Sobre a Classe de Nilpotência de Grupos Finitos admitindo Grupos de Frobenius de Automorfismos

Jhone Caldeira
Instituto de Matemática e Estatística - UFG

Resumo

Seja A um grupo agindo por automorfismos sobre um grupo G. Denotamos por $C_G(A)$ o centralizador de A em G, que é o subgrupo dos pontos fixos dessa ação: $C_G(A) = \{x \in G : x^a = x, \text{para todo } a \in A\}$. Diversos estudos têm mostrado que em muitos casos as propriedades de $C_G(A)$ exercem interessante influência sobre G. A partir do *Mazurov's Problem 17.72* posto em *Kourovka Notebook* [10], problemas em que grupos de Frobenius agem por automorfismos sobre grupo finitos têm recebido atenção especial. Nesse sentido, admitimos a seguinte caracterização: um grupo de Frobenius finito FH, com núcleo F e complemento H, é o produto semidireto de um subgrupo normal F por H de modo que $C_F(h) = 1$, para todo elemento não trivial h de H. Tais grupos têm estrutura bem conhecida. Thompson [12] mostrou que o núcleo F é nilpotente e Higman [4] provou que sua classe de nilpotência é limitada em termos do menor primo dividindo a ordem do complemento H. Agora, passemos à seguinte situação: suponha que um grupo de Frobenius finito FH aja por automorfismos sobre um grupo finito G. No caso particular em que $C_G(F) = 1$, temos que G é solúvel (Belyaev e Hartley, [1]). Importantes resultados foram apresentados por Khukhro, Makarenko e Shumyatsky em [7]: se $C_G(H)$ é nilpotente, então G é nilpotente; ainda, provam que no caso de F ser cíclico, a classe de nilpotência de G pode ser limitada em termos da ordem de H e da classe de nilpotência de $C_G(H)$. Para além da questão da classe de nilpotência, possivelmente incluindo ou modificando algumas hipóteses, podemos encontrar resultados evidenciando que limitações para ordem, posto, altura de Fitting e expoente de G podem ser obtidas a partir das propriedades de $C_G(H)$ e, eventualmente, de H. Veja, por exemplo, [9, 8, 11, 6, 2, 3]. No caso da limitação da classe de nilpotência, métodos lineares (de Lie) são aplicados. Destaca-se a pergunta se o limitante para a classe de nilpotência pode ser obtido de forma independente da ordem do complemento H. Recentemente, Iusa [5] traz uma resposta negativa para essa pergunta, apresentando uma classe de grupos nilpotentes, de classe ilimitada.

Referências

[1] Belyaev, V. V.; Hartley, B., *Centralizers of finite nilpotent subgroups in locally finite groups*, Algebra Logic, 35 (1996), 217–228.

[2] Caldeira, J.; De Melo, E.; Shumyatsky, P., *On groups and Lie algebras admitting a Frobenius group of automorphisms*, Journal of Pure and Applied Algebra, 216 (2012), 2730–2736.

[3] Caldeira, J.; De Melo, E., *Supersolvable Frobenius groups with nilpotent centralizers*, Journal of Pure and Applied Algebra, 223 (2019), 1210–1216.

[4] Higman, G., *Groups and rings having automorphisms without non-trivial fixed elements*, J. Lond. Math. Soc., 32 (1957), 321–334.

[5] Iusa, V., *On the nilpotency class of finite groups with a Frobenius group of automorphisms*, Monatsh. Math., 189 (2019), 661–673.

[6] Khukhro, E. I., *Fitting height of a finite group with a Frobenius group of automorphisms*, J. Algebra, 366 (2012), 1–11.

[7] Khukhro, E. I.; Makarenko, N. Y.; Shumyatsky, P., *Frobenius groups of automorphisms and their fixed points*, Forum Math., 26 (2014), 73–112.

[8] Khukhro, E. I.; Shumyatsky, P., *Nilpotency of finite groups with Frobenius groups of automorphisms*, Monatsh. Math., 163 (2011), 461–470.

[9] Makarenko, N. Y.; Shumyatsky, P., *Frobenius groups as groups of automorphisms*, Proc. Amer. Math. Soc., 138 (2010), 3425–3436.

[10] Mazurov, V. D.; Khukhro, E. I., Unsolved Problems in Group Theory. The Kourovka Notebook. No. 18. Institute of Mathematics, Novosibirsk, 2014.

[11] Shumyatsky, P., *On the exponent of a finite group with an automorphism group of order twelve*, J. Algebra, 331 (2011), 482–489.

[12] Thompson, J. G., *Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order*, Proc. Natl. Acad. Sci., USA, 45 (1959), 578–581.