Grupos de Papel de Parede

Autora: Julia Mitsuno Kato Aiza Alvarez
Orientador: Emerson Ferreira de Melo

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre os grupos de Papel de Parede. Primeiramente, vamos mostrar a estrutura e algumas propriedades do grupo Euclidiano. Em seguida, mostramos como podem ser associados padrões de simetrias a elementos do grupo Euclidiano e apresentamos alguns padrões usados em papel de parede como curiosidade. Por fim, construímos os 17 tipos de grupos de Papel de Parede.

1 Introdução

Intuitivamente, um padrão de papel de parede é um padrão que repetido infinitamente preenche todo o plano. Esse padrão possui certo nível de simetria, ou seja, ao aplicar alguma translação ou rotação ou reflexão, o padrão permanece o mesmo.

Figura 1: Padrão de Papel de Parede

A utilização de grupos de papel de parede como método de classificação de padrões em 2D é muito interessante pois existem apenas um número finito de grupos dado a infinidade de possibilidades para esses padrões.

2 Grupo Euclidiano

Uma isometria no plano é uma função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ onde as distâncias são preservadas, isto é, para todo par x, y em $\mathbb{R}^2$, vale que

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \tag{1}$$

As isometrias no plano Euclidiano formam um grupo com a composição de funções. Esse grupo é chamado de *Grupo Euclidiano* (E_2).

As transformações que preservam distâncias são translações, rotações e reflexões.Uma *translação* por um vetor $v \in \mathbb{R}^2$ é uma função do tipo

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto x + v \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Seja T o conjunto de todas as translações do Grupo Euclidiano.

Defina O como sendo o subgrupo do Grupo Euclidiano que contém todas as transformações ortogonais. Ou seja, os elementos de O são rotações centradas na origem e reflexões por retas que passam pela origem.

Um elemento no Grupo Euclidiano é uma rotação centrada na origem seguida por uma translação ou uma reflexão por uma reta que passa pela origem seguida por uma translação.

Com isso, temos que

$$E_2 = TO \tag{2}$$

Veja que T é um subgrupo normal do Grupo Euclidiano.

A interseção de T e O é trivial, no caso esse conjunto possui um único elemento: a transformação identidade. Isso ocorre pois toda translação move a origem, com exceção da identidade, enquanto toda transformação ortogonal fixa a origem.

Sejam K e H dois grupos. Se $\sigma : K \longrightarrow Aut(H)$ é um homomorfismo do grupo K no grupo dos automorfismos de H, então $\rtimes$ denotará a operação definida sobre o conjunto $K \times H$ da seguinte maneira:

$$(k, h) \cdot (k', h') := (k \cdot k', h \cdot \sigma(k)(h')) \tag{3}$$

O grupo $(K \times H, \rtimes)$ é chamado de *produto semidireto* de H por K com homorfismo σ. Será denotado por $H \rtimes K$.

Proposição 1. *Existe um homomorfismo $\sigma : O \longrightarrow Aut(T)$ tal que $E_2 \cong T \rtimes O$.*

Para analisar os Grupos de Papel de Parede, usaremos uma notação diferente para trabalhar com elementos do Grupo Euclidiano. Suponha $g = \tau f \in E_2$, onde τ representa uma translação e f representa uma transformação ortogonal.

Se $v = g(0)$, e se M é a matrix ortogonal que representa f na base canônica de $\mathbb{R}^2$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$ temos que

$$g(x) = v + xM^t \tag{4}$$

Reciprocamente, dado um vetor $v \in \mathbb{R}^2$ e $M \in O_2$ a equação acima determina uma isomentria no plano. Dessa forma, podemos pensar em qualquer isometria do plano como sendo um par (v, M), onde $v \in \mathbb{R}^2$ e $M \in O_2$, com multiplicação dada por

$$(v, M)(v', M') = (v + f_M(v'), MM') \tag{5}$$

Mais precisamente, $E_2 = \mathbb{R}^2 \rtimes O_2$. Onde o homomorfismo $\psi : O_2 \longrightarrow Aut(\mathbb{R}^2)$ é definido pela ação natural de O_2 em $\mathbb{R}^2$.

3 Grupo Ponto e Reticulados

Considere a seguinte projeção:

$$\begin{aligned} \Pi : E_2 &\longrightarrow O_2 \\ (v, M) &\longmapsto M \end{aligned}$$

Note que Π é homomorfismo e seu núcleo consiste das transformações em E_2 tais que $\Pi(v, M) = Id$, onde Id é a matriz identidade, isto é, o núcleo é composto das isometrias do tipo (v, Id), ou seja

$$ker(\Pi) = T \triangleleft E_2 \tag{6}$$

Seja G um subgrupo do Grupo Euclidiano ($G < E_2$).

Definição 1. *$H = G \cap T$ é chamado **subgrupo de translação** de G, onde $H < G$.*

Definição 2. *$J = \Pi(G)$ é chamado **grupo ponto** de G.*

Note que a restrição de Π para G é um homomorfismo sobrejetivo de G para J. Pelo Teorema de Isomorfismo temos que

$$G \big/ ker(\Pi|_G) \cong Im(\Pi|_G) \tag{7}$$

É claro que $ker(\Pi|_G) = H$, e $Im(\Pi|_G) = J$. Assim, $J \cong G/H$.

Definição 3. *Um subgrupo de E_2 é dito um **grupo de papel de parede** se o seu subgrupo de translação é gerado por duas translações independentes e seu grupo ponto é finito.*

Dizemos que um grupo G *age* sobre um conjunto X se é dada uma função $X \times G \to X$, $(x, g) \mapsto gx$, com as seguintes propriedades:

1. $1x = x$, para todo $x \in X$;

2. $h(gx) = (hg)x$, para todo $x \in X$ e para todo $g, h \in G$.

Usaremos a seguinte notação $G \curvearrowright X$ para denotar que G age sobre X e chamaremos de *ação* do grupo G. Agora seja $x \in X$ denotaremos por $Stab_G(x)$ o *estabilizador* de x, isto é, o conjunto

$$\{g \in G : gx = x\} \tag{8}$$

E definimos $O_G(x)$ a *órbita* de x, isto é, o conjunto $\{gx : g \in G\}$

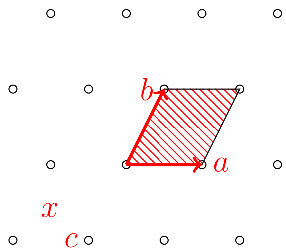
Considere a ação natural do grupo H sobre $\mathbb{R}^2$.

Definição 4. *Seja L a órbita da origem sobre a ação dada. O conjunto L é chamado **reticulado** de G.*

Pela definição, sabemos que H é gerado por duas translações independentes, dessa forma, podemos concluir que L possui dois vetores independentes. Selecione um vetor não-nulo $a \in L$ de menor comprimento em $\mathbb{R}^2$ e selecione um segundo vetor $b \in L$ linearmente independente a a cujo comprimento é o menor possível.

Proposição 2. *O conjunto L é gerado por dois vetores a e b, isto é, consiste de todas as combinações lineares $ma + nb$ onde $m, n \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. A correspondêcia $(v, I) \longmapsto v$ é um isomorfismo entre T e o grupo de $\mathbb{R}^2$ com a adição, que leva H para L. Então L é um subgrupo de $\mathbb{R}^2$ e todos os pontos $ma + nb$ do reticulado gerado por a e b pertencem a L.



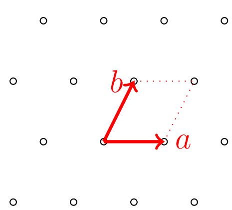
Usando os pontos do reticulado é possível dividir o plano em paralelogramos, como a figura acima. Se x pertence a L mas não está no reticulado, escolha um paralelogramo que contenha x e um vértice c desse paralelogramo que seja perto de x.

O vetor $x-c$ é não nulo, não é igual a a ou b e seu comprimento é menor que o comprimento de b. Mas $\|x - c\| < \|a\|$, pois tomamos a como sendo o de comprimento mínimo. Por outro lado, $\|a\| \leq \|x - c\| < \|b\|$ então $x - c$ deve se inclinar para a contradizendo a escolha de b.

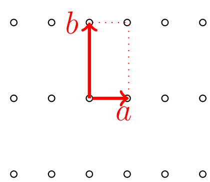
Logo, não existe ponto x e L é o reticulado gerado por a e b. □

Note que existem apenas 5 tipos de reticulados possíveis. São eles:

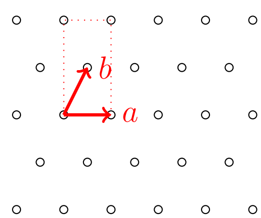
- Oblíquo: $\|a\| < \|b\| < \|a - b\| < \|a + b\|$
- Retangular: $\|a\| < \|b\| < \|a - b\| = \|a + b\|$
- Retangular Central: $\|a\| < \|b\| = \|a - b\| < \|a + b\|$
- Quadrado: $\|a\| = \|b\| < \|a - b\| = \|a + b\|$
- Hexagonal: $\|a\| = \|b\| = \|a - b\| < \|a + b\|$



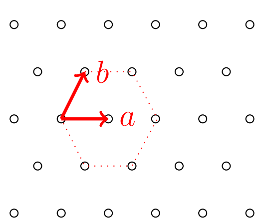
Oblíquo



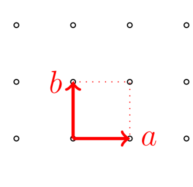
Retangular



Retangular Central



Hexagonal



Quadrado

Proposição 3. *J age sobre L.*

Demonstração. O grupo ponto age naturalmente sobre o plano, pois é um subgrupo de O_2. Se $M \in J$ e $x \in L$, devemos mostrar que $f_M(x)$ pertence a L.

Suponha que $\pi(g) = M$ onde $g = (v, M)$ e seja τ a translação (x, I). H é o núcleo do homomorfismo $\pi : G \longrightarrow J$, temos que H é um subgrupo normal em G e $g\tau g^{-1}$ pertence a H.

Mas,

$$\begin{aligned} g\tau g^{-1} &= (v, M)(x, I)(-f_M^{-1}(v), M^{-1}) \\ &= (v, M)(x - f_M^{-1}(v), M^{-1}) \\ &= (v + f_M(x - f_M^{-1}(v)), MM^{-1}) \\ &= (v + f_M(x) - v, I) \\ &= (f_M(x), I) \end{aligned}$$

Temos que $f_M(x)$ é um ponto do reticulado L, como queríamos. □

Para entender melhor os grupos pontos veja que um subgrupo finito de O_2 é cíclico ou diedral. Com isso, podemos analisar quais desses subrupos podem aparecer como grupo ponto de algum grupo de papel de parede.

Proposição 4. ***(Restrição Cristalográfica)****: A ordem de rotação em um grupo de papel de parede pode ser 2, 3, 4 ou 6.*

4 Padrões de Papel de Parede

Gostaríamos de caracterizar os Grupos de Papel de Parede definidos anteriormente, para isso, examinaremos os 5 tipos de reticulados separadamente.

Dado um reticulado L, as transformações ortogonais que fixam esse tipo de reticulado formam um grupo. E o grupo ponto J de qualquer grupo de papel de parede que tem L como reticulado deve ser um subgrupo desse grupo pois, $J \curvearrowright L$.

4.1 Nomenclatura

Cada grupo de papel de parede tem o nome composto por: letras P, C, M, G; e inteiros 1, 2, 3, 4, 6. A letra P signfica *primitivo* e representa a célula "primitiva"do reticulado (cópias do quadrilátero formado por a e b definidos anteriormente). No caso especial do reticulado retangular central temos que considerar uma célula não primitiva contida no retângulo determinado por a e b, juntamente com seu centro. Para isso usamos a letra C para denotar *reticulado central*. A letra M representa reflexões e a letra G representa reflexões do tipo *glide* (reflexão com deslizamento).

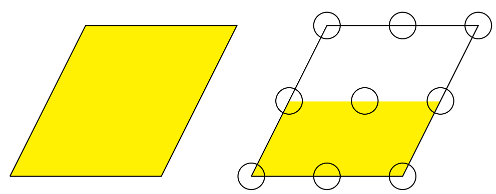
Em relação aos inteiros, 1 representa a transformação identidade e 2, 3, e 4 indicam rotações da respectiva ordem. Para entender as imagens considere a legenda na tabela a seguir:

Símbolo	Legenda
○	estabilizador do ponto é cíclico de ordem 2
●	estabilizador do ponto é cíclico de ordem 3
●	estabilizador do ponto é cíclico de ordem 4
●	estabilizador do ponto é cíclico de ordem 6
───	forma do reticulado
━━━	reflexão
- - - - -	glide

Além disso, conidere A_θ a transformação que representa rotação anti-horária de θ radianos pela origem. E B_ϕ representa reflexão por uma reta que passa pela origem, cujo ângulo com o eixo x positivo é $\phi/2$.

4.2 Grupos com Reticulado Oblíquo

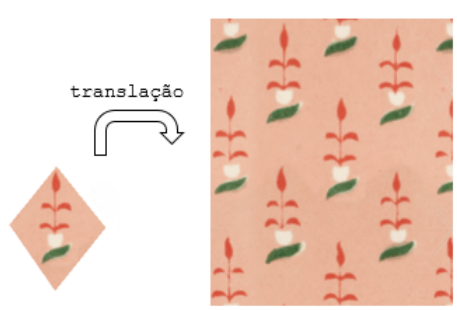
O reticulado L de G é obliquo, assim, a única transforação ortogonal que preserva L é a transformação identidade ou a rotação de 180 graus pela origem. Dessa forma, temos que o grupo ponto J de G é um subgrupo de $\{\pm I\}$.



P1 P2

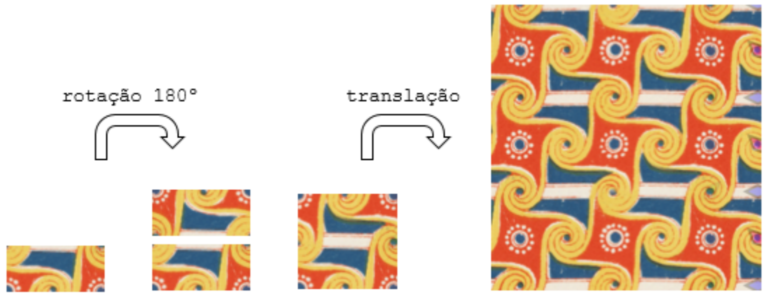
4.2.1 P1

Se $J = \{I\}$, ou seja, possui apenas a transformação identidade então o grupo de papel de parede G é composto por duas translações independentes.



4.2.2 P2

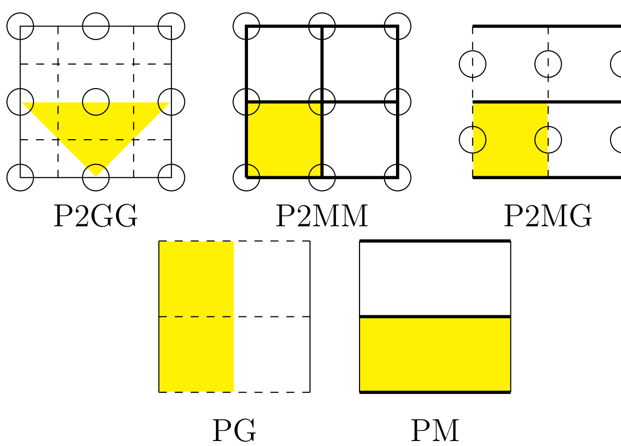
No caso em que $J = \{\pm I\}$, G possui uma rotação de ordem 2. Tomando o ponto fixo dessa rotação como origem, temos que $(0, I)$ pertence a G. A união de dois subgrupos H e $H(0, -I)$ é um subgrupo de E_2. Temos então, os centros de rotação em pontos do tipo $\frac{1}{2}ma + \frac{1}{2}nb$, com m e n inteiros.



4.3 Grupos com Reticulado Retangular

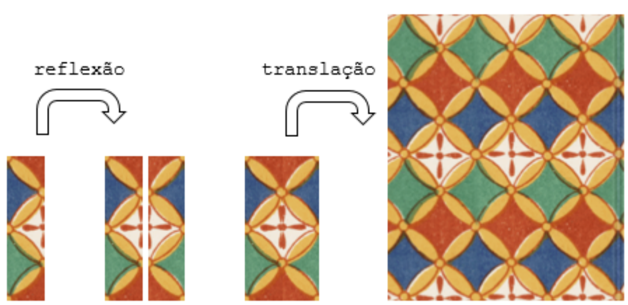
No caso em que o reticulado é retangular, temos mais casos de simetrias. A identidade, uma rotação de ordem 2, reflexão pelo eixo x e reflexão pelo eixo y. Assim, temos que J, o grupo ponto, é um subgrupo de $\{\pm I, B_0, B_\pi\}$.

É interessante analisar grupos que apresentam simetrias inéditas, pois estamos caracterizando os diferentes tipos de grupos de papel de parede a menos de isomorfismo. Por esse motivo não apresentaremos as possibilidades $P1$ e $P2$ para esse tipo de Reticulado.



4.3.1 PM

$J = \{I, B_0\}$ e G contém uma reflexão horizontal.



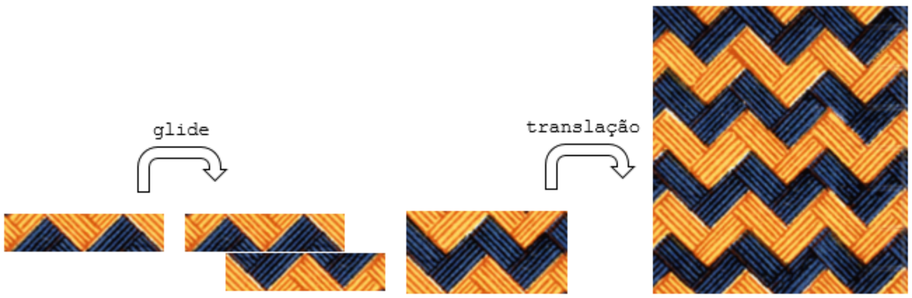
4.3.2 PG

No caso em que $J = \{I, B_0\}$ e G não possui reflexão, então G possui um reflexão glide. Ao aplicar essa reflexão glide duas vezes temos uma tranlação, então o glide tem a forma $(\frac{1}{2}ka, B_0)$, para k inteiro.

Note que k deve ser ímpar, caso contrário teríamos uma reflexão em G. Assim, este grupo tem elementos (que não são translações) da forma

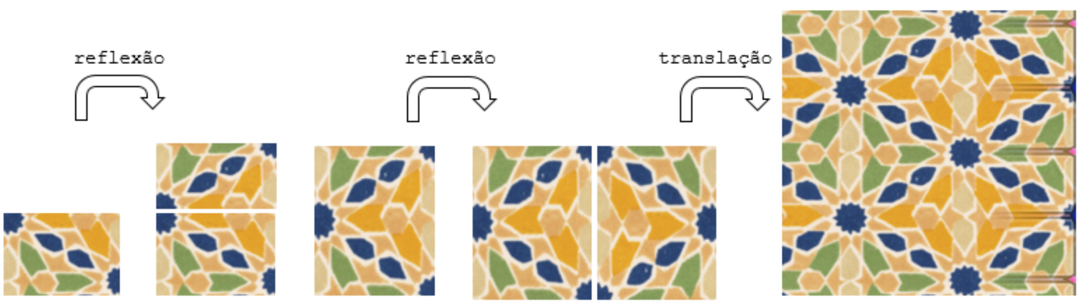
$$(ma + nb, I)(\tfrac{1}{2}a, B_0) = ((m + \tfrac{1}{2})a + nb, B_0)$$

onde m e n são inteiros. Esses são todos glides por uma linha horizontal, que ou passa pelos pontos do reticulado ou permanece exatamente entre seus pontos.



4.3.3 P2MM

Nesse caso G possui uma reflexão horizontal e uma reflexão vertical.

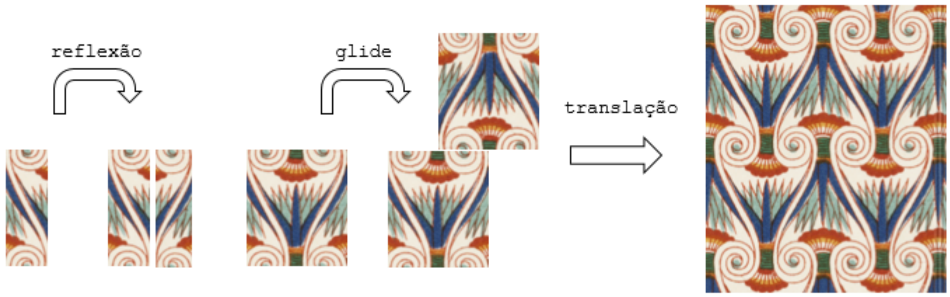


4.3.4 P2MG

Suponha que G possua uma reflexão horizontal, mas não possua uma reflexão vertical. Então B_π deve ser obtido por meio de um glide. Assumindo que $(0, B_0)$ e $(\frac{b}{2}, B_\pi)$ pertencem a G temos que o produto

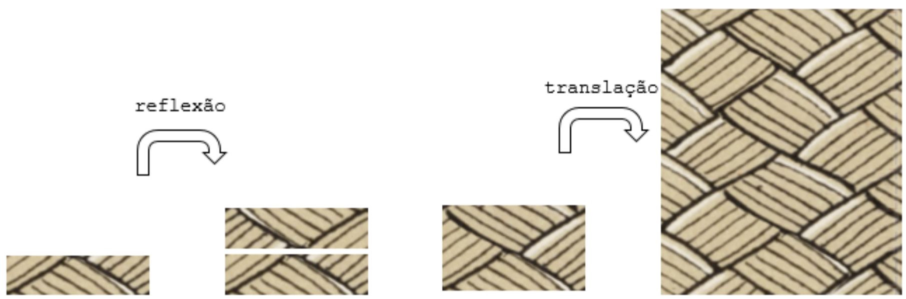
$$(\tfrac{b}{2}, B_\pi)(0, B_0) = (\tfrac{b}{2}, -I)$$

representa uma meia volta.



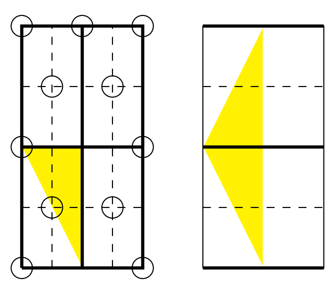
4.3.5 P2GG

Não existem reflexões em G.



4.4 Grupos com Reticulados Retangular Central

Esse caso de Lattice se assimila ao anterior, temos então que o grupo ponto é um subgrupo de $\{\pm I, B_0, B_\pi\}$.



C2MM CM

4.4.1 CM

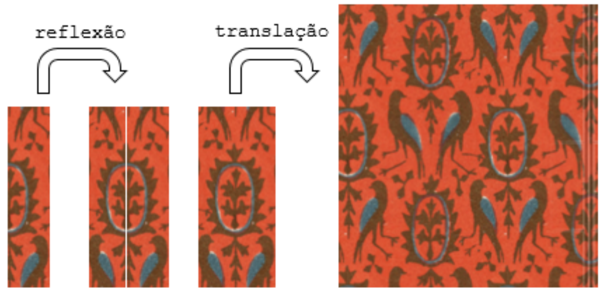
$J = \{I, B_0\}$. Se $(v, B_{)})$ representa B_0 em G, essa isometria é uma reflexão horizontal ou um glide horizontal. Escolha um ponto na reta de reflexão ou no glide como sendo a origem, tal que $2v$ é um múltiplo de a. Se $2v = ka$, com k par, temos que a reflexão $(0, B_0)$ pertence a G. Agora, os elementos que não são translações tem a forma

$$(ma + nb, B_0) = ((m + \tfrac{n}{2})a + \tfrac{n}{2}(2b - a), B_0)$$

onde m e n são inteiros. Se k é ímpar temos que

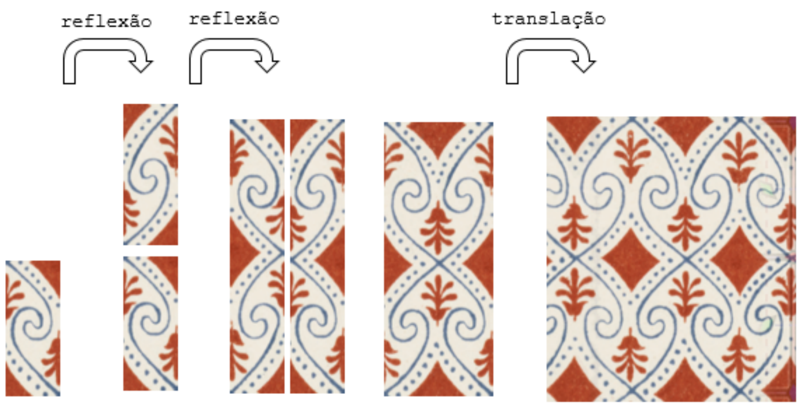
$$(\tfrac{1}{2}(2b - a), B_0) = (-\tfrac{a}{2}(k + 1) + b, I)(\tfrac{1}{2}ka, B_0)$$

pertence a G, que é também uma reflexão. Caso $J = \{I, B_\pi\}$ temos um grupo isomorfo a CM.



4.4.2 C2MM

$J = \{\pm I, B_0, B_\pi\}$.

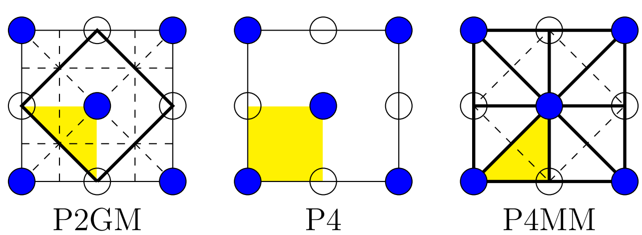


4.5 Grupos com Reticulado Quadrado

No caso de reticulado quadrado obtemos mais transformações que preservam a figura, elas formam um grupo especial que chamamos de *grupo diedral* de ordem 8. Esse grupo é gerado por $A_{\frac{\pi}{2}}$ e B_0 ou seja,

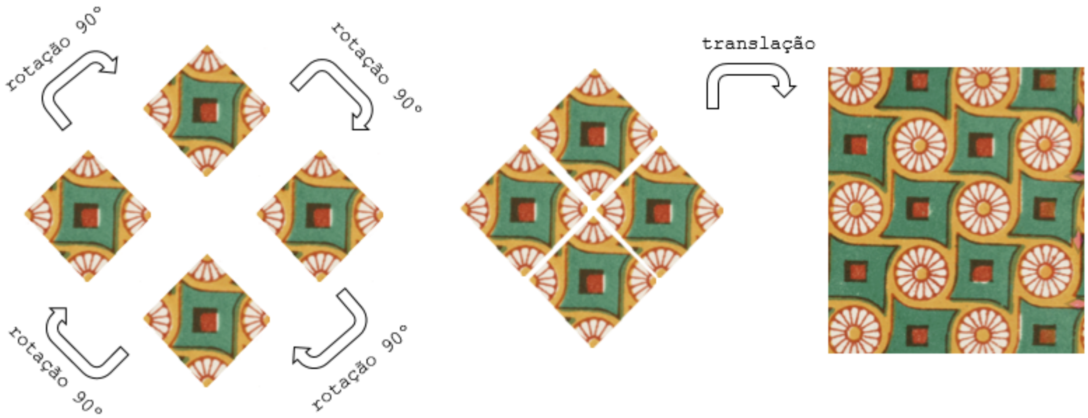
$$D_8 = \langle A_{\frac{\pi}{2}}, B_0 | A_{\frac{\pi}{2}}^4 = 1, B_0^2 = 1, (A_{\frac{\pi}{2}} B_0)^2 = 1 \rangle$$

Temos então os seguintes grupos:



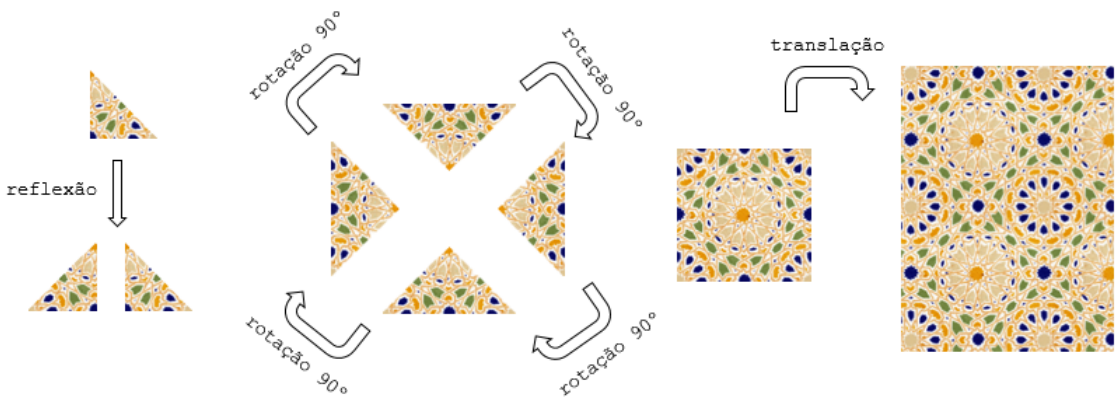
4.5.1 P4

J é gerado por $A_{\frac{\pi}{2}}$.



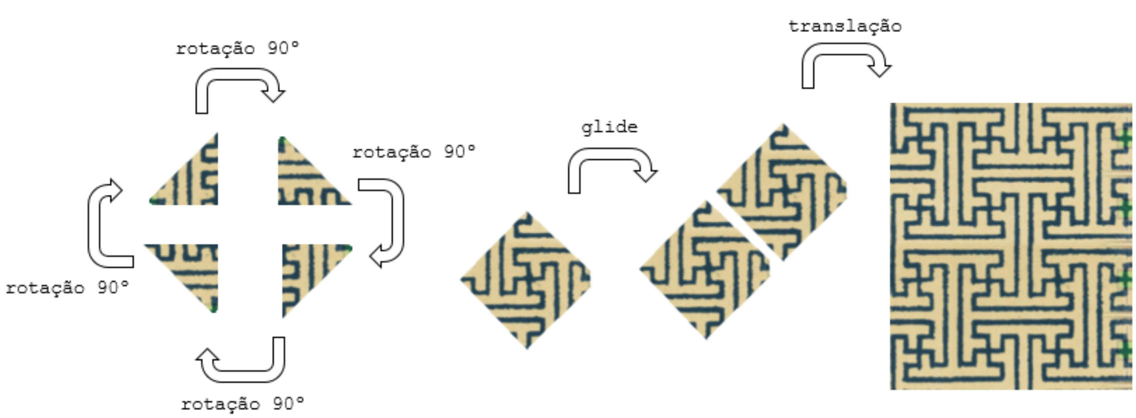
4.5.2 P4MM

J é gerado por $A_{\frac{\pi}{2}}$ e B_0, e B_0 pode ser representado por uma reflexão em G.



4.5.3 P4GM

J é gerado por $A_{\frac{\pi}{2}}$ e B_0, mas B_0 não pode ser representado por uma reflexão em G.

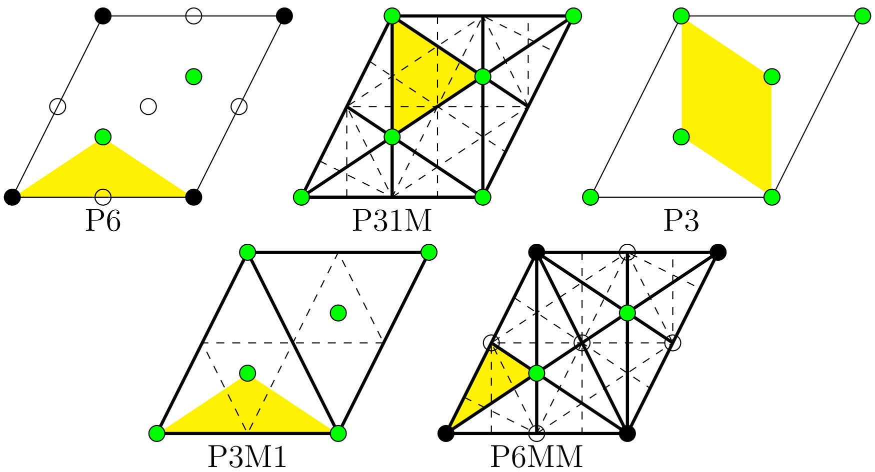


4.6 Grupos com Reticulado Hexagonal

Dessa vez, temos o grupo diedral de ordem 12, gerado por $A_{\frac{\pi}{3}}$ e B_0, isso é,

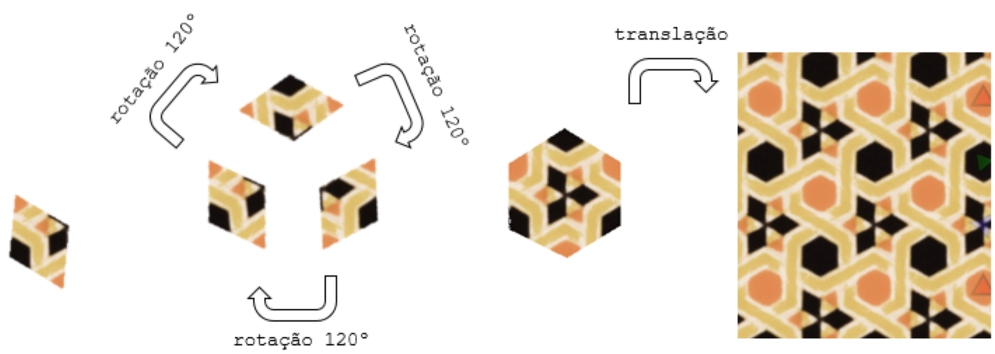
$$D_{12} = \langle A_{\frac{\pi}{3}}, B_0 | A_{\frac{\pi}{3}}^6 = 1, B_0^2 = 1, (A_{\frac{\pi}{3}} B_0)^2 = 1 \rangle$$

Nesse caso, teremos novas simetrias, cuja ordem de rotação é 3 ou 6.



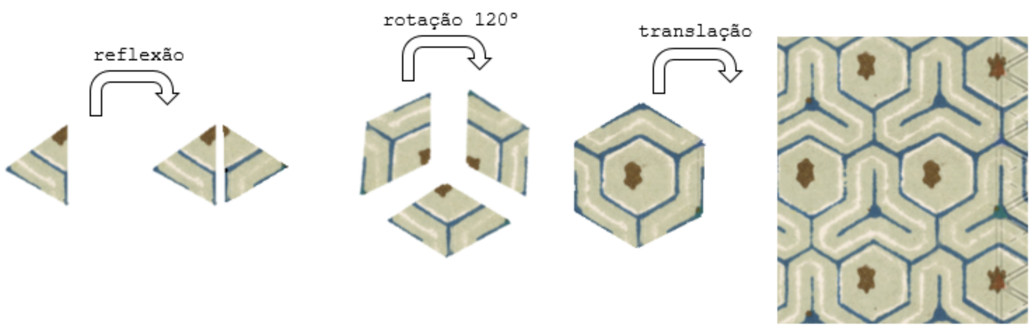
4.6.1 P3

J é gerado por $A_{\frac{2\pi}{3}}$.



4.6.2 P3M1

J é gerado por $A_{\frac{2\pi}{3}}$ e B_0.

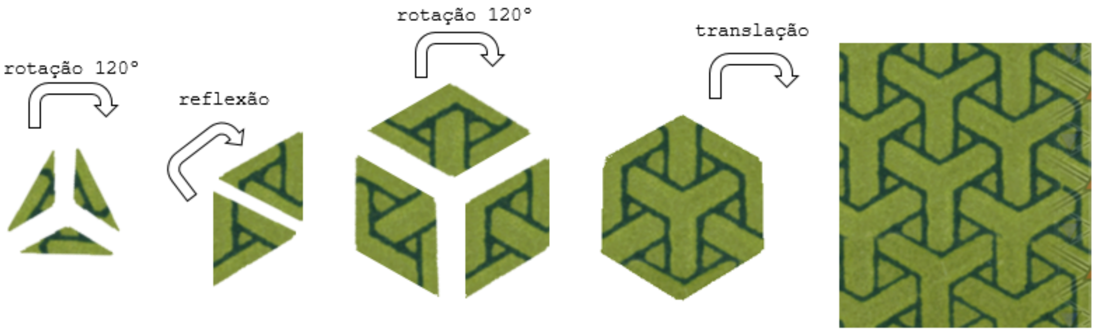


4.6.3 P31M

Suponha J gerado por $A_{\frac{2\pi}{3}}$ e $B_{\frac{\pi}{3}}$. Escolha como origem um ponto fixo de uma rotação de ordem 3, tal que $(0, A_{\frac{2\pi}{3}})$ pertence a G, e seja $(\lambda a + \mu b, B_{\frac{\pi}{3}})$. Temos que

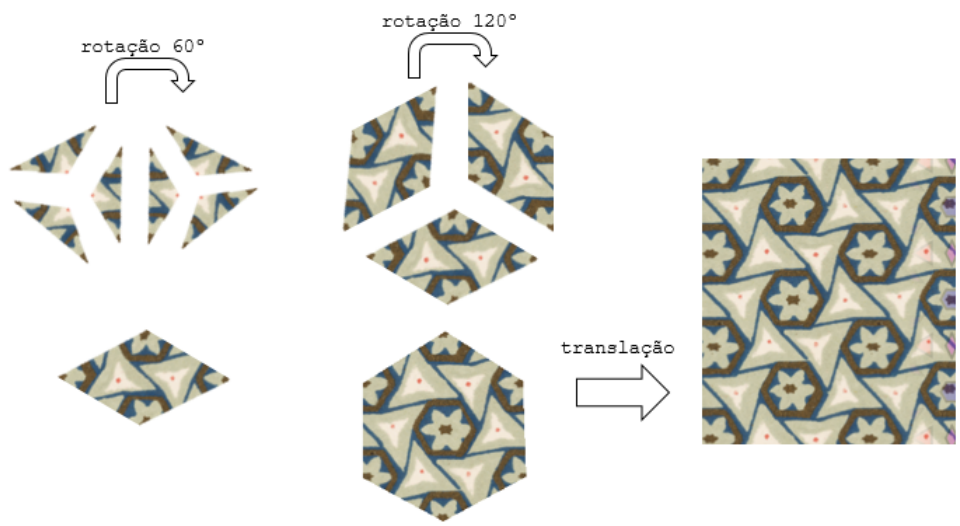
$$(0, B_{\frac{\pi}{3}}) = (-\lambda a - \mu b, I)(\lambda a + \mu b, B_{\frac{\pi}{3}})$$

pertence a G. Os elementos de G tem a forma $(ma + nb, M)$ onde m e n são inteiros e M é uma das transformações I,$A_{\frac{2\pi}{3}}$, $A_{\frac{4\pi}{3}}$, $B_{\frac{\pi}{3}}$, B_{π}, $B_{\frac{5\pi}{3}}$.



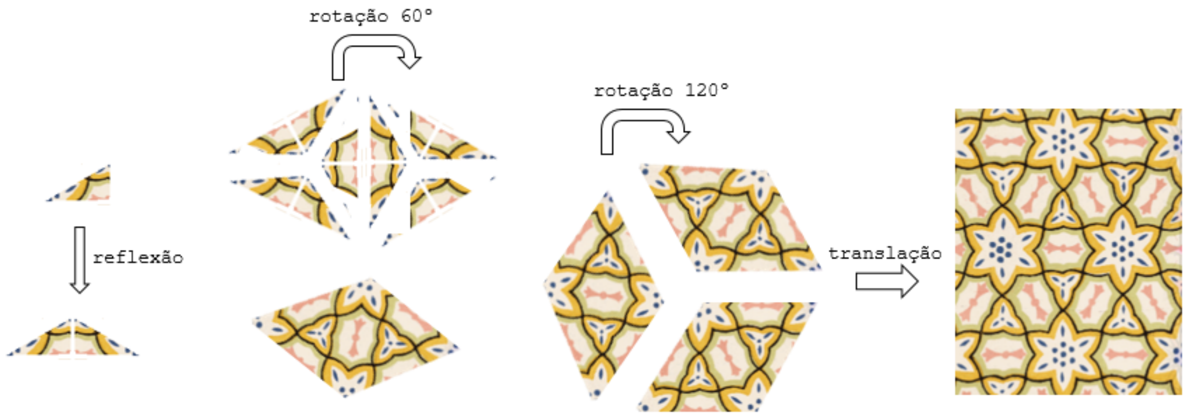
4.6.4 P6

J é gerado por $A_{\frac{\pi}{3}}$.



4.6.5 P6MM

J é gerado por $A_{\frac{\pi}{3}}$ e B_0.



5 Resultados

Definimos 17 grupos de papel de parede. Para verificar que nenhum dos grupos acima são isomorfos entre si, será necessário analisar como é um isomorfismo entre grupos de papel de parede.

Se G e H são dois grupos de papel de parede isomorfos, então translações são levadas para translações, rotações para rotações, reflexões para reflexões e reflexões glide para reflexões glide.

De fato, considere $\phi : G \longrightarrow G_1$ um isomorfismo entre grupos de papel de parede e se τ é uma translação em G. Translações e glides têm ordem infinita, enquanto rotações e reflexões têm ordem finita, então $\phi(\tau)$ deve ser ou uma translação ou um glide. Assuma que $\phi(\tau)$ é um glide e escolha uma translação τ_1 de G_1 que não comuta com $\phi(\tau)$. Se $\phi(g) = \tau_1$ então g deve ser uma translação ou glide. g^2 é uma translação, e comuta com τ, contradizendo o fato de que $\phi(g^2) = \tau_1^2$ não comuta com $\phi(\tau)$. Logo, translações correspondem a translações e glides correspondem a glides.

Reflexões tem ordem 2, consequentemente a imagem de uma reflexão por um isomorfismo é uma reflexão ou uma meia volta (rotação por π). Seja $g \in G$ uma reflexão cuja imagem $\phi(g)$ é uma meia volta, e escolha a translação τ de G em uma direção não perpendicular a reflexão de g. Então τg é um glide, mas $\phi(\tau g) = \phi(\tau)\phi(g)$ é o produto de uma translação e uma meia volta, que é outra meia volta. Logo, temos uma contradição. Por isso, reflexões devem corresponder a reflexões e, finalmente, rotações devem corresponder a rotações.

Proposição 5. *Se dois grupos de papel de parede são isomorfos então seus grupos ponto são isomorfos.*

Demonstração. Considere G e G_1 grupos de papel de parede com subgrupos de translação H e H_1 e grupo ponto J e J_1, respectivamente. Se $\phi : G \longrightarrow G_1$ é um isomorfismo temos $\phi(H) = H_1$. ϕ induz um isomorfismo de G/H para G_1/H_1. Como J é isomorfo a G/H e J_1 é isomorfo a G_1/H_1, então segue o resultado. □

Dessa forma os grupos que possuem grupos ponto diferentes, não podem ser isomorfos. Listando o grupo ponto J de cada grupo G definido anteriormente, temos

Grupo Ponto	Grupo de papel de parede	Reticulado
trivial	P1	oblíquo
$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	P2 PM PG CM	oblíquo retangular retangular retangular central
$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	P2MM P2MG P2GG C2MM	retangular retangular retangular retangular central
$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	P4	quadrado
D_4	P4MM P4GM	quadrado quadrado
$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	P3	hexagonal
D_3	P3M1 P31M	hexagonal hexagonal
$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	P6MM	hexagonal
D_6	P3	hexagonal

Proposição 6. *P2, PM, PG e CM não são isomorfos.*

Demonstração. Apenas P2 possui rotações, então não pode ser isomorfo a nenhum outro. Dos três grupos que sobraram, PG é o único que não possui reflexões, consequentemente não é isomorfo a PM ou CM. Finalmente, notamos que se tomarmos um glide em PM e escrevermos como uma reflexão seguida de uma translação, então as duas transformações pertencem a PM. No entanto, isso não acontece em CM, tome

$$(\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}(2b+a), B_0) = (\tfrac{1}{2}a, I)(\tfrac{1}{2}(2b-a), B_0)$$

temos que PM e CM não são isomorfos. □

Proposição 7. *P2MM, P2MG, P2GG e C2MM não são isomorfos.*

Demonstração. P2GG é o único que não contém reflexões, logo não pode ser isomorfo aos outros. Agora em relação a P2MM, P2MG e C2MM, o grupo P2MM é o único que contém todas as partes constituintes de seu glides, portanto, não pode ser isomorfo a P2MG ou C2MM. Falta mostrar que P2MG e C2MM não são isomorfos, note que as reflexões de P2MG são todas por retas horizontais, então o produto de duas reflexões será sempre uma translação. Mas em C2MM temos reflexões por retas horizontais e por retas verticais e o produto das duas será uma meia volta, logo P2MG e C2MM não podem ser isomorfos. □

Proposição 8. *P4MM e P4GM não são isomorfos.*

Demonstração. Cada rotação de ordem 4 em P4MM pode ser escrita como o produto de duas reflexões que pertencem a P4MM, o que não ocorre em P4GM. Tome $(a, A_{\frac{\pi}{2}})$. □

Proposição 9. *P3ML e P3LM não são isomorfos.*

Demonstração. É possível escrever rotações de ordem 3 como produto de duas reflexões em P31M, mas isso não ocorre em P3M1. Basta tomar $(a, A_{\frac{2\pi}{3}})$. □

Referências

[1] ARMSTRONG, M. A. *Groups and Symmetry*. Department of Mathematical Sciences: University of Durham. 1988;

[2] JACOBSON, N. *Basic Algebra I*. Dover Publications: W H Freeman Co(Sd). San Francisco. 1985;

[3] GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. *Elementos de Álgebra*. 6.ed. Rio de Janeiro: IMPA. 2015;

[4] LIMA, E. L. *Isometrias*. 2.ed. Rio de Janeiro: SMB. 2007.