

Uma Introdução ao Cálculo Estocástico com Aplicações em Finanças Quantitativas

Yuri F. Saporito



VI Colóquio de Matemática da Região Centro-Oeste
19 de maio de 2021

O que veremos nesse curso

- Movimento Browniano
- Cálculo de Itô
- Finanças Quantitativas

Movimento Browniano

A evolução do movimento Browniano

- 1765 Jan Ingenhousz - poeira de carbono no álcool
- 1828 Robert **Brown** - grãos de pólen suspensos em água
- 1900 Louis **Bachelier** - modelagem do preço de um ativo usando mov. Browniano

$$S_t = S_0 + \mu t + \sigma W_t$$

- 1905 Einstein e Smoluchovski - interpretação física do mov. Browniano

drift → volatilidade

- 1923 Norbert **Wiener** - descrição precisa do objetivo matemático e prova de sua existência



O movimento Browniano

- Uma maneira de introduzir o mov. Browniano é através do passeio aleatório
- Considere uma seq. iid $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ com $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$ e seja

$$\mathbb{E}[X_i] = 0$$

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$



- Sabemos que $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$ (LGN). Logo, o tamanho de passo $(1/n)$ é muito pequeno
- Agora, pelo TCL, temos que $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$ em distribuição quando $n \rightarrow +\infty$

- Para introduzir o tempo, consideramos, para $t \in [0, 1]$,

$$\frac{X_1 + \dots + X_{[nt]}}{\sqrt{[nt]}} \sqrt{t}$$

$$B_t^{(n)} = \frac{X_1 + \dots + X_{[nt]}}{\sqrt{n}}$$

$$B_t^{(n)} \rightarrow N(0,t)$$

- O mov. Browniano é o limite desse processo estocástico (Teorema de Donsker) (gif)

O movimento Browniano

padrão

- O movimento Browniano é um processo estocástico $(B_t)_{t \geq 0}$ satisfazendo:

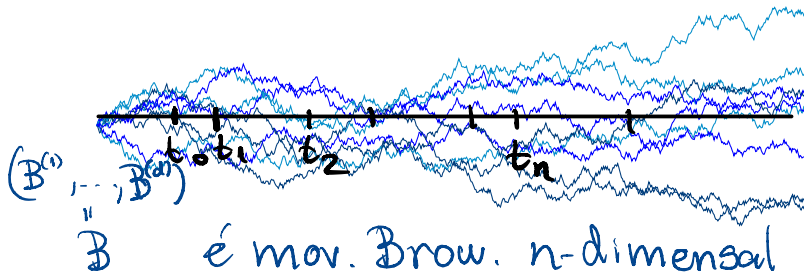
► $B_0 = 0$;

► Incrementos independentes, i.e. as v.a's $\{B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\}_{i=1, \dots, n}$, para $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, são independentes;

► $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$, para qualquer $t > s$;

$B_t \sim N(0, t)$

► Os caminhos $t \mapsto B_t$ são contínuos quase certamente



é mov. Brow. n-dimensional
se $B^{(i)}$ é mov. Brown. e são indep.

Simulação

$$0 = t_0$$

$$\vdots$$

$$T = t_N$$

$$t_0 = 0$$

$$B_{t_i} = \sum_{j=1}^i B_{t_j} - B_{t_{j-1}}, \quad i = 1, \dots, N$$

$$N(0, t_j - t_{j-1})$$

O seguinte código (em Python) gera caminhos do movimento Browniano como os que vimos acima:

```
import numpy as np
```

```
T = 1 ##### horizonte temporal
```

```
N = int(1e2) ##### discretizacao temporal
```

```
M = int(1e5) ##### numero de simulacoes
```

```
dt = T/N
```

```
dW = [np.sqrt(dt)] * np.random.normal(size=(N-1,M))
```

```
W = np.cumsum(dW, axis=0)
```

for $i = 1 \dots N$

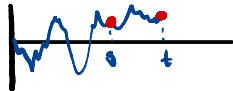
$W[i,:] = W[i-1,:] + dW[i-1,:]$

$$\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{00} + a_{01} \\ a_{00} + a_{01} + a_{02} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{02} \\ \vdots \end{bmatrix}_{N-1, M}$$

Propriedades

- Note que $B_t - B_s$ é independente de todo o caminho de B até o tempo s



$$\mathbb{E}[B_t - B_s \mid \underbrace{B_u, u \leq s}_{\mathcal{F}_s}] = \mathbb{E}[B_t - B_s] = 0$$

- Logo, $(B_t)_{t \geq 0}$ é um **martingal** $\mathbb{E}[B_t \mid B_u, u \leq s] = B_s \quad t \geq s$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_t \mid B_u, u \leq s] &= \mathbb{E}[(B_t - B_s) + B_s \mid B_u, u \leq s] \\ &= \mathbb{E}[B_t - B_s \mid B_u, u \leq s] + \mathbb{E}[B_s \mid B_u, u \leq s] = B_s \end{aligned}$$

- Além disso, a covariância é dada por $\mathbb{E}[B_t B_s] = \min\{t, s\}$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B_t, B_s) &= \mathbb{E}[B_t B_s] - \mathbb{E}[B_t] \mathbb{E}[B_s] \\ &= \mathbb{E}[(B_t - B_s + B_s) B_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s) B_s] + \mathbb{E}[B_s^2] = s \end{aligned}$$

$\text{Var}(B_s) = s$

$\mathbb{E}[B_t - B_s] \mathbb{E}[B_s] = 0$

- $(B_t)_{t \geq 0}$ é um **processo Gaussiano**

$(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ é Gaussiano
 $t_1, \dots, t_n$ "A $\begin{bmatrix} B_{t_1} \\ B_{t_2} - B_{t_1} \\ \vdots \\ B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \mathbb{E}[B_t] = 0 \\ k(s, t) &= \min\{t, s\} \end{aligned}$$

Propriedades

- $X_t = B_t^2 - t$ é um martingal

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\underbrace{B_t^2 - t}_{X_t} | \mathcal{B}_u, u \leq s] &= \mathbb{E}[(B_t - B_s + B_s)^2 | \mathcal{B}_u, u \leq s] - t = \\
 &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 + 2B_s(B_t - B_s) + B_s^2 | \mathcal{B}_u, u \leq s] - t \quad \text{--- } B_s^2 \\
 &= \underbrace{\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 | \mathcal{B}_u, u \leq s]}_{= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = \text{Var}(B_t - B_s) = t - s} + 2 \underbrace{\mathbb{E}[B_s(B_t - B_s) | \mathcal{B}_u, u \leq s]}_{= B_s \mathbb{E}[B_t - B_s | \mathcal{B}_u, u \leq s] = 0} + \underbrace{\mathbb{E}[B_s^2 | \mathcal{B}_u, u \leq s]}_{= B_s^2} - t \\
 &= t - s + B_s^2 - t = B_s^2 - s = X_s
 \end{aligned}$$

- $Y_t = \frac{1}{c} B_{c^2 t}$ é um movimento Browniano (gif)

(1), (2) e (4): triviais

$$Y_t - Y_s = \frac{1}{c} (B_{c^2 t} - B_{c^2 s}) \sim \boxed{\frac{1}{c}} N(0, c^2 t - c^2 s) \sim N(0, t - s)$$

$\sim N(0, t-s)$
 $\nearrow 1/c^2$

- $Z_t = e^{aB_t - a^2 t/2}$ é um martingal

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[e^{\underbrace{aB_t - a^2 t/2}_{Z_t}} | \mathcal{B}_u, u \leq s] &= \mathbb{E}[e^{a(B_t - B_s + B_s)} | \mathcal{B}_u, u \leq s] e^{-a^2 t/2} = \\
 &= e^{\frac{a^2 (t-s)}{2}} \underbrace{\mathbb{E}[e^{a(B_t - B_s)} | \mathcal{B}_u, u \leq s]}_{\substack{\text{FGM em } a \\ \text{de } B_t - B_s \\ \sim N(0, t-s)}} = \mathbb{E}[e^{a(B_t - B_s)} | \mathcal{B}_u, u \leq s] e^{a^2 B_s - a^2 t/2} = e^{aB_s - a^2 s/2} = Z_s
 \end{aligned}$$

- As três primeiras propriedades do mov. Browniano definem completamente as **distribuições finito-dimensionais** do processo:
 $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ tem distribuição normal multivariada com média zero e matriz de covariância $\min\{t_i, t_j\}$
- Mostrar a existência de um processo com essa distribuição é relativamente fácil. Por exemplo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_t B_s] &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \mathbb{E}[Z_n Z_m] \int_0^t \phi_n(u) du \int_0^s \phi_n(u) du \\ &\quad \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^t \phi_n(u) du \int_0^s \phi_n(u) du = \langle 1_{[0,t]}, 1_{[0,s]} \rangle_{L^2([0,1])} \\ &\quad = \min\{s, t\} \end{aligned} \quad B_t = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \int_0^t \phi_n(s) ds$$

onde $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seq. iid $N(0, 1)$ e $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base ortonormal de $L^2[0, 1]$ (**Teorema de Karhunen–Loève**)

↳ Wavelets

- A principal dificuldade é juntar essas hipóteses sobre a distribuição finito-dimensional de B com a hipótese de continuidade de seus caminhos
- Em 1923, o matemático aplicado Norbert Wiener demonstrou a existência do movimento Browniano
- Uma forma de demonstrar a existência do mov. Browniano é mostrar que a série que vimos no slide anterior converge uniformemente em t

(Borel-Cantelli)

Lema: $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iid $N(0,1)$

$\Rightarrow \exists$ v.a. $C > 0$ com $P(C < +\infty) = 1$
t.q. $|Z_n| \leq C \sqrt{\log n}, \forall n \geq 2$

$$\mathbb{E}[f(X)] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \quad , \quad X_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$f(x) = \mathbb{1}_{\{x \geq 3\}}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \underbrace{\frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}}_{\text{dens. } N(\mu,1)} e^{\mu^2/2 - \mu x} dx \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[f(x)] = \mathbb{E}\left[f(y) e^{\frac{\mu^2}{2} - \mu y}\right]$$

$$y \sim N(\mu, 1) \quad \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\frac{((x_i - x_{i-1}) - \mu(t_i - t_{i-1}))^2}{2(t_i - t_{i-1}))}}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\mu = 30$$

$$X_t = B_t + \mu t$$

$$NM(\mu(t_i - t_{i-1}), (t_i - t_{i-1})I)$$

$$\mathbb{E}[f(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})] = \mathbb{E}\left[g\left(\overbrace{X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}}\right)\right]$$

$$g(y_1, \dots, y_n) = f(y_1, y_1 + y_2, \dots, y_1 + \dots + y_n)$$

$$\left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}} \right) e^{\mu x_n - \frac{1}{2} \mu^2 t_n}$$

$$\mathbb{E}[f(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})] = \mathbb{E}[f(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})]$$

↑
drift

$$e^{\mu B_{t_n} - \frac{\mu^2 t_n}{2}}$$

↗ sem drift

Girsanov

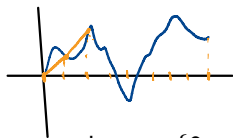
$$\mathbb{E}[f(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) Z_{t_n}] = \mathbb{E}_Q[\dots]$$

Integral de Itô

Integral de Riemann-Stieltjes

Vamos relembrar a integral de Riemann e Riemann-Stieltjes:

- $\int_0^t \phi(s) ds = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \phi(\tilde{t}_i^*)(t_i - t_{i-1})$, com $\tilde{t}_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$
- $\int_0^t \phi(s) dg(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \phi(\tilde{t}_i^*)(g(t_i) - g(t_{i-1}))$, com $\tilde{t}_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$
- A teoria clássica de integração de Riemann-Stieltjes supõe que g é de **variação limitada**:



$$\sup_{\pi} \sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})| < +\infty,$$

onde $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$

Young $\phi \in C^\alpha$
 $g \in C^\beta$

$$\alpha + \beta > 1$$

Rough
Path

Integral de Itô

- Vamos considerar agora a definição de uma integral contra o mov. Browniano
- Gostaríamos de considerar a formulação de **Riemann-Stieltjes**:

$$X = \int_0^t \phi_s dB_s = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \phi_{t_i^*} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}),$$

onde $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$

$\phi_s: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $X_n \rightarrow \in L^2(\Omega)$

- O sentido de aproximação acima é em L^2 $\mathbb{E}[(X - X_n)^2] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- É preciso garantir que ϕ_t só dependa do mov. Browniano até o tempo t e que seja suficientemente integrável:

$\phi_{t_i^*}$ dep. do mov Brown. até t_i^*

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t \phi_s^2 ds \right] < +\infty$$

$$\phi_t = \mathcal{V}(t, B_t)$$

$$\phi \in L^2(\Omega \times [0, T]) = \mathcal{H}^2$$

Integral de Itô

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C \quad \int_0^t B_s dB_s = \frac{B_t^2}{2}$$

- Podemos escolher qualquer t_i^* como na integral de Riemann-Stieltjes?
- Vamos analisar o caso $\phi_t = B_t$ para entendermos melhor a dificuldade
- Considere os seguintes casos: $t_i^* = t_{i-1}$ e $t_i^* = t_i$

$$X_n = \sum_{i=1}^n B_{t_{i-1}} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \Rightarrow E[X_n] = \sum_{i=1}^n E[B_{t_{i-1}} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})]$$

Prove que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é um martingal

$$E[X_n | X_{n-1}, \dots, X_1] = X_{n-1}$$

$$= \sum_{i=1}^n E[B_{t_{i-1}}] E[B_{t_i} - B_{t_{i-1}}] = 0$$

$$Y_n = \sum_{i=1}^n B_{t_i} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \Rightarrow E[Y_n] = \sum_{i=1}^n E[B_{t_i}^2] - E[B_{t_i} B_{t_{i-1}}]$$

$$= \sum_{i=1}^n \underbrace{E[B_{t_i}^2]}_{t_i} - \underbrace{E[B_{t_i} B_{t_{i-1}}]}_{t_{i-1}} = \sum_{i=1}^n t_i - t_{i-1} = t_n - t_0 = t$$

- A teoria de Riemann-Stieltjes **não funciona** para o mov. Browniano

Integral de Itô

- A **integral de Itô** segue a escolha $t_i^* = t_{i-1}$
- Essa teoria foi desenvolvida por **Kiyoshi Itô** entre 1938 e 1945
- Para entender melhor o que está acontecendo, vamos calcular o limite quando $n \rightarrow +\infty$ de

$$\sum_{i=1}^n B_{t_{i-1}} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$$

Dica: $\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 = x(y-x) + \frac{1}{2}(y-x)^2$ (série de Taylor)

$$X_n = \sum_{i=1}^n B_{t_{i-1}} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{1}{2} (B_{t_i}^2 - B_{t_{i-1}}^2)}_{\text{telescópica}} - \frac{1}{2} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{t_n=t}{t_0=0} = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^n (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2}_{Z_n} \end{aligned}$$

Variação Quadrática

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$$

- Logo, gostaríamos de calcular o limite

$$t_i = \frac{it}{n}$$

v.a.

$$\langle B \rangle_t$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^n (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2}_{Z_n}$$

$$\max_i (t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0$$

onde o limite é em L^2

- Essa quantidade é chamada de **variação quadrática** e vamos mostrar que $\langle B \rangle_t = t$

$$Z \sim N(0, \sigma^2)$$

- Antes de seguir vamos relembrar alguns fatos:

► $X_n \rightarrow X$ em L^2 se $\mathbb{E}[(X_n - X)^2] \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$

$$\frac{Z}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$\frac{Z}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$(Z/\sigma)^2 \sim \chi_1^2$$

► Se Z é uma v.a. Gaussiana com média zero, então $\text{Var}(Z^2) = 2\text{Var}(Z)^2$

► Para $a \in \mathbb{R}$ constante, temos que $X_n \rightarrow a$ em L^2 se, e somente se, $\mathbb{E}[X_n] \rightarrow a$ e $\text{Var}(X_n) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow +\infty$

$$\mathbb{E}[(X_n - a)^2] = \mathbb{E}[(X_n - \mathbb{E}[X_n] + \mathbb{E}[X_n] - a)^2] = \underbrace{\text{Var}(X_n)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{(\mathbb{E}[X_n] - a)^2}_{\rightarrow 0} + 2(\mathbb{E}[X_n] - a)\mathbb{E}[X_n - \mathbb{E}[X_n]]$$

Variação Quadrática

- Defina

$$Z_n \rightarrow t \text{ em } L^2$$

$$Z_n = \sum_{i=1}^n (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$$

- Vamos calcular $\mathbb{E}[Z_n]$ e $\text{Var}(Z_n)$ (para facilitar, vamos tomar $t_i = it/n$) $t_i - t_{i-1} = \frac{t}{n}$

$$\mathbb{E}[Z_n] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2] = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = t, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \sim N(0, t_i - t_{i-1})$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z_n) &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2) \\ &= \sum_{i=1}^n 2 \text{Var}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 = \sum_{i=1}^n 2 (t_i - t_{i-1})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n 2 \cdot \frac{t^2}{n^2} = \frac{2t^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\langle B \rangle_t = t$$

Integral de Itô

- Com isso, conseguimos mostrar que

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{t}{2}$$

$$\int_0^t B_s dB_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n B_{t_{i-1}} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} \langle B \rangle_t = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{t}{2}$$

Backward Itô Integral

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n B_{t_i} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \frac{1}{2} B_t^2 + \frac{t}{2}$$

Stratonovich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n B_{\frac{t_i + t_{i-1}}{2}} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \frac{1}{2} B_t^2$$

$$\int_0^t B_s \circ dB_s = \frac{B_t^2}{2}$$

- O fato da variação quadrática do mov. Browniano ser estritamente positiva implica que a ele **não tem variação finita**:

$$V_1(B) = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^n |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}| = +\infty,$$

onde $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$ é uma partição de $[0, t]$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 &\leq \sup_j |B_{t_j} - B_{t_{j-1}}| \underbrace{\sum_{i=1}^n |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|}_{\leq V_1(B)} \\ &\stackrel{!}{=} 0 \leq \underbrace{\sup_j |B_{t_i} - B_{t_{j-1}}|}_{\substack{\text{fosse} \\ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}} \leq V_1(B) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

por B ser unif. cont. em $[0, t]$

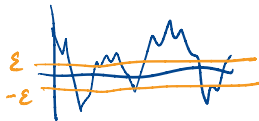
$$\Rightarrow V_1(B) = +\infty, \forall t > 0$$

Outras Propriedades do mov. Browniano

Os caminhos do mov. Browniano têm propriedades muito interessantes. As seguinte valem quase certamente:

- Não é diferenciável em nenhum ponto
- Não é monótono em nenhum intervalo
- O conjunto $\{t \geq 0 ; B_t = 0\}$ tem medida de Lebesgue zero, é fechado e não tem pontos isolados

↳ tempo local



$$|B_t - B_s| \leq C |t - s|^\alpha$$

$\alpha < 1/2$

Integral de Itô como um Processo Estocástico

- Em toda discussão até agora, vimos o tempo t na integral $\int_0^t \phi_s dB_s$ como um parâmetro fixo
- É possível variar t e olhar $X_t = \int_0^t \phi_s dB_s$ como um processo estocástico
 $t \in [0, T]$
- Nesse caso, pode-se mostrar que X é um martingal contínuo quadrado-integrável que satisfaz a **isometria de Itô**:

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \phi_s dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t \phi_s^2 ds \right]$$

$$\phi_s = \sum_{i=1}^m a_{i-1} 1_{[t_{i-1}, t_i)}(s) \quad / \quad \int_0^t \phi_s dB_s = \sum_{i=1}^m a_{i-1} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$$

a_{i-1} dep. de B até t_{i-1} (em L^2)

$L^2(\Omega \times [0, T])$

$$\int_0^t (\phi_s + \beta \psi_s) dB_s = \int_0^t \phi_s dB_s + \beta \int_0^t \psi_s dB_s$$

$$\phi_s \leq \psi_s \not\Rightarrow \int_0^t \phi_s dB_s \leq \int_0^t \psi_s dB_s$$

Fórmula de Itô

~~$$0 \leq B_t$$~~

$$\int_0^t 1 dB_s = B_t$$

J. M. Steele

linear ↙

(Pham) Controle Estocástico

↗ não-linear

“If one disqualifies the Pythagorean Theorem from contention, it is hard to think of a mathematical result which is better known and more widely applied in the world today than ‘Itô’s Lemma’. This result holds the same position in the stochastic analysis that Newton’s fundamental theorem holds in classical analysis. That is, it is the sine qua non of the subject.”

Descrição do trabalho acadêmico de Kiyoshi Itô's pela Academia Nacional de Ciência dos Estados Unidos



$$f(q(t)) - f(q(0)) = \int_0^t f'(q(s)) dq(s) \quad \text{R-S}$$

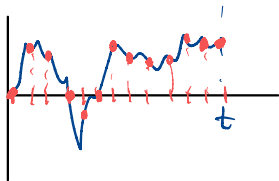
- Seja $f \in C^2(\mathbb{R})$ e lembre a expansão de Taylor

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + \frac{1}{2}f''(x)(y - x)^2 + \dots$$

- Termos de ordem maior não impactarão as nossas contas
- Para t fixo:

$$f(B_t) - f(B_0) = \sum_{i=1}^n \underbrace{f(B_{t_i}) - f(B_{t_{i-1}})}_Y$$

- Quando for nos ajudar, vamos considerar $t_i = it/n$



Fórmula de Itô

- Pela **expansão de Taylor**,

$$\sum_{i=1}^n \left(f(B_{t_i}) - f(B_{t_{i-1}}) \right) = f'(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2} f''(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 + \dots$$

- Pela teoria de **integração de Itô**, temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f'(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \int_0^t f'(B_s) dB_s$$

- Se tivéssemos dentro da **teoria de Riemann-Stieltjes**, a conta **terminaria aqui**, mas não é o caso

$$\int_0^t B_s dB_s \iff f(x) = \frac{1}{2} x^2$$

Fórmula de Itô

- Vamos então analisar o próximo termo:

$$X_n = \sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$$

$$\mathbb{E}[X_n] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[f''(B_{t_{i-1}})] \underbrace{\mathbb{E}[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2]}_{(t_i - t_{i-1})} = \mathbb{E}\left[\underbrace{\sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1})}_{Z_n}\right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \int_0^t f''(B_s) ds$$

$$X_n = \underbrace{\sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}})((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1}))}_{\tilde{X}_n} + \underbrace{\sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1})}_{Z_n}$$

$$\mathbb{E}[\tilde{X}_n] = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\tilde{X}_n) &= \mathbb{E}[\tilde{X}_n^2] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[f''(B_{t_{i-1}}) f''(B_{t_{j-1}}) ((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})) ((B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 - (t_j - t_{j-1}))] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[f''(B_{t_{i-1}})^2 ((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1}))^2] + \underbrace{\sum_{i \neq j}^n \mathbb{E}[f''(B_{t_{i-1}}) f''(B_{t_{j-1}}) ((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})) ((B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 - (t_j - t_{j-1}))]}_{\text{indep do resto}} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\dots] \mathbb{E}[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})^2] = f'' \text{ limitado}$$

$$= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\dots] \frac{\text{Var}((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2)}{2 \underbrace{\text{Var}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2}_{(t_i - t_{i-1})^2}} = \frac{2t}{n^2} \sum_{i=1}^n \underbrace{\mathbb{E}[f''(B_{t_{i-1}})]}_{\leq \|f''\|_{\infty}}$$

$$\leq \frac{2t \|f''\|_{\infty}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Fórmula de Itô

- Logo, achamos a famosa **fórmula de Itô**:

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds$$

$$f(B_t) - f(B_0) = \sum_{i=1}^n f(B_{t_i}) - f(B_{t_{i-1}})$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) d\langle B \rangle_s$$

$\langle B \rangle_s = s$ Variação Quadrática

Vamos usar a fórmula de Itô para calcular as seguintes integrais estocásticas:

$$\bullet \int_0^t B_s dB_s = \frac{B_t^2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^t 1 ds$$

$x \rightarrow \frac{x^2}{2}$

$$\bullet \int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{B_t^3}{3} - \frac{1}{2} \int_0^t 2 B_s ds$$

$x^2 \rightarrow \frac{x^3}{3}$

$$\bullet \int_0^t f(s) dB_s$$

Extensão e Equação do Calor

- Uma fácil extensão para $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$:

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t \partial_t f(s, B_s) ds + \int_0^t \partial_x f(s, B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_{xx} f(s, B_s) ds \quad \langle B \rangle_s = s$$

- Se f satisfaz a equação do Calor, então $f(t, B_t)$ é um martingal

$$\partial_t f(t, x) + \frac{1}{2} \partial_{xx} f(t, x) = 0$$

$$f(t, B_s) = f(0, B_0) + \int_0^t \left(\partial_t f + \frac{1}{2} \partial_{xx} f \right) ds + \int_0^t \partial_x f dB_s$$

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t$$

- Suponha que o processo X_t satisfaz a seguinte equação

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s$$

- Essas são as famosas **Equações Diferenciais Estocásticas**
- Existe **vasta teoria** sobre **existência e unicidade** de solução e como aproximá-la **numericamente**
- Uma extensão mais complexa da fórmula de Itô:

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \partial_t f(s, X_s) ds + \int_0^t \partial_x f(s, X_s) \mu(X_s) ds + \int_0^t \partial_x f(s, X_s) \sigma(X_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_{xx} f(s, X_s) \sigma^2(X_s) ds$$

$$\left\langle \int_0^\cdot \sigma(X_s) dB_s \right\rangle_t = \int_0^t \sigma^2(X_s) ds$$

Notação Diferencial e Box Calculus Algebra

- Existe uma notação mais amigável para os objetos que vimos até agora

$$X_t - X_0 = \int_0^t \mu(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s$$

- Para EDE: $dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$

- Box calculus: $(dt)^2 = 0$, $dt dB_t = 0$ e $(dB_t)^2 = dt$ (relação com a variação quadrática e covariação)

$$\langle f, B \rangle_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1})) \cdot (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = 0$$

- Podemos então reescrever a fórmula de Itô como

$$df(t, X_t) = \partial_t f(t, X_t)dt + \partial_x f(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \partial_{xx} f(t, X_t)(dX_t)^2$$

$$\begin{aligned} (dX_t)^2 &= (\mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t)^2 = \mu^2(X_t)\cancel{(dt)^2} + \\ &+ 2\mu(X_t)\sigma(X_t)\cancel{dt dB_t} + \sigma^2(X_t)\cancel{(dB_t)^2} dt \\ &= \sigma^2(X_t)dt \end{aligned}$$

$$\bullet dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_u du + \int_0^t \sigma S_u dB_u$$

$$X_t = \log S_t, \quad f(x) = \log x$$

$$\partial_x f = \frac{1}{x}, \quad \partial_{xx} f = -\frac{1}{x^2}$$

$$(dS_t)^2 = \sigma^2 S_t^2 dt$$

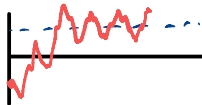
$$\begin{aligned} dX_t &= df(S_t) = \partial_x f(S_t) dS_t + \frac{1}{2} \partial_{xx} f(S_t) (dS_t)^2 \\ &= \frac{1}{S_t} (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{S_t^2} \right) \sigma^2 S_t^2 dt \end{aligned}$$

$$= (\mu dt + \sigma dB_t) - \frac{1}{2} \sigma^2 dt$$

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 ds$$

$$= X_0 + \mu t + \sigma B_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t$$

$$\log S_t = \log S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \Rightarrow S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) t + \sigma B_t}$$



- $dX_t = \kappa(m - X_t)dt + \sigma dB_t$

$$Y_t = e^{\kappa t} X_t, \quad f(t, x) = e^{\kappa t} x \Rightarrow \begin{cases} \partial_t f = \kappa e^{\kappa t} x \\ \partial_x f = e^{\kappa t} \\ \partial_{xx} f = 0 \end{cases}$$

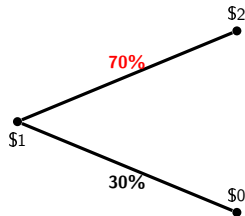
$$\begin{aligned} dY_t &= df(t, X_t) = \partial_t f(t, X_t)dt + \partial_x f(t, X_t)dX_t \\ &= \cancel{\kappa e^{\kappa t} X_t dt} + e^{\kappa t} (\cancel{\kappa(m - X_t)dt} + \sigma dB_t) \\ &= \kappa m e^{\kappa t} dt + \sigma e^{\kappa t} dB_t \end{aligned}$$

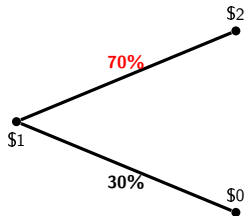
$$Y_t = Y_0 + \kappa m \int_0^t e^{\kappa s} ds + \sigma \int_0^t e^{\kappa s} dB_s$$

$$e^{\kappa t} X_t = X_0 + m e^{\kappa s} \Big|_0^t + \sigma \int_0^t e^{\kappa s} dB_s$$

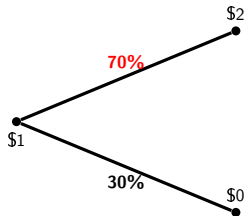
$$X_t = e^{-\kappa t} X_0 + m(1 - e^{-\kappa t}) + \sigma \boxed{e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s} dB_s} \sim N\left(0, \int_0^t e^{2\kappa s} ds\right)$$

Finanças Quantitativas



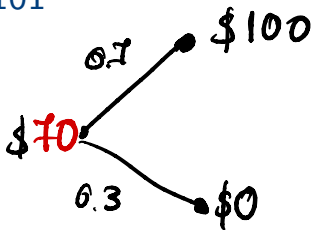
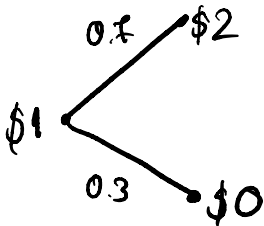


Nesse mesmo cassino um bilhete é vendido que paga \$100 se sair **vermelho** na roleta, e não paga nada se sair **preto**



Nesse mesmo cassino um bilhete é vendido que paga \$100 se sair **vermelho** na roleta, e não paga nada se sair **preto**

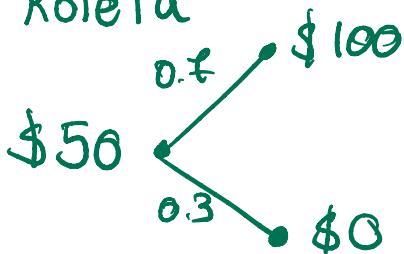
Esse bilhete está sendo vendido por \$60. Está barato ou caro?



\$60
caro!

REPLICAÇÃO

Roleta



HEDGE

- Considere o seguinte exemplo com o objetivo de introduzir o conceito de **derivativo**.
- Imagine que uma grande empresa do agronegócio brasileiro precise garantir a venda de soja em um mês e que essa venda deve ser acordada hoje.
- Então, para isso, basta que a empresa entre em contato com uma contraparte interessada em comprar soja e que combinem a entrega desejada para daqui a um mês a um preço pré-acordado.
- Com isso, aparece a seguinte pergunta:
 - ▶ Quanto essa empresa deve pagar (ou receber) para garantir a venda da soja?

- Vamos supor ainda que a contraparte não esteja interessada em comprar hoje a soja desejada para o mês seguinte, apesar de essa ser uma solução válida para o nosso problema.
- Na verdade, o que se pretende é ter a **garantia** que daqui a um mês a quantidade de soja desejada esteja disponível para compra pelo preço acordado.
- Note que esse contrato garante que a empresa possa vender a soja no próximo mês por um preço fixado hoje e, portanto, ela está se protegendo do risco de o preço da soja cair absurdamente.
- Através deste caso é possível exemplificar, com clareza, que um contrato como esse é muito importante para toda a economia.

- O contrato descrito acima, que garante a venda da soja no próximo mês, é um **derivativo**.
- A data em que o produto será entregue é a **maturidade**, a troca de capital realizada na maturidade para a transação do produto é chamado de **payoff** e o preço que devemos pagar ou receber hoje por esse derivativo é o **prêmio**.
- Um derivativo pode ser visto em toda sua generalidade como um instrumento financeiro cujo valor depende do valor de outro ativo, que chamaremos de **ativo subjacente** ao derivativo.
- Vale notar que o exemplo se encaixa nessa definição, pois o valor daquele derivativo depende do valor da soja.

Existem dois tipos de derivativos básicos e importantes:

- **Futuros:** são contratos para compra ou venda de um ativo em uma data futura pré-determinada (**maturidade**) por um preço especificado hoje (**strike**). O contrato exemplificado anteriormente é um futuro.
- **Opções:** são contratos que dão ao detentor o **direito**, mas não a obrigação, de comprar ou vender um ativo em uma data futura pré-determinada (**maturidade**) por um preço especificado hoje (**strike**). Se a opção der ao detentor o direito de compra, chamaremos esse contrato de opção de compra (ou **call**) e se der o direito de venda, chamaremos de opção de venda (ou **put**).

Derivativos

- O **payoff** de um derivativos é o valor monetário do derivativo na maturidade
- Se denotarmos o valor do ativo na maturidade por S_T e o strike por K , então os payoffs são dados por:

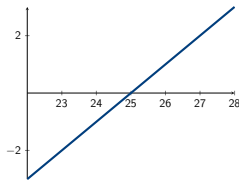
► **Futuro:** $S_T - K$

► **Call:** $S_T - K$, se $S_T > K$, e 0, caso contrário

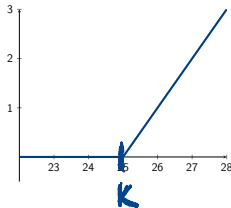
$$(S_T - K)^+$$

► **Put:** $K - S_T$, se $S_T < K$, e 0, caso contrário

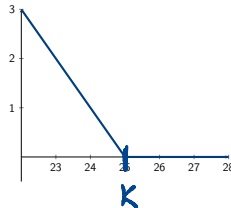
$$(K - S_T)^+$$



Futuro $S_T - K$



Call $(S_T - K)^+$



Put $(K - S_T)^+$

Modelo de Black–Scholes

- O modelo de Black–Scholes para uma ativo S supõe a seguinte dinâmica para seu preço, sob a medida histórica (ou subjetiva) $\mathbb{P}$,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

mov. Browniano Geométrico

- $\mu \in \mathbb{R}$ é o drift, $\sigma > 0$ é a volatilidade e B é um mov. Browniano sob $\mathbb{P}$
- Além disso, assumimos ser possível emprestar e tomar emprestado dinheiro a uma taxa de juros constante livre de risco, r . Vamos descrever esse investimento através de $d\beta_t = r\beta_t dt$, com $\beta_0 = 1$
- O modelo ainda supõe tacitamente que
 - ▶ É possível vender o ativo a descoberto;
 - ▶ O ativo pode ser transacionado continuamente;
 - ▶ Todos os valores mobiliários são infinitamente divisíveis;
 - ▶ Não há custo de transação e nem impostos;
 - ▶ O ativo não paga dividendos.

$$\beta_t = \beta_0 e^{rt}$$

Modelo de Black–Scholes

- Vamos tentar usar a intuição que ganhamos com o exemplo do cassino para analisar o seguinte problema: qual é o preço de um derivativo com maturidade T e payoff $h(S_T)$?
- Denote o preço desse contrato no tempo t por V_t . Vamos supor ainda que existe $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ ainda desconhecida tal que $V_t = f(t, S_t)$
- O argumento é replicar V usando o ativo S e o ativo livre de risco β
- Ou seja, procurar processos ϕ e ψ tais que

$$V_t = \phi_t S_t + \psi_t \beta_t$$

- O último ingrediente é a hipótese de que esse portfólio (ϕ, ψ) seja auto-financeável:

$$dV_t = \phi_t dS_t + \psi_t d\beta_t$$

Modelo de Black-Scholes

- Logo, por um lado usamos as dinâmicas de S e β e a propriedade de ser auto-financiável

$$dV_t = \phi_t dS_t + \psi_t d\beta_t = \phi_t(\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) + \psi_t r \beta_t dt = (\phi_t \mu S_t + \psi_t r \beta_t) dt + \phi_t \sigma S_t dB_t$$

- Por outro, usamos a hipótese $V_t = f(t, S_t)$ e a fórmula de Itô

$$dV_t = df(t, S_t) = \partial_t f(t, S_t) dt + \frac{1}{2} \partial_{xx} f(t, S_t) (dS_t)^2 + \partial_x f(t, S_t) dS_t = \partial_t f(t, S_t) dt + \frac{1}{2} \partial_{xx} f(t, S_t) \sigma^2 S_t^2 dt + \partial_x f(t, S_t) \mu S_t dt + \partial_x f(t, S_t) \sigma S_t dB_t$$

Escolhemos $\phi_t = \partial_x f(t, S_t)$ **Delta hedge**

$$\cancel{\partial_x f(t, S_t) \mu S_t dt} + \psi_t r \beta_t = \partial_t f(t, S_t) + \frac{1}{2} \partial_{xx} f(t, S_t) \sigma^2 S_t^2 dt + \cancel{\partial_x f(t, S_t) \mu S_t dt}$$

EDP de Black-Scholes

$$\cancel{\partial_x f(t, S_t) \mu S_t} + \gamma_t r \beta_t = \partial_t f(t, S_t) + \frac{1}{2} \partial_{xx} f(t, S_t) \sigma^2 S_t^2 + \cancel{\partial_x f(t, S_t) \mu S_t dt}$$

- Portanto, escolhemos $\phi_t = \partial_x f(t, S_t)$

$$\gamma_t = \frac{1}{r \beta_t} \left(\partial_t f + \frac{1}{2} \partial_{xx} f \sigma^2 S_t^2 \right)$$

$$V_t = f(t, S_t) = \phi_t S_t + \gamma_t \beta_t = \partial_x f(t, S_t) S_t + \cancel{\beta_t} \frac{1}{\cancel{r \beta_t}} \left(\partial_t f(t, S_t) + \frac{1}{2} \partial_{xx} f(t, S_t) \sigma^2 S_t^2 \right)$$

- E com isso achamos a famosa **EDP de Black-Scholes**

$$\begin{cases} \partial_t f(t, S) + rS \partial_S f(t, S) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \partial_{SS} f(t, S) - rf(t, S) = 0, \\ f(T, S) = h(S). \end{cases}$$

$$h(S_T) = V_T = f(T, S)$$

Resolvendo a EDP de Black-Scholes

Para achar a solução, vamos transformar a EDP de Black-Scholes na **equação do calor**

- $v(\tau, y) = e^{r\tau} f(T - \tau, e^y)$

$$\begin{matrix} \partial_\tau v \\ \partial_y v \\ \partial_{yy} v \end{matrix} \leftarrow \begin{cases} \partial_t f \\ \partial_s f \\ \partial_{ss} f \end{cases}$$

- $u(\tau, x) = v(\tau, x - (r - \sigma^2/2)\tau)$

$$\begin{cases} \partial_\tau u = \frac{1}{2} \sigma^2 \partial_{xx} u \\ u(0, x) = h(e^x) \end{cases}$$

EDP

$$S = e^x = e^{x - (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}$$

$$x = \log S + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot (\tau - t)$$

Solução da Equação de Calor

- Seja u a solução da equação do calor:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \alpha \partial_{xx} u(t, x), \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \sigma^2$$

$$u_0(x) = h(e^x)$$

- Para resolver essa equação, usa-se a **transformada de Fourier**

- A solução é $u(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t, x - z) u_0(z) dz$, onde

$$\varphi(\tau, \xi) = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha\tau}}}{\sqrt{4\pi\alpha\tau}}$$

$$\sim N(0, 2\alpha t)$$

Voltando... a fórmula de Black-Scholes $\varphi(\tau, x) = e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2 \tau}} \sqrt{2\pi\sigma^2 \tau}$

- Vamos considerar o caso de uma call: $h(S) = (S - K)^+$

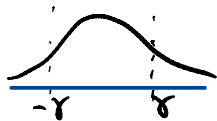
$$\begin{aligned}
 u(\tau, x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau, x-z) h(e^x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau, x-z) \underbrace{(e^x - K)^+}_{= \begin{cases} e^x - K, & x \geq \log K \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}} dx = \int_{\log K}^{+\infty} \varphi(\tau, x-z) (e^x - K) dx \\
 &= K \int_{\log K}^{+\infty} \varphi(\tau, x-z) dz
 \end{aligned}$$

II

$$Z \sim N(0,1)$$

K - Prob de uma normal com média x e var. $\sigma^2 \tau \geq \log K$

$\hookrightarrow \Phi(d) = \text{cumulativa } N(0,1)$



$$= \mathbb{P}(x + \sigma\sqrt{\tau} Z \geq \log K)$$

$$= \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{\log K - x}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{x - \log K}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{x - \log K}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$

Voltando... a fórmula de Black-Scholes

$$\begin{aligned}
 & \bullet \int_{\log K}^{+\infty} \varphi(\tau, x - z) e^z dz \\
 &= \int_{\log K}^{+\infty} \frac{\exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2 J} (x - z)^2 + z\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2 J}} dz \\
 &= \int_{\log K}^{+\infty} e^{x + \frac{\sigma^2 J}{2}} \frac{\exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2 J} (x + \sigma^2 J - z)^2\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2 J}} dz \\
 &= e^{x + \frac{\sigma^2 J}{2}} \mathbb{P}(x + \sigma^2 J + \sigma\sqrt{J}Z \geq \log K) \\
 &= \boxed{e^{x + \frac{\sigma^2 J}{2}}} \Phi\left(\frac{x + \sigma^2 J - \log K}{\sigma\sqrt{J}}\right) \\
 & \text{Será}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{-1}{2\sigma^2 J} (x^2 - 2xz + z^2) + z \\
 &= \frac{-1}{2\sigma^2 J} (x^2 - 2xz + z^2 - 2\sigma^2 J z) \\
 &= \frac{-1}{2\sigma^2 J} (x^2 - 2(x + \sigma^2 J)z + z^2) \\
 &= \frac{-1}{2\sigma^2 J} ((x + \sigma^2 J - z)^2 - (x + \sigma^2 J)^2 + x^2) \\
 &= \frac{-1}{2\sigma^2 J} ((x + \sigma^2 J - z)^2 - 2x\sigma^2 J - \sigma^4 J^2) \\
 &= \frac{-1}{2\sigma^2 J} (x + \sigma^2 J - z)^2 + \left(x + \frac{\sigma^2 J}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$x = \log S + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \tau$$

A fórmula de Black-Scholes

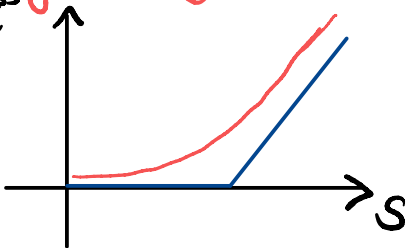
Portanto, achamos a famosa fórmula de Black-Scholes

$$C^{BS}(t, S, T, K, r, \sigma) = S\Phi(d_+) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_-)$$

onde

$$d_{\pm} = \frac{\log(S/K) + (r \pm \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \Phi(d) = \int_{-\infty}^d \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz$$

$$x = \log S + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$$



$t = T$
 $t < T$

- O modelo de Black–Scholes serve de um bloco fundador de vários outros modelos que descrevem melhor a realidade do mercado de opções
- Volatilidade estocástica, adicionar dividendos, taxa de juros estocásticas
- Derivativos mais complexos: exercício antecipado (Americana), derivativos exóticos (asiático, com barreira, lookback...)
- dependência do caminho (path-dependence): Cálculo Funcional de Itô
- Controle Estocástico Ótimo: outros problemas em Finanças Quantitativas