end{aligned}$$

Demonstração. Considere a função $\mathcal{M} : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{M}(x) = \big[g(b) - g(a)\big]g'(b)f(x) - \frac{1}{2}\big[f'(b) - f'(a)\big]\big[g(x) - g(a)\big]^2.$$

A função $\mathcal{M}$ é derivável em $[a,b]$ e

$$\mathcal{M}'(x) = \big[g(b) - g(a)\big]g'(b)f'(x) - \big[f'(b) - f'(a)\big]\big[g(x) - g(a)\big]g'(x).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}'(a) &= \big[g(b) - g(a)\big]g'(b)f'(a) \\
\mathcal{M}'(b) &= \big[g(b) - g(a)\big]g'(b)f'(b) - \big[f'(b) - f'(a)\big]\big[g(b) - g(a)\big]g'(b) \\
&= \big[g(b) - g(a)\big]g'(b)\big[f'(b) - f'(b) + f'(a)\big] \\
&= \big[g(b) - g(a)\big]g'(b)f'(a).
\end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{M}'(a) = \mathcal{M}'(b)$. Logo, pelo Teorema de Flett (Teorema 2.1.1), existe $\eta \in (a,b)$ tal que $\mathcal{M}(\eta) - \mathcal{M}(a) = \mathcal{M}'(\eta)(\eta - a)$, i.e.,

$$\begin{aligned}
&\big[g(b) - g(a)\big]g'(b)f(\eta) - \tfrac{1}{2}\big[f'(b) - f'(a)\big]\big[g(\eta) - g(a)\big]^2 - \big[g(b) - g(a)\big]g'(b)f(a) \\
&\quad = \Big[\big[g(b) - g(a)\big]g'(b)f'(\eta) - \big[f'(b) - f'(a)\big]\big[g(\eta) - g(a)\big]g'(\eta)\Big](\eta - a) \\
&\Leftrightarrow \big[g(b) - g(a)\big]g'(b)\big[f(\eta) - f(a) - f'(\eta)(\eta - a)\big] \\
&\quad = \big[f'(b) - f'(a)\big]\big[g(\eta) - g(a)\big]\Big[\tfrac{1}{2}\big[g(\eta) - g(a)\big] - g'(\eta)(\eta - a)\Big]
\end{aligned}$$

□

Observação 2.3.17 *Se* $g(x) = x$ *em* (2.3.7) *obtemos o* Teorema de Sahoo-Riedel

$$\begin{aligned}
(b-a)\big[f(\eta) - f(a) - f'(\eta)(\eta - a)\big] &= \big[f'(b) - f'(a)\big]\big[\eta - a\big]\Big[\tfrac{1}{2}(\eta - a) - (\eta - a)\Big] \\
(b-a)\big[f(\eta) - f(a) - f'(\eta)(\eta - a)\big] &= -\tfrac{1}{2}\big[f'(b) - f'(a)\big](\eta - a)^2 \\
f(\eta) - f(a) &= f'(\eta)(\eta - a) - \frac{1}{2}\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a}(\eta - a)^2.
\end{aligned}$$

Teorema 2.3.18 ([18, Teorema 2.6]) *Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções deriváveis em $[a,b]$, então existe $\eta \in (a,b)$ tal que*

$$\begin{aligned}&\big[g(b)-g(a)\big]g'(a)\big[f(b)-f(\eta)-f'(\eta)(b-\eta)\big]\\&\quad=\big[f'(b)-f'(a)\big]\big[g(\eta)-g(b)\big]\Big[\tfrac{1}{2}(g(b)-g(\eta))-g'(\eta)(b-\eta)\Big]\end{aligned}\tag{2.3.8}$$

Demonstração. Considere a função $\mathcal{M}_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{M}_1(x)=\big[g(b)-g(a)\big]g'(a)f(x)-\frac{1}{2}\big[f'(b)-f'(a)\big]\big[g(x)-g(b)\big]^2.$$

A função $\mathcal{M}_1$ é derivável em $[a,b]$ e

$$\mathcal{M}_1'(x)=\big[g(b)-g(a)\big]g'(a)f'(x)-\big[f'(b)-f'(a)\big]\big[g(x)-g(b)\big]g'(x).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1'(a)&=\big[g(b)-g(a)\big]g'(a)f'(a)-\big[f'(b)-f'(a)\big]\big[g(a)-g(b)\big]g'(a)\\&=\big[g(b)-g(a)\big]\Big[g'(a)f'(a)+\big[f'(b)-f'(a)\big]g'(a)\Big]\\&=\big[g(b)-g(a)\big]f'(b)g'(a).\\\mathcal{M}_1'(b)&=\big[g(b)-g(a)\big]f'(b)g'(a).\end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{M}_1'(a)=\mathcal{M}_1'(b)$. Logo, pelo Teorema de Myers (Teorema 2.1.2), existe $\eta \in (a,b)$ tal que $\mathcal{M}_1(b)-\mathcal{M}_1(\eta)=\mathcal{M}_1'(\eta)(b-\eta)$, i.e.,

$$\begin{aligned}&\big[g(b)-g(a)\big]g'(a)f(b)-\Big[\big[g(b)-g(a)\big]g'(a)f(\eta)-\tfrac{1}{2}\big[f'(b)-f'(a)\big]\big[g(\eta)-g(b)\big]^2\Big]\\&=\Big[\big[g(b)-g(a)\big]g'(a)f'(\eta)-\big[f'(b)-f'(a)\big]\big[g(\eta)-g(b)\big]g'(\eta)\Big](b-\eta)\\&\Leftrightarrow\big[g(b)-g(a)\big]g'(a)\big[f(b)-f(\eta)\big]+\tfrac{1}{2}\big[f'(b)-f'(a)\big]\big[g(\eta)-g(b)\big]^2\\&=\big[g(b)-g(a)\big]g'(a)f'(\eta)(b-\eta)-\big[f'(b)-f'(a)\big]\big[g(\eta)-g(b)\big]g'(\eta)(b-\eta)\\&\Leftrightarrow\big[g(b)-g(a)\big]g'(a)\Big[f(b)-f(\eta)-f'(\eta)(b-\eta)\Big]\\&=\big[f'(b)-f'(a)\big]\big[g(\eta)-g(b)\big]\Big[\tfrac{1}{2}\big(g(b)-g(\eta)\big)-g'(\eta)(b-\eta)\Big].\end{aligned}$$

□

Observação 2.3.19 *Se* $g(x) = x$ *em* (2.3.8) *obtemos o* Teorema de Çakmak-Tiryaki

$$\begin{aligned}(b-a)\big[f(b)-f(\eta)-f'(\eta)(b-\eta)\big] &= \big[f'(b)-f'(a)\big]\,(\eta-b)\big[\tfrac{1}{2}(b-\eta)-(b-\eta)\big]\\(b-a)\big[f(b)-f(\eta)-f'(\eta)(b-\eta)\big] &= \tfrac{1}{2}\big[f'(b)-f'(a)\big](b-\eta)^2\\f(b)-f(\eta) &= f'(\eta)(b-\eta)+\tfrac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a)}(b-\eta)^2.\end{aligned}$$

Os seguintes resultados são variações dos Teoremas 2.3.16 e 2.3.18 (Teorema 2.5 e Teorema 2.6 em [18]).

Teorema 2.3.20 ([11]) *Se* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *são funções deriváveis em* $[a,b]$, *então existe* $\eta \in (a,b)$ *tal que*

$$\begin{aligned}&\big[g(b)-g(a)\big]^{n-1}g'(b)\big[f(\eta)-f(a)-f'(\eta)(\eta-a)\big]\\&=\big[f'(b)-f'(a)\big]\big[g(\eta)-g(a)\big]^{n-1}\Big[\tfrac{1}{n}(g(\eta)-g(a))-g'(\eta)(\eta-a)\Big], n \geqslant 2.\end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Demonstração. Seja $n \geqslant 2$ e considere a função $\mathcal{G} : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{G}(x) = \big[g(b)-g(a)\big]^{n-1}g'(b)f(x) - \tfrac{1}{n}\big[f'(b)-f'(a)\big]\big[g(x)-g(a)\big]^n.$$

A função $\mathcal{G}$ é derivável em $[a,b]$ e

$$\mathcal{G}'(x) = \big[g(b)-g(a)\big]^{n-1}g'(b)f'(x) - \big[f'(b)-f'(a)\big]\big[g(x)-g(a)\big]^{n-1}g'(x).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\mathcal{G}'(a) &= \big[g(b)-g(a)\big]^{n-1}g'(b)f'(a)\\\mathcal{G}'(b) &= \big[g(b)-g(a)\big]^{n-1}g'(b)f'(b) - \big[f'(b)-f'(a)\big]\big[g(b)-g(a)\big]^{n-1}g'(b)\\&= \big[g(b)-g(a)\big]^{n-1}g'(b)\big[f'(b)-(f'(b)-f'(a))\big]\\&= \big[g(b)-g(a)\big]^{n-1}g'(b)f'(a).\end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{G}'(a) = \mathcal{G}'(b)$. Logo, pelo Teorema de Flett, existe $\eta \in (a,b)$ tal que $\mathcal{G}(\eta) - \mathcal{G}(a) = \mathcal{G}'(\eta)(\eta - a)$, i.e.,

$$\begin{aligned}
&\big[g(b)-g(a)\big]^{n-1}g'(b)f(\eta)-\tfrac{1}{n}\big[f'(b)-f'(a)\big]\big[g(\eta)-g(a)\big]^{n}-\big[g(b)-g(a)\big]^{n-1}g'(b)f(a)\\
&=\Big[\big[g(b)-g(a)\big]^{n-1}g'(b)f'(\eta)-\big[f'(b)-f'(a)\big]\big[g(\eta)-g(a)\big]^{n-1}g'(\eta)\Big](\eta-a)\\
&\Leftrightarrow \big[g(b)-g(a)\big]^{n-1}g'(b)\big[f(\eta)-f(a)-f'(\eta)(\eta-a)\big]\\
&=\big[f'(b)-f'(a)\big]\big[g(\eta)-g(a)\big]^{n-1}\Big[\tfrac{1}{n}(g(\eta)-g(a))-g'(\eta)(\eta-a)\Big]
\end{aligned}$$

□

Observação 2.3.21 *Se $g(x) = x$ em (2.3.9), então obtemos a variação do* Teorema de Sahoo-Riedel (Teorema 2.1.12)

$$\begin{aligned}
(b-a)^{n-1}\big[f(\eta)-f(a)-f'(\eta)(\eta-a)\big]&=\big[f'(b)-f'(a)\big](\eta-a)^{n-1}\Big[\tfrac{1}{n}(\eta-a)-(\eta-a)\Big]\\
f(\eta)-f(a)-f'(\eta)(\eta-a)&=-\frac{n-1}{n}\frac{f'(b)-f'(a)}{(b-a)^{n-1}}(\eta-a)^{n}\\
f(\eta)-f(a)&=f'(\eta)(\eta-a)-\frac{n-1}{n}\frac{f'(b)-f'(a)}{(b-a)^{n-1}}(\eta-a)^{n}.
\end{aligned}$$

Teorema 2.3.22 *Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções deriváveis em $[a,b]$, então existe $\eta \in (a,b)$ tal que*

$$\begin{aligned}
&\big[g(a)-g(b)\big]^{n-1}g'(a)\big[f(b)-f(\eta)-f'(\eta)(b-\eta)\big]\\
&=\big[f'(b)-f'(a)\big]\big[g(\eta)-g(b)\big]^{n-1}\Big[\tfrac{1}{n}(g(\eta)-g(a))+g'(\eta)(b-\eta)\Big].
\end{aligned}\tag{2.3.10}$$

Demonstração. Seja $n \geqslant 2$ e considere a função $\mathcal{G}_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{G}_1(x) = \big[g(a)-g(b)\big]^{n-1}g'(a)f(x) + \tfrac{1}{n}\big[f'(b)-f'(a)\big]\big[g(x)-g(b)\big]^{n}.$$

A função $\mathcal{G}_1$ é derivável em $[a,b]$ e

$$\mathcal{G}_1'(x) = \big[g(a)-g(b)\big]^{n-1}g'(a)f'(x) + \big[f'(b)-f'(a)\big]\big[g(x)-g(b)\big]^{n-1}g'(x).$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}_1'(a) &= \big[g(a)-g(b)\big]^{n-1} g'(a)f'(a) + \big[f'(b)-f'(a)\big]\big[g(a)-g(b)\big]^{n-1} g'(a)\\
&= \big[g(a)-g(b)\big]^{n-1} g'(a)\big[f'(a)+f'(b)-f'(a)\big]\\
&= \big[g(a)-g(b)\big]^{n-1} g'(a)f'(b)\\
\mathcal{G}_1'(b) &= \big[g(a)-g(b)\big]^{n-1} g'(a)f'(b).
\end{aligned}
$$

Assim, $\mathcal{G}_1'(a) = \mathcal{G}_1'(b)$. Logo, pelo Teorema de Myers, existe $\eta \in (a,b)$ tal que $\mathcal{G}_1(b) - \mathcal{G}_1(\eta) = \mathcal{G}_1'(\eta)(b-\eta)$, i.e.,

$$
\begin{aligned}
&\big[g(a)-g(b)\big]^{n-1} g'(a)f(b) - \big[g(a)-g(b)\big]^{n-1} g'(a)f(\eta) - \tfrac{1}{n}\big[f'(b)-f'(a)\big]\big[g(\eta)-g(b)\big]^{n}\\
&= \Big[\big[g(a)-g(b)\big]^{n-1} g'(a)f'(\eta) + \big[f'(b)-f'(a)\big]\big[g(\eta)-g(b)\big]^{n-1} g'(\eta)\Big](b-\eta)\\
&\Leftrightarrow \big[g(a)-g(b)\big]^{n-1} g'(a)\Big[f(b)-f(\eta)-f'(\eta)(b-\eta)\Big]\\
&= \big[f'(b)-f'(a)\big]\big[g(\eta)-g(b)\big]^{n-1}\Big[\tfrac{1}{n}(g(\eta)-g(b)) + g'(\eta)(b-\eta)\Big].
\end{aligned}
$$

□

Observação 2.3.23 *Se $g(x) = x$ em* (2.3.22), *então obtemos a variação do variação do* Teorema de Çakmak-Tiryaki (Teorema 2.1.21)

$$
\begin{aligned}
(a-b)^{n-1}\big[f(b)-f(\eta)-f'(\eta)(b-\eta)\big] &= (f'(b)-f'(a))(\eta-b)^{n-1}\big[\tfrac{1}{n}(\eta-b) + (b-\eta)\big]\\
(a-b)^{n-1}\big[f(b)-f(\eta)-f'(\eta)(b-\eta)\big] &= \tfrac{n-1}{n}(f'(b)-f'(a))(\eta-b)^{n-1}(b-\eta)\\
f(b)-f(\eta)-f'(\eta)(b-\eta) &= \tfrac{n-1}{n}\frac{f'(b)-f'(a)}{(a-b)^{n-1}}(\eta-b)^{n-1}(b-\eta).
\end{aligned}
\tag{2.3.11}
$$

(**i**) *Se n é par, de* (2.3.11) *obtemos*

$$
f(b)-f(\eta) = f'(\eta)(b-\eta) + \frac{n-1}{n}\frac{f'(b)-f'(a)}{(b-a)^{n-1}}(b-\eta)^{n}.
$$

(**ii**) *Se n é ímpar, de* (2.3.11) *obtemos*

$$f(b)-f(\eta)=f'(\eta)(b-\eta)+\frac{n-1}{n}\frac{f'(b)-f'(a)}{(b-a)^{n-1}}(b-\eta)^n.$$

De (**i**) *e* (**ii**) *obtemos a equação* (2.1.25) *do* Teorema 2.1.21.

2.4 Exercícios

1. Seja $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$, onde $a_j\in\mathbb{R}$, $j=0,1,2$. Mostre que ponto η do Teorema do Valor Médio aplicado à função f em $[a,b]$ é o ponto médio $\frac{a+b}{2}$.

2. Sejam $a,b\in\mathbb{R}$ com $0<a\leqslant b$. Use o Teorema do Valor Médio para mostrar
$$na^{n-1}(b-a)\leqslant b^n-a^n\leqslant nb^{n-1}(b-a),\ \forall n\in\mathbb{N}$$

3. Use o Teorema do Valor Médio para mostrar
$$\frac{1}{2\sqrt{m+1}}<\sqrt{m+1}-\sqrt{m}<\frac{1}{2\sqrt{m}},\quad \forall m\in\mathbb{N}.$$

4. Use o Teorema do Valor Médio para mostrar
$$\frac{1}{3\,(m+1)^{2/3}}<(m+1)^{1/3}-m^{1/3}<\frac{1}{3\,m^{2/3}},\quad \forall m\in\mathbb{N}.$$

5. Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que

   (a) $\frac{4}{3}<\sqrt{2}<\frac{3}{2}$, $\frac{13}{8}<\sqrt{3}<\frac{7}{4}$ e $\frac{20}{9}<\sqrt{5}<\frac{9}{4}$.
   (b) $\frac{19}{16}<2^{1/3}<\frac{4}{3}$, $\frac{17}{9}<7^{1/3}<\frac{23}{12}$ e $\frac{1298}{625}<9^{1/3}<\frac{25}{12}$.

6. Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$, derivável em (a,b) e $f(x)>0$ para todo $x\in[a,b]$. Mostre que existe $\eta\in(a,b)$ tal que
$$\frac{f(b)}{f(a)}=e^{(b-a)\frac{f'(\eta)}{f(\eta)}}.$$

7. Sejam $a > 0$ e $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $\int\limits_0^a f(x)dx = 0$, então mostre que existe $\eta \in (0, a)$ tal que $\int\limits_0^\eta xf(x)dx = 0$.

8. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 xf(x)dx.$$

Mostre que:

(a) existe $\eta \in (0, 1)$ tal que $\eta^2 f(\eta) = \int\limits_0^\eta xf(x)dx$.

(b) existe $\eta \in (0, 1)$ tal que $\int\limits_0^\eta xf(x)dx = 0$.

9. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 xf(x)dx.$$

Mostre que:

(a) existe $\eta \in (0, 1)$ tal que $f(\eta) = \int\limits_0^\eta f(x)dx$.

(b) existe $\eta \in (0, 1)$ tal que $\eta f(\eta) = \int\limits_0^\eta xf(x)dx$.

10. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 xf(x)dx.$$

Mostre que:

(a) existe $\eta \in (0, 1)$ tal que $f(\eta) = h'(\eta) \int\limits_0^\eta f(x)dx$.

(b) existe $\eta \in (0, 1)$ tal que $\eta f(\eta) = h'(\eta) \int\limits_0^\eta xf(x)dx$.

11. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $[a, b]$ com f' contínua em $[a, b]$ tal que existe $x_0 \in (a, b]$ com $f'(x_0) = 0$. Mostre que existe $x \in (a, b)$ tal que
$$f'(\xi) = \frac{f\xi) - f(a)}{b - a}.$$

12. Mostre que $a^b + b^a > 1$ para todo $a, b > 0$.

13. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a < b < c$ e $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Mostre que existem $\xi \in (a, b)$, $\eta \in (a, c)$, $\xi < \eta$ tal que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi)$ e $f(c) - f(a) = (c - a)f'(\eta)$.

14. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável com f' contínua em $[a, b]$. Mostre que se existe $c \in (a, b]$ tal que $f'(c) = 0$, então podemos encontrar $\xi \in (a, b)$ tal que
$$\frac{f(\xi) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Referências Bibliográficas

[1] Andreescu, T. and Gelca, R., *Mathematical olympiad challenges.* With a foreword by Mark Saul. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2000.

[2] Çakmak, D.; Tiryaki, A. *Mean value theorem for holomorphic functions.* Electron. J. Differential Equations (2012), No. 34, 6 pp.

[3] Chavela, E.P and Petakos, K., *Una nota sobre el Teorema de Rolle.* Miscelánea Matemática 50 (2009), pp. 89–94.

[4] Davitt, R.M.; Powers, R. C.; Riedel, T. and Sahoo, P. K., *Fletts mean value theorem for homomorphic functions*, Math. Mag. 72 (1999), no. 4, pp. 304–307.

[5] Flett, T.M. *A mean value problem*, Math. Gazette, 42 (1958), pp. 38-39.

[6] Furi, M. and Martelli, M., *On the Mean Value Theorem, Inequality, and Inclusion*, Amer. Math. Monthly, Vol. 98, No. 9 (1991), pp. 840–846.

[7] Hutník, O.; Molnárová, J. *On Flett's mean value theorem*, Aequationes Math. 89 (2015), no. 4, pp. 1133–1165.

[8] Karamata, J., *Sur la formule des accroissements finnis.* Srpska Akad. Nauka. Zbornik Radova Mat. Inst. 1 (1951), pp. 119–124.

[9] Kubik, L., *Generalizations of the Rolle, Lagrange and Cauchy theorems*, Wiadomosci Matematyczne, tom V (1962), pp. 47–51.

[10] Lang, S., *Undergraduate Analysis.* Second edition. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2005.

[11] Lozada-Cruz, G., *Some variants of Lagrange's mean value theorem*, 2019. Sel. Mat. 7 (1), pp. 144–150, 2020.

[12] Lozada-Cruz, G., *Funções auxiliares nos teoremas clássicos do valor médio*. PMO v.8, n.3. pp. 286–400, 2020.

[13] Lupu, C.; Lupu, T., *Mean value theorems for some linear integral operators*, Electron. J. Diff. Eqn., 2009, no. 117, pp. 1–15.

[14] Malesevic, B.J., *Some mean value theorem in terms of an infinitesimal function*. Mat. Vesnik 51 (1999), pp. 9–13.

[15] Martínez de la Rosa, F., *Panorámica de los teoremas de valor medio*. Miscelánea Matemática 47 (2008), pp. 23–38.

[16] Mercer, Peter R., *On a mean value theorem*. The College Mathematics Journal, Vol. 33, No. 1 (2002), pp. 46–48.

[17] Mercer, Peter R., *More Calculus of a single variable*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2014.

[18] Mohapatra, Anugraha N., *Cauchy type generalizations of holomorphic mean value theorems*, Electron. J. Diff. Equ., Vol. 2012 (2012), No. 184, pp. 1–6.

[19] Myers, R.E. *Some elementary results related to the mean value theorem*, The Two-Year College Mathematics Journal, Vol. 8, No. 1, pp. 51-53.

[20] Poliferno, M. J.; *A natural auxiliary function for the Mean Value Theorem*. Amer. Math. Monthly 69 (1962), no. 1, pp. 45–47.

[21] Protter, M.H.; Morrey Jr., C.B., *A first course in real analysis*. Second Edition. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York, Inc., 1991.

[22] Qazi, M. A. *The mean value theorem and analytic functions of a complex variable*, J. Math. Anal. Appl. 324 (2006), pp. 30-38.

[23] Rădulescu, T.L; Rădulescu, V.D. and Andreescu, T., *Problems in real analysis: Advanced calculus on the real axis*, Springer Verlag, 2009.

[24] Reich, S., *On mean value theorems*, Amer. Math. Monthly 76 (1969), pp. 70-73.

[25] Riedel, T.; Sablik, M., *A different version of Flett's mean value theorem and an associated functional equation*, Acta Mathematica Sinica 20, No.6 (2004), pp. 1073–1078.

[26] Sahoo, P.K.; Riedel, T. *Mean value theorems and functional equations*, World Scientific, River Edge, NJ, 1998.

[27] Samelson, H., *On Rolle's theorem*. Am. Math. Mon. 86 (1976), p. 486.

[28] Silverman, H., *A simple auxiliary function for the mean value theorem*. Coll. Math. J. 20 (1989), p. 323

[29] Smoryński, C., MVT: *A most valuable theorem*. Springer, Cham, 2017.

[30] Spiegel, Murray R., *Mean value theorems and Taylor series*. Mathematics Magazine 29 (1956), pp. 263–266.

[31] Tavares, A., *Uma aplicação interessante do teorema de Rolle*. `https://problemasteoremas.wordpress.com/2009/05/09/uma-aplicacao-interessante-do-teorema-de-rolle/`, 2009.

[32] Tan, C.; Li, S., *Some new mean value theorems of Flett type*, Int. J. Math. Ed. Sci. Tech., 45:7 (2014), pp. 1103-1107.

[33] Tineo, A., *A generalization of Rolle's theorem and an application to a nonlinear equation*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) 46 (1989), pp.395–401.

[34] Tong, J., *The mean value theorems of Lagrange and Cauchy* (II). Internat. J. Math. Educ. Sci. Technol. 31 (2000) pp. 447–449.

[35] Tong, J., *The mean value theorem of Lagrange generalised to involve two functions*, The Mathematical Gazette, Vol. 84, No. 501 (2000), pp. 515–516.

[36] Tong, J. *A generalization of the mean value theorem for Integrals*, The College Mathematics Journal, Vol. 33 (2002), pp. 408–409.

[37] Tong, J. *On Flett's mean value theorem*, Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech. vol. 35, no. 6 (2004), pp. 936-941.

[38] Tong, J., *The mean value theorem generalised to involve two parameters.* Math. Gazette, vol. 88, no 513 (2004), pp. 538–540.

[39] Tong, J., *A new auxiliary function for the mean value theorem.* Journal of the North Carolina Academy of Science Vol. 121, No. 4 (2005), pp. 174–176.

[40] Thong, Duong Viet. *Problem 11555*, American Mathematical Monthly, Vol.118 (2011), p. 178.

[41] Trahan, D.H., *A new type of mean value theorem.* Math. Mag. 39 (1966), pp. 264–268.

[42] Vučković, V., *Quelques extensions des theoremes de moyenne*, Srpska Akad. Nauka. Zbornik Radova, Mat. Inst., 18(1952), pp. 159–166.

[43] Witula, R.; Hetmanik, E.; Solta, D., *Mean value theorems for one-sided differentiable functions*, Fasciculi Mathematici 48 (2002), pp. 145–154.

[44] Yates, R. C., *The law of the mean.* Amer. Math. Monthly 66 (1959), pp. 579–580.